

Análise Envoltória de Dados

Conceitos básicos e Aplicações

João Carlos Soares de Mello - *UFF*

Eliane Gonçalves Gomes - *Embrapa*

Lidia Angulo Meza - *UFF*

Luiz Biondi Neto - *UERJ*



17 de agosto de 2005

Medidas de desempenho

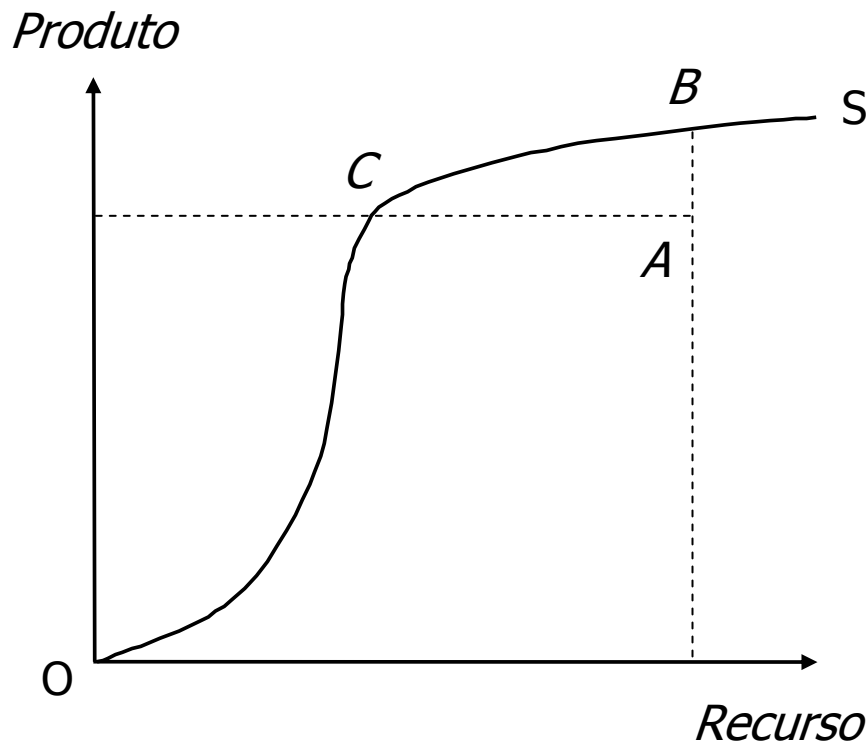
- Avaliação de desempenho de unidades produtivas que transformam recursos em produtos
- Medidas de desempenho
 - Eficácia → capacidade da unidade produtiva atingir a produção que tinha como meta
 - Produtividade → quociente entre o que foi produzido (*output*) e o que foi gasto para produzir (*input*)
quando há múltiplas variáveis, há necessidade de agregá-las em índices únicos

$$\text{Produtividade} = \frac{\textit{saída}}{\textit{entrada}}$$

Medidas de desempenho

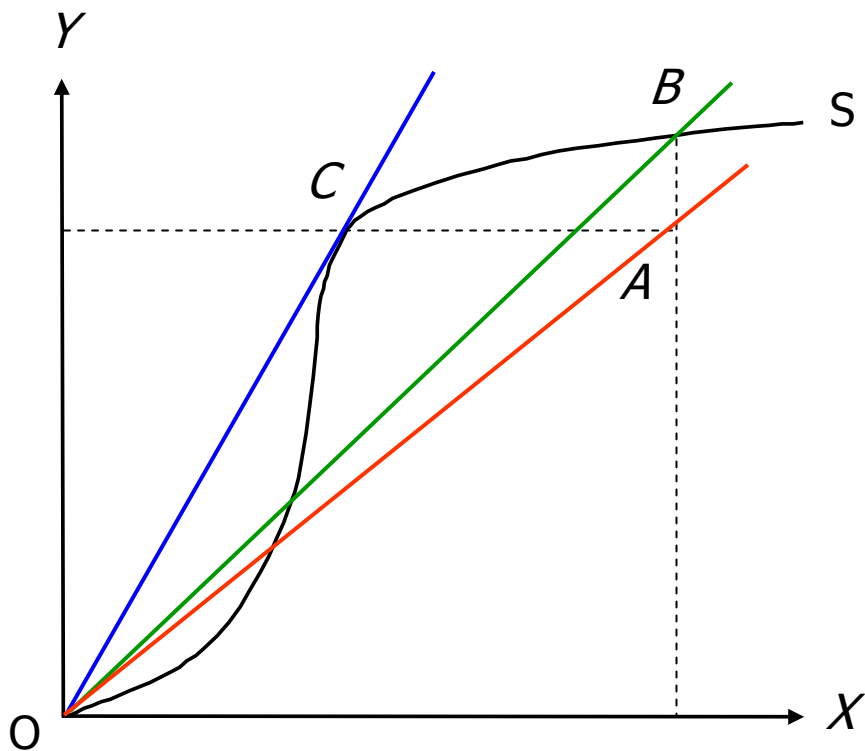
- (cont.)
 - Produtividade total dos fatores (TFP): medida de produtividade que considera todos os fatores de produção
 - ◆ Considerar produtividades parciais; isoladamente pode conduzir a conclusões errôneas sobre a produtividade global (ex. ton/ha)
 - ◆ Como considerar vários fatores?
 - **Eficiência** → **conceito relativo**; comparação entre o que foi realizado (produzido/gasto) e o melhor que poderia ter sido realizado

