

EFICIÊNCIAS NEGATIVAS EM MODELOS DEA-BCC: COMO SURGEM E COMO EVITA-LAS

Lidia Angulo Meza

Departamento de Ciências dos Materiais – Universidade Federal Fluminense
Av. dos Trabalhadores 420, Volta Redonda, RJ
lidia_a_meza@yahoo.com

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello

Departamento de engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, 24210-240, São Domingos, Niterói, RJ
jcsmello@producao.uff.br

Eliane Gonçalves Gomes

Embrapa Monitoramento por Satélite
Av. Dr. Júlio Soares de Arruda, 803, 13088-300, Parque São Quirino, Campinas, SP
eliane@cnpm.embrapa.br

Luiz Biondi Neto

Departamento de Eletrônica e