Produtividade X Eficiência



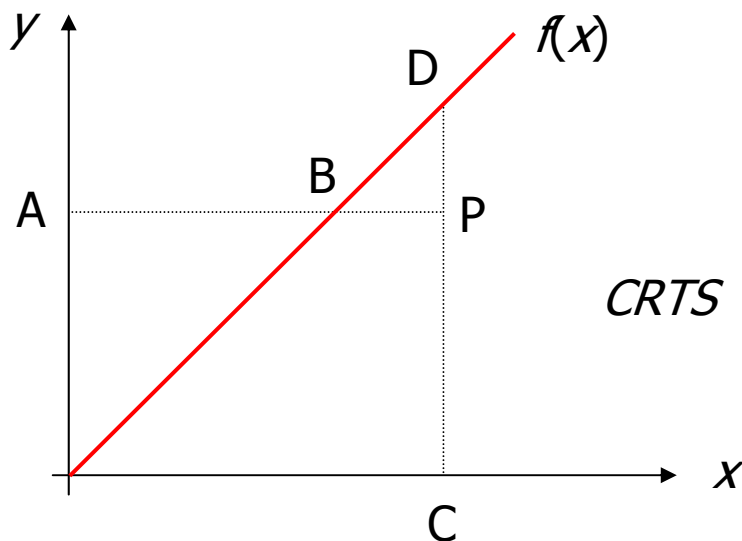
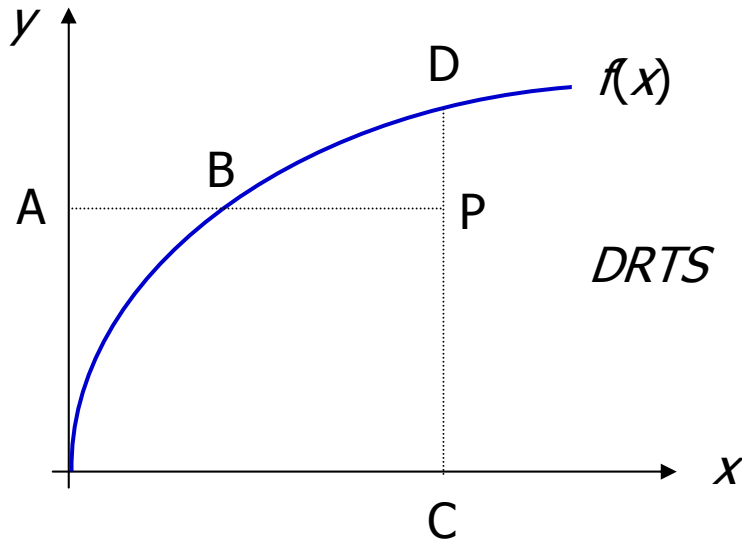
- OS → fronteira de produção; máxima produção para cada nível de recurso
- Unidades na fronteira são tecnicamente eficientes
- *B* e *C* eficientes; *A* ineficiente
- Conjunto viável de produção

Produtividade X Eficiência



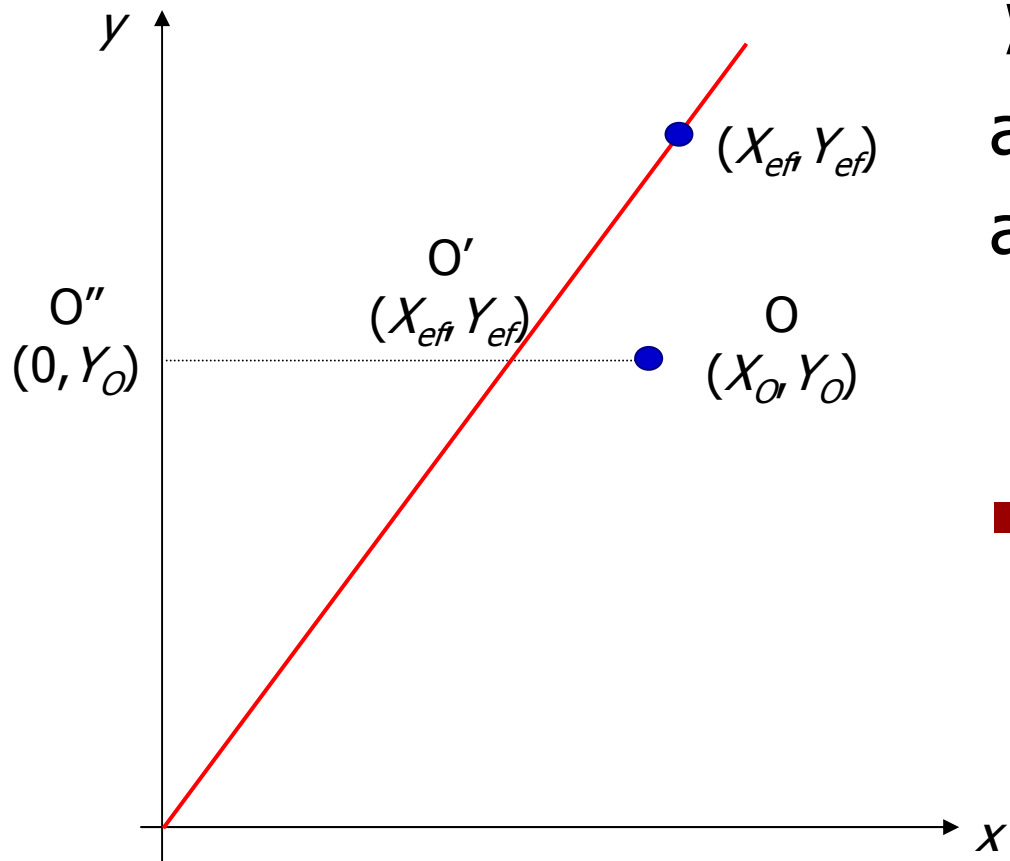
- Produtividade = Y/X
- $C \rightarrow$ tecnicamente eficiente e de maior produtividade (maior coeficiente angular da reta Y/X)
- $C \rightarrow$ opera em escala ótima

Orientação a recursos e a produtos



- Orientação a recursos
 - Em quanto os recursos podem ser reduzidos sem alterar a produção
 - Eficiência técnica = AB/AP
- Orientação a produtos
 - Em quanto os produtos podem ser aumentados sem alterar os recursos
 - Eficiência técnica = CP/CD
- Equivalentes somente sob certas condições

1 input, 1 output



$$Y_{ef} = a X_{ef}$$

$$a = Y_{ef} / X_{ef}$$

$a \rightarrow$ produtividade da unidade eficiente

- Eficiência \rightarrow produtividade de uma unidade comparada com uma unidade eficiente

$$Ef = \frac{\overline{O'O''}}{\overline{O''O}} = \frac{X_{ef}}{X_o} = \frac{Y_o / a}{X_o} = \frac{Y_o}{X_o} \times \frac{1}{a} = \frac{P_o}{P_{ef}}$$

1 input, 1 output

■ PPL

$$\text{Max } \frac{uY_0}{vX_0}$$

sujeito a

$$\frac{uY_i}{vX_i} \leq 1$$

$$\frac{u}{v} = \frac{\mu Y_{ef}}{vX_{ef}} = 1$$

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{Y_{ef} / X_{ef}} = \frac{1}{P_{ef}}$$

$$Ef = \frac{P_0}{P_{ef}}$$

- Serve de motivação para modelo dos multiplicadores
- Demonstração rigorosa usa dualidade

DEA – Modelos clássicos

- Proposta de Charnes, Cooper e Rhodes
 - Cada DMU escolhe seu próprio conjunto de pesos, de modo que apareça o melhor possível em relação às demais (mais favorável)
 - Cada DMU pode ter um conjunto de pesos (multiplicadores) diferente
 - Modelo com proporcionalidade entre *inputs* e *outputs* na fronteira (Modelo DEA CCR)

Modelo DEA CCR

- Charnes, Cooper e Rhodes, 1978
- Eficiência relativa é o quociente entre soma ponderada dos *outputs* e soma ponderada dos *inputs*

$$Eficiência_{DMU_k} = \frac{\sum_j u_j Y_{jk}}{\sum_i v_i X_{ik}}$$

\leftarrow *output virtual*
 \leftarrow *input virtual*

- Pesos são dados por um PPL de forma mais benevolente para cada DMU
- Modelo com proporcionalidade → alteração em uma variável produz alteração proporcional em outra variável

Modelo DEA CCR

$$\text{Max } Eff_0 = \left(\frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{j0}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{i0}} \right)$$

sujeito a

$$\frac{\sum_{j=1}^s u_j y_{jk}}{\sum_{i=1}^r v_i x_{ik}} \leq 1, \quad k = 1, \dots, n$$

$$u_j, v_i \geq 0, \quad \forall j, i$$

- Problema de programação fracionária
- Calcula os pesos para os *inputs* e *outputs* (v_i e u_j)
- Unidade 0 → unidade em análise
- Problema tem múltiplas soluções ótimas → linearização

Modelo DEA CCR

$$\text{Max } Eff_0 = \sum_{j=1}^s u_j y_{j0}$$

sujeito a

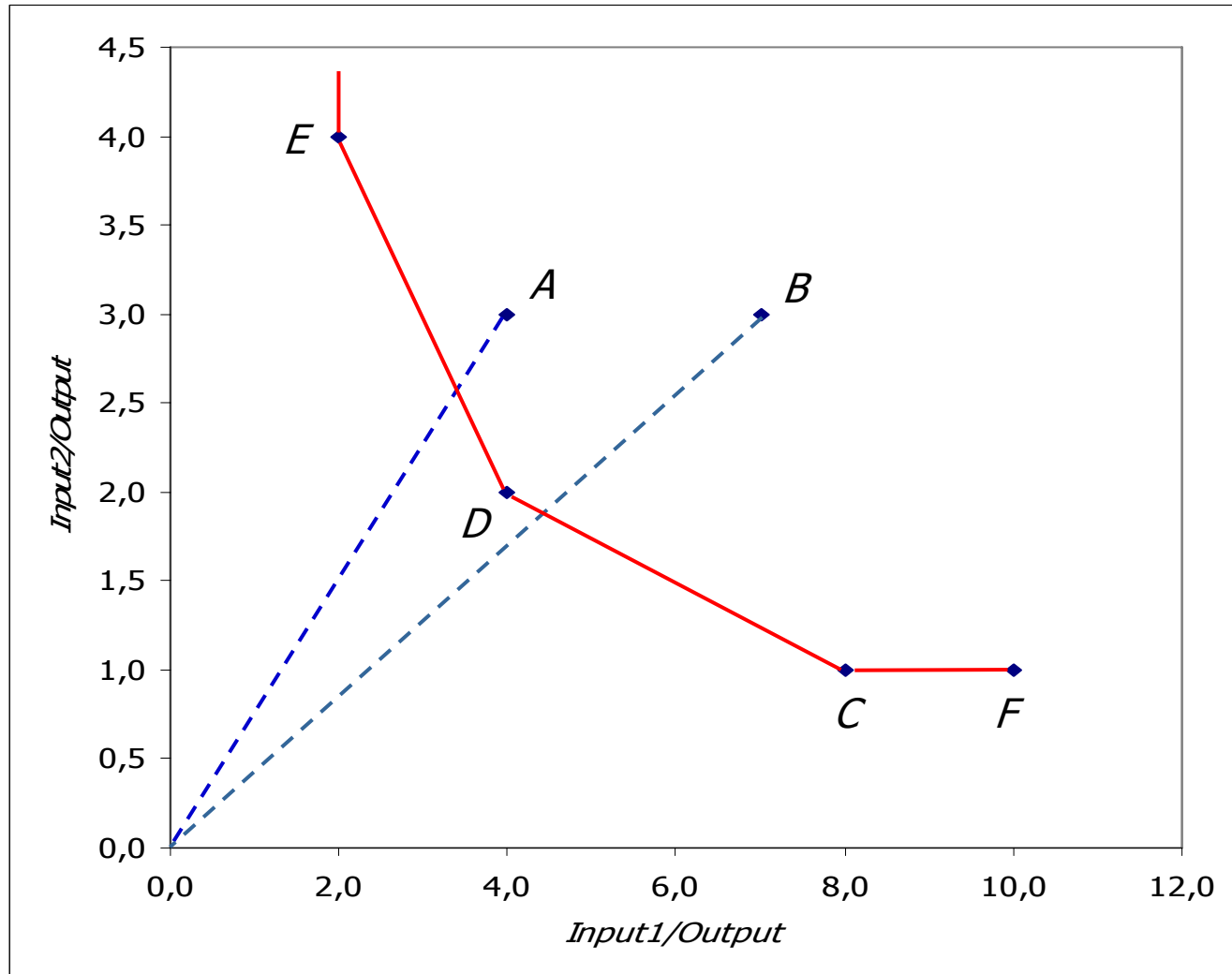
$$\sum_{i=1}^r v_i x_{i0} = 1$$

$$\sum_{j=1}^s u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} \leq 0, \forall k$$

$$u_j, v_i \geq 0, \forall j, i$$

- Problema de Programação Linear
- **Modelo dos multiplicadores** (determina conjunto de pesos e eficiência)
- DMU é CCR eficiente se $Eff^* = 1$ e existe uma solução ótima com v^* e $u^* > 0$
- Conjunto das DMUs eficientes é conjunto de referência ou *peers*

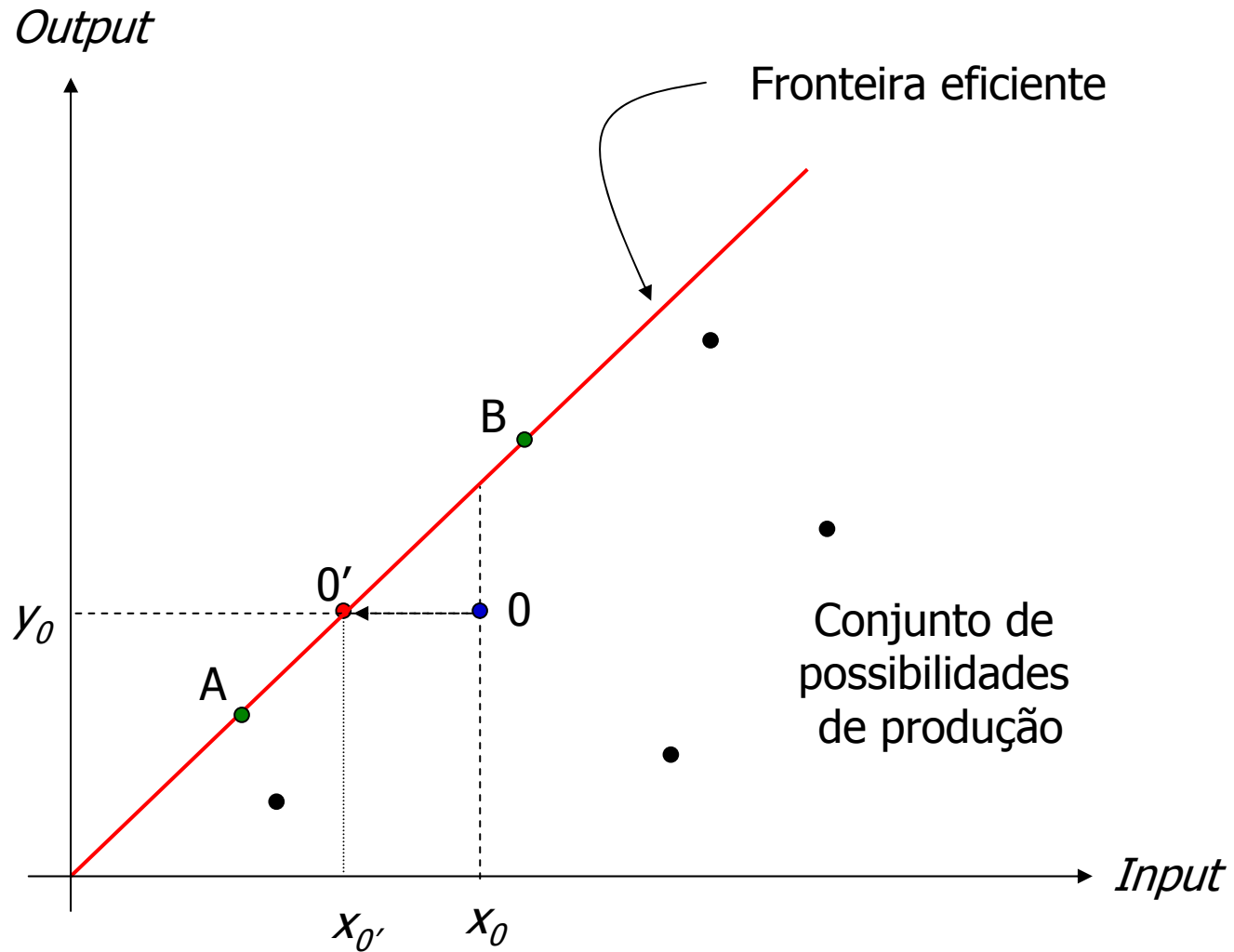
Exemplo 2 *inputs*, 1 *output*



Modelo DEA CCR

- Modelo primal → Modelo dos Multiplicadores
 - Determina conjunto ótimo de pesos (*tradeoffs*)
 - ◆ n° de restrições = n° de DMUs + 1
 - ◆ n° de variáveis = n° de *inputs* + n° de *outputs*
- Modelo dual → **Modelo do Envelope**
 - Menor n° de restrições - implementação computacional mais fácil
 - ◆ n° de restrições = n° de *inputs* + *output*
 - ◆ n° de variáveis = n° de DMUs + 1
 - Determina quais unidades eficientes que servem de referência para as ineficientes (*mix*) e a eficiência

Modelos DEA CCR/*Inputs*



Resultados do modelo DEA CCR

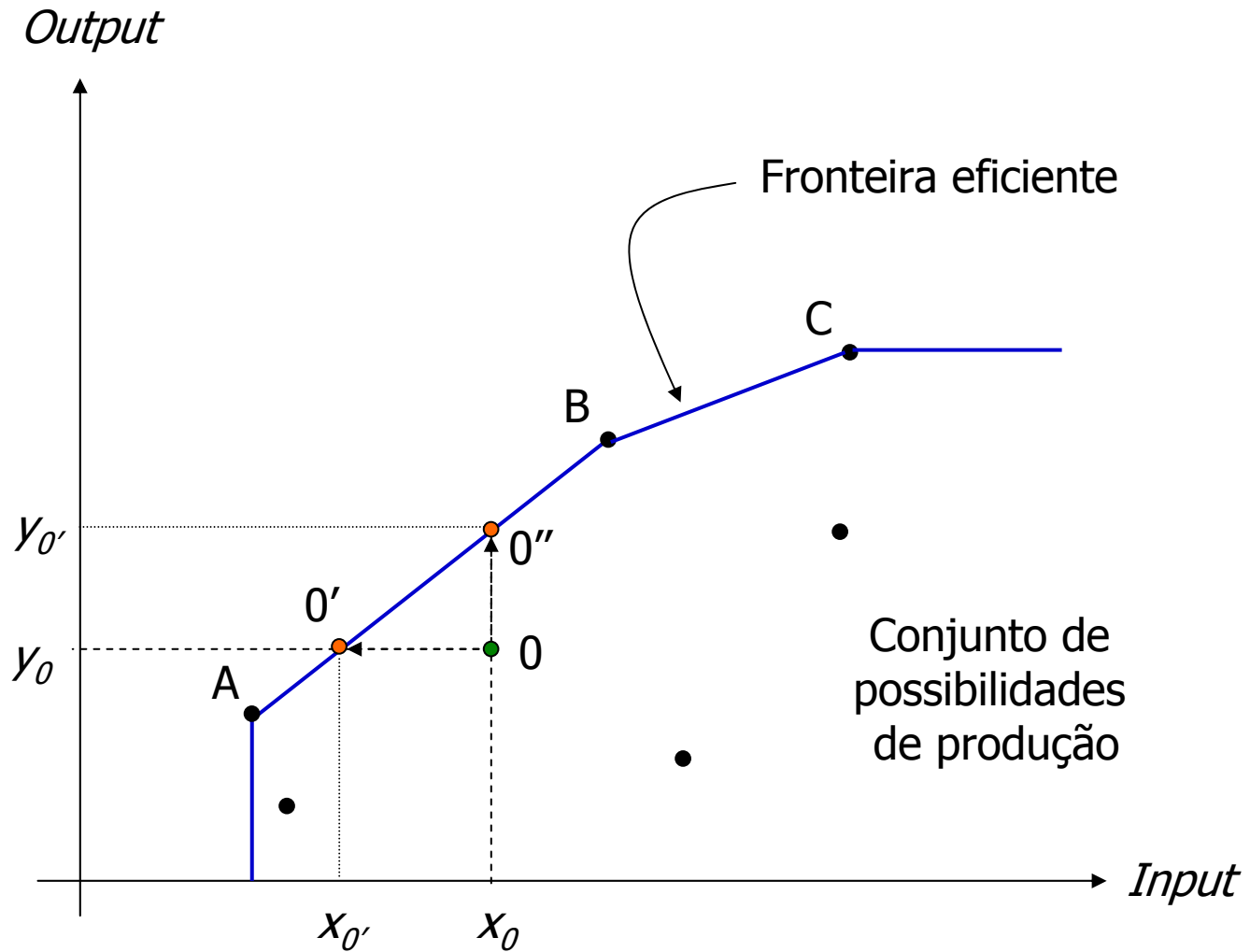
- Eficiência
- Pesos/multiplicadores
- Unidades de referência/*benchmarks*
- Intensidade da contribuição de cada unidade de referência na formação do alvo
- Alvos para *inputs/outputs*
- Folgas para *inputs/outputs*

- *Mais importante que avaliar é promover a eficiência, estabelecendo metas (aumentar outputs, reduzir inputs ou ambos)*

Modelo DEA BCC

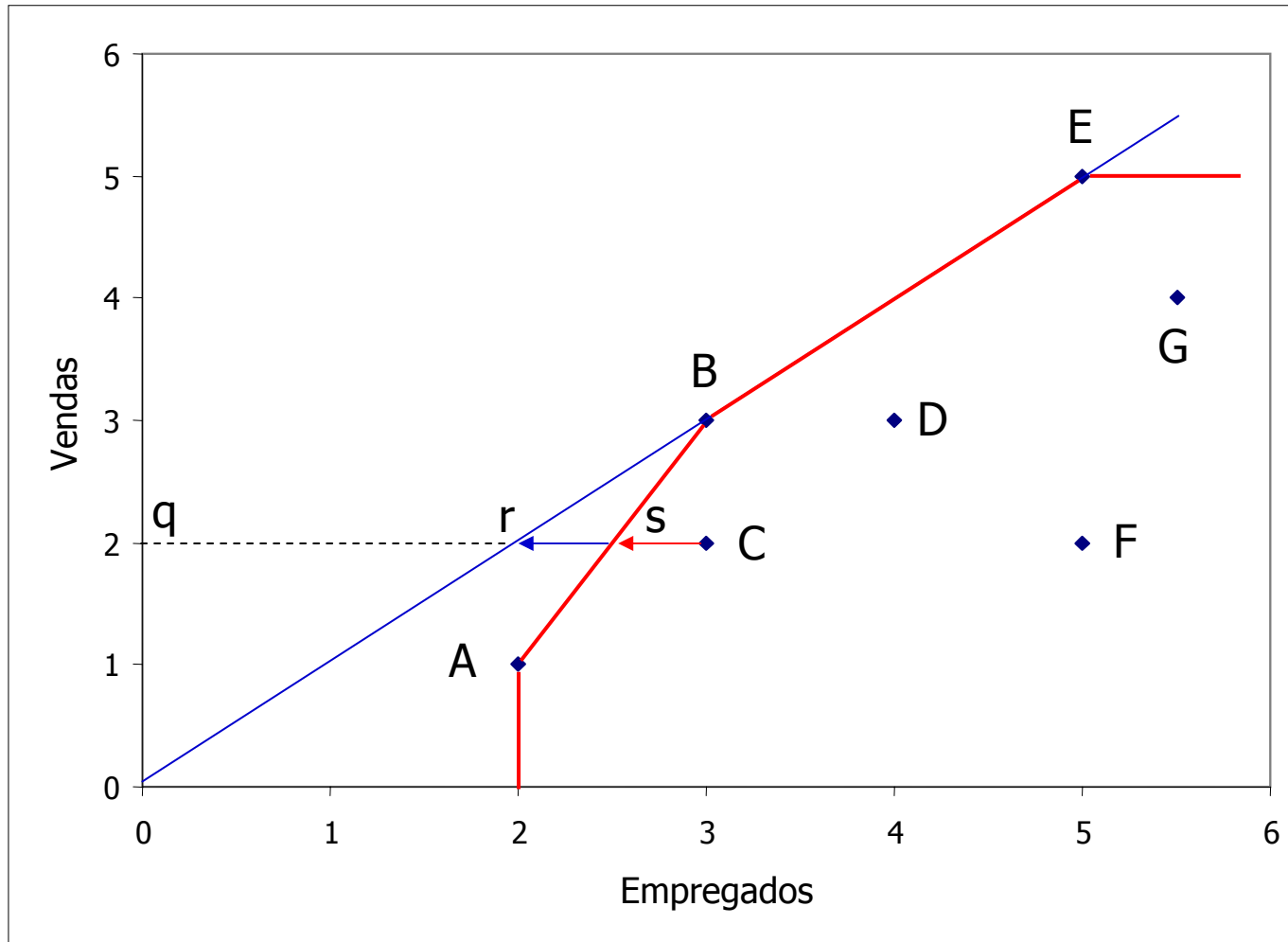
- Modelo CCR
 - Retornos constantes de escala
 - Válido para unidades que operam em escala ótima
- Modelo BCC ou VRS (Banker, Charnes e Cooper, 1984)
 - Substitui o axioma da **proporcionalidade** pelo axioma da **convexidade**
 - Fronteira côncava e linear por partes (*piece-wise linear*) → impropriamente chamado “retornos variáveis de escala”
 - Mais benevolente com as unidades

Modelo DEA BCC



Unidades Pareto-Koopmans eficientes

Modelo DEA BCC



Modelo CCR
Eficiência = qr/qC

Modelo BCC
Eficiência = qs/qC

Modelo DEA BCC/I

Modelo CCR/I

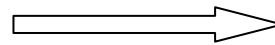
Min h_o

sujeito a

$$h_o x_{io} - \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \geq 0, \forall i$$

$$-y_{jo} + \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq 0, \forall j$$

$$\lambda_k \geq 0, \forall k$$



Modelo BCC/I

Min h_o

sujeito a

$$h_o x_{io} - \sum_k x_{ik} \lambda_k \geq 0, \forall i$$

$$-y_{jo} + \sum_k y_{jk} \lambda_k \geq 0, \forall j$$

$$\sum_k \lambda_k = 1$$

$$\lambda_k \geq 0, \forall k$$

Modelagem em DEA

- Escolha do modelo
 - Comparação de tamanho das DMUs
 - Geometria da superfície de “envelopamento” dos dados, que tem relação com as medidas de eficiência
 - Projeções de eficiência, ou seja, o caminho das DMUs ineficientes até a fronteira de eficiência
 - ◆ CCR, BCC etc.
 - ◆ Orientação a *inputs*, a *outputs*, não orientado etc.

Modelagem em DEA

- Escolha do modelo
- Escolha das DMUs
- Pré escolha das variáveis → propriedades dos modelos
 - Invariância com a escala de medida
 - Melhor relação *output i* e *input j* é eficiente
 - Maior *output* ou menor *input*: eficiente no BCC
 - BCC é invariante a translações a *output* quando é orientado a *input* e vice-versa

Modelos DEA avançados

- Modelos DEA com restrições aos pesos
 - Incorpora julgamentos de valor do decisor em relação à importância relativa e *inputs* e/ou *outputs*
 - Restrições diretas
 - Restrições a *inputs* e *outputs* virtuais
 - Região de segurança

Modelos DEA avançados

- Avaliação cruzada
 - Usa DEA como avaliação de conjunto e não como auto-avaliação
 - Cada DMU é avaliada segundo o esquema de pesos ótimos das outras DMUs
 - Média das eficiência é a eficiência cruzada
 - Resultado é uma avaliação que considera a “média” do ponto de vista das outras DMUs
- Avaliação pela média dos pesos

Modelos DEA Avançados

- Fronteira Invertida (Leta et al., 2005)
 - Inversão dos *inputs* com os *outputs*
 - Representa uma visão pessimista em oposição a uma visão otimista do DEA clássico
 - Índice geral é a média entre eficiência clássica e o complemento da eficiência invertida
 - Bom índice significa que “a DMU é bem avaliada no que é melhor e não é mal avaliada no que é pior”

Modelos DEA avançados

- Modelos DEA com extensão de faces (Gonzalez-Araya, 2003)
- Modelo DEA Multiobjetivo (Angulo-Meza, 2002)
- Suavização da fronteira DEA (Soares de Mello, 2002)
- Modelos DEA com Ganhos de Soma Zero (Gomes, 2003)
- Modelo DEA Intervalar (Fuzzy-DEA) (Gomes et al., 2004; Soares de Mello et al., 2005)

Aplicações

- Descrição do problema
- Escolha do modelo, variáveis, DMUs etc.
- Técnicas usadas para contornar as deficiências de DMU (restrições aos pesos, fronteira invertida etc.)

Exemplo de Aplicação I

- **Companhias Aéreas** (Soares de Mello et al., 2003)
- **Problemas**
 - Tipo de eficiência a ser medida
 - Uso do modelo BCC colocava a Varig eficiente sem nenhuma avaliação
- **Soluções**
 - Três modelos distintos: Vendas, Operacional e Global
 - Aumentar o número de DMUs → grupos e anos diferentes
- **Resultados** → avaliação temporal e alvos

Exemplo de Aplicação II

- Avaliação das turmas de Calculo I da UFF
(Soares de Mello et al., 2002)
- Objetivo → Comparar turmas de Cálculo I com e sem uso do computador
- Principal problema → quais as variáveis a serem usadas; excesso de variáveis
- *Inputs* ligados a nível dos alunos na entrada e recursos usados
- *Outputs* ligados a nível dos alunos na saída

Exemplo de Aplicação II

- Duas técnicas usadas
 - Restrições ao *input* e *output* virtual com o auxílio do MACBETH (subjetivo)
 - Método multicritério de seleção de variáveis (objetivo)
- Resultados
 - Grande consistência entre os dois métodos
 - Turmas sem o auxílio do computador são mais eficientes
 - Nível dos alunos na saída melhor avaliado pela nota de Cálculo II

Exemplo de Aplicação III

- Olimpíadas
- Objetivos
 - Eficiência dos países em conquistar medalhas considerando os recursos (Gomes et al., 2003)
 - *Ranking* olímpico puro, sem supervalorização da medalha de ouro (Soares de Mello et al., 2004)
- Problemas
 - Soma dos *outputs* é constante
 - Modelo DEA de *input* unitário → excesso de pesos nulos

Exemplo de Aplicação III

■ Soluções

- Desenvolvimento do modelo DEA-GSZ
- Modelo modificado da avaliação cruzada com restrições aos pesos

■ Resultados

- Classificação olímpica

■ Novos desenvolvimentos

- Considerar a modalidade em que a medalha foi obtida

Exemplo de Aplicação IV

- Avaliação estática de tornos mecânicos
- Objetivo → classificar os tornos de acordo com desvios de paralelismo
- Modelo de *output* unitário
- Problema → número de DMUs muito pequeno em relação à quantidade de variáveis
- Solução → comparar vários modelos de aumento de discriminação (restrições diretas aos pesos, supereficiência, avaliação cruzada e fronteira invertida)
- Resultados → obtenção do melhor torno na visão otimista e pessimista

Exemplo de Aplicação V

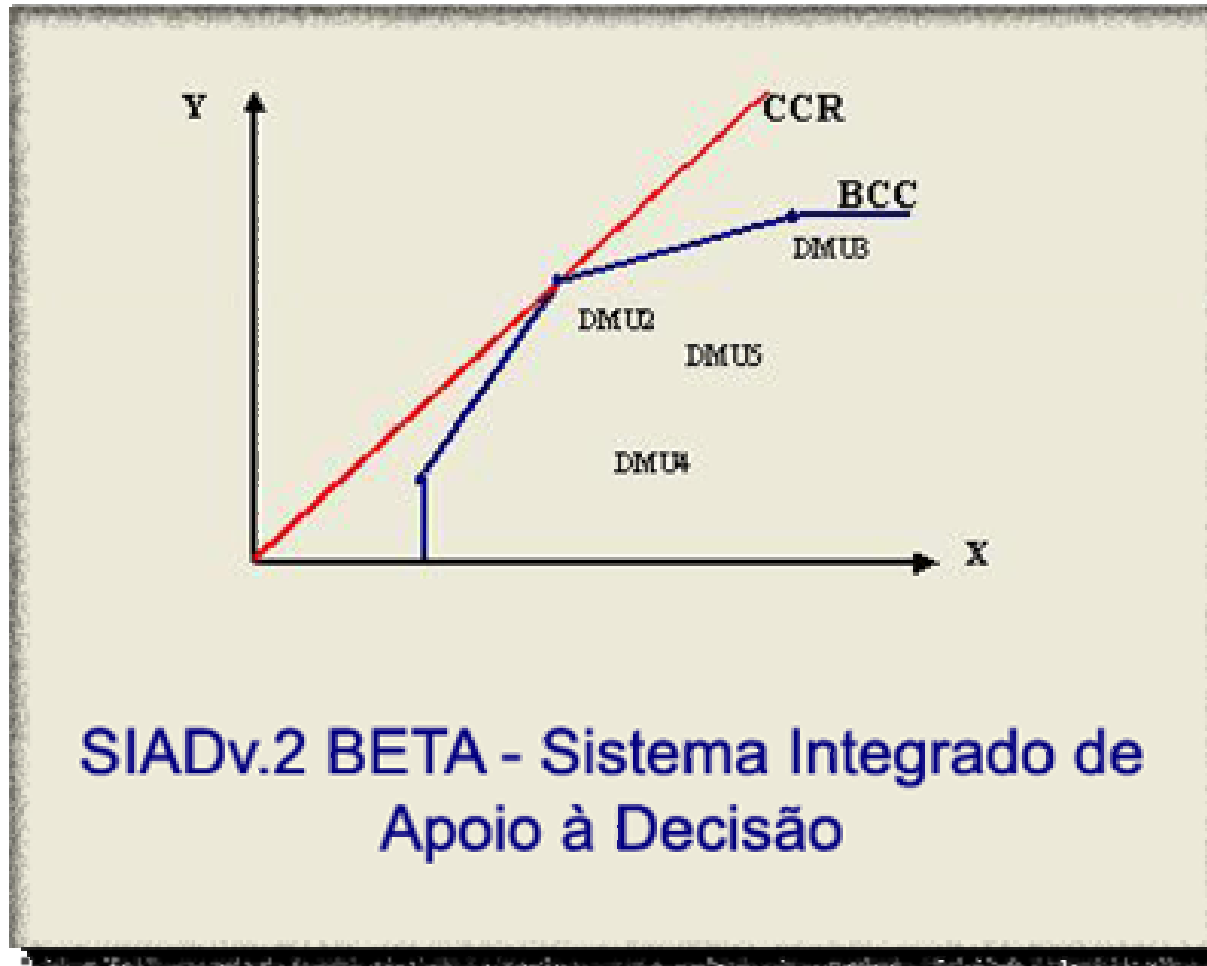
- Redistribuição de emissões de CO₂ (Gomes, 2003; Macedo, 2005)
- Ao contrário dos outros, não se limita a fazer uma classificação; estabelece uma política a ser seguida por vários países
- Proposta → em vez do corte linear do Protocolo de Kyoto, usar dados socioeconômicos e geográficos dos países
- Técnica → uniformização da fronteira DEA-GSZ

Software

- **SIAD – Software Integrado de Apoio à Decisão**
(<http://www.uff.br/decisao>)
- **EMS**
(<http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsfg/or/scheel/ems/>)
- **DEAP**
(<http://www.uq.edu.au/economics/cepa/deap.htm>)
- **Frontier Analyst**
(<http://www.banxia.com>)
- **IDEAL**
(<http://pepserv.pep.ufrj.br/~dea/>)

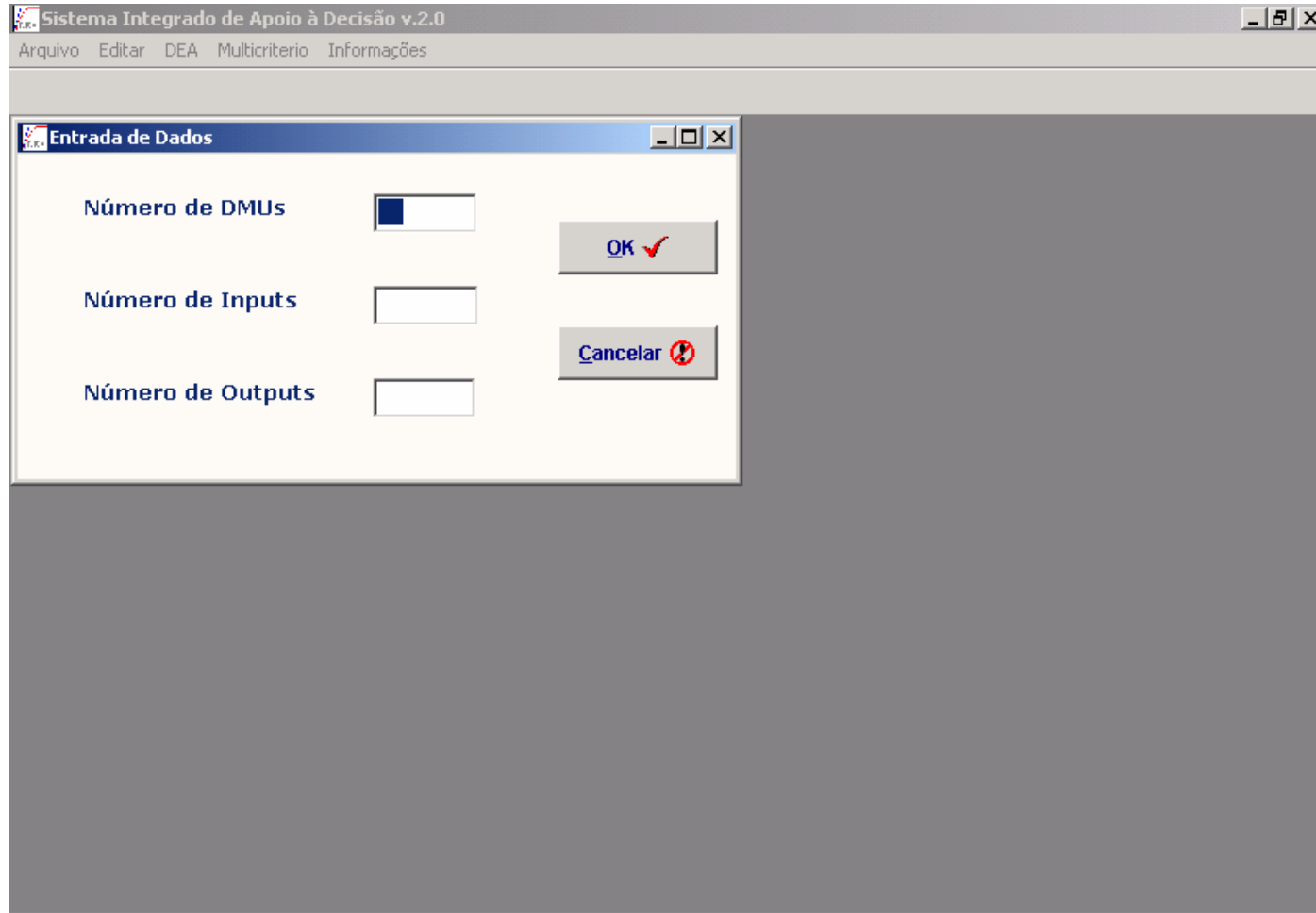
SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão

- (<http://www.uff.br/decisao>)



SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão

- (<http://www.uff.br/decisao>)



SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão

- (<http://www.uff.br/decisao>)

The screenshot displays the 'Sistema Integrado de Apoio à Decisão v.2.0' application window. The main menu includes 'Arquivo', 'Editar', 'DEA', 'Multicriterio', and 'Informações'. The active window is 'Entrada de Dados', which contains a 'Matriz de Dados' table and several control panels.

DMUs	INPUT	Output1	Output2
DMU1	4,000000	10,000000	8,000000
DMU2	1,000000	5,000000	9,000000
DMU3	2,000000	7,000000	10,000000
DMU4	1,000000	8,000000	11,000000
DMU5	6,000000	6,000000	15,000000

Control panels on the right side of the window:

- Modelo:** CCR (CRS)
- Orientação:** Input
- Avançado:** Nenhum

Buttons at the bottom of the window: Editor, Salvar, Cancelar, Calcular, and Multicritério.

SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão

- <http://www.uff.br/decisao>

The screenshot displays the 'Sistema Integrado de Apoio à Decisão v.2.0' interface. The main window, titled 'Resultados', shows the following data:

	Padrão	Invertida	Composta	Composta*
DMU1	0,312500	1,000000	0,156250	0,174320
DMU2	0,818182	0,265625	0,776278	0,866052
DMU3	0,454545	0,459459	0,497543	0,555082
DMU4	1,000000	0,207317	0,896341	1,000000
DMU5	0,227273	1,000000	0,113636	0,126778

On the right side of the interface, there are several interactive buttons: 'Fronteira Invertida', 'Fronteira padrão', 'Pesos', 'Benchmarks', and 'Alvos e Folgas'. At the bottom right, there are 'Voltar' and 'Salvar' buttons. A note at the bottom center states '*Eficiência Normalizada'.

SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão

- <http://www.uff.br/decisao>

The screenshot displays the 'Sistema Integrado de Apoio à Decisão v.2.0' application. The main window is titled 'Entrada de Dados' and contains a 'Matriz de Dados' table. A dialog box titled 'Opções Avançadas' is open over the table, allowing configuration of constraints and normalization options.

DMUs	INPUT	Output
DMU1	4,000000	10,000000
DMU2	1,000000	5,000000
DMU3	2,000000	7,000000
DMU4	1,000000	8,000000
DMU5	6,000000	6,000000

Opções Avançadas

Tipo de Restrição

- Região de Segurança
- Virtuais

Número de Restrições:

Normalização

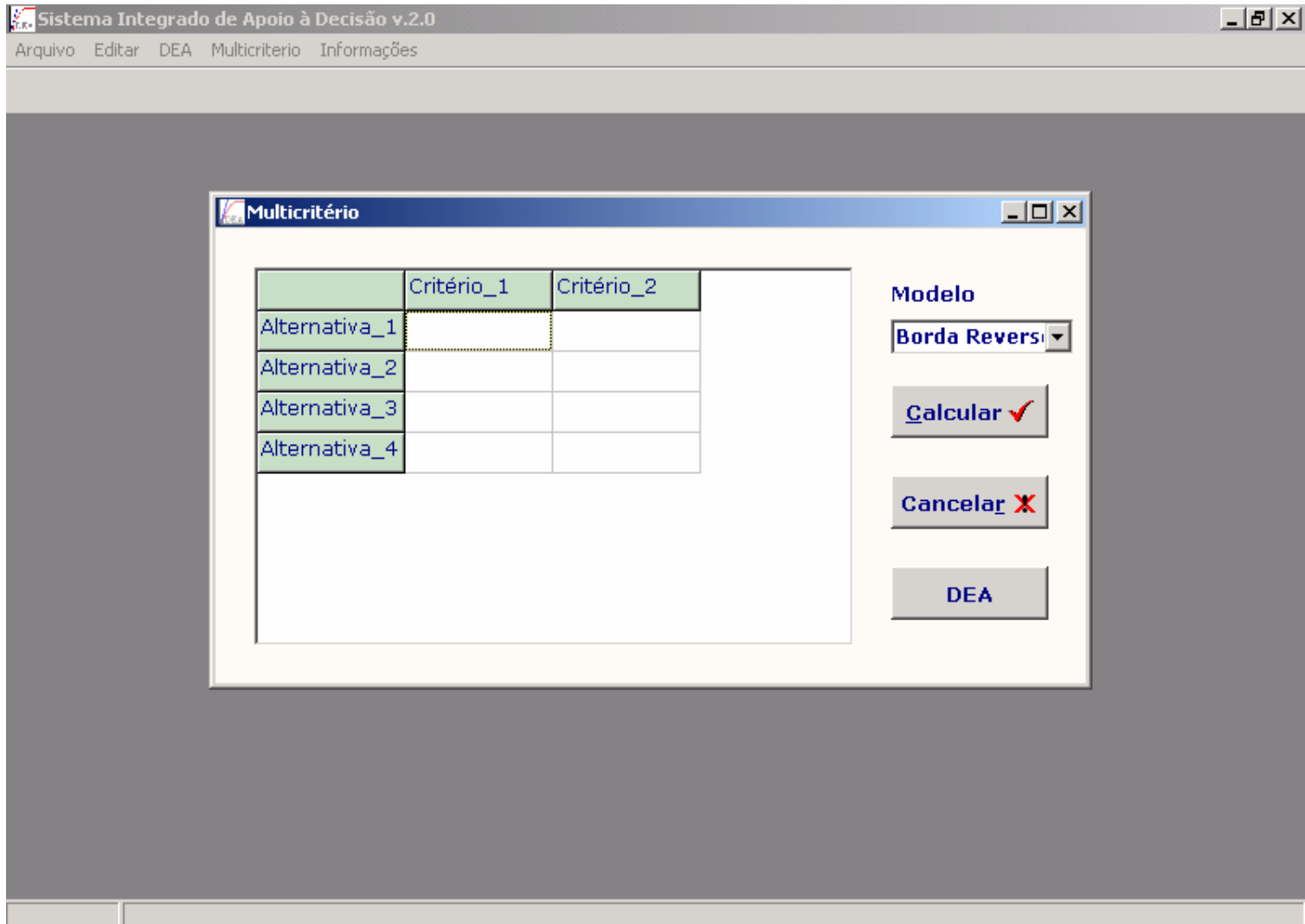
- Não
- Sim

Buttons: Cancelar X, Ok ✓

Bottom navigation buttons: Editor, Salvar, Cancelar X, Calcular ✓, Multicritério

SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão

- <http://www.uff.br/decisao>



Tópicos em desenvolvimento

- Aplicações
 - Eficiência de portos
 - Distorção harmônica
 - Refino de petróleo
 - Eficiência agrícola
 - Vagas docentes
- Teóricos
 - DEA GSZ não radial
 - Eficiência Vetorial
 - Paradoxos em DEA
 - etc.

Obrigado!

<http://www.uff.br/decisao>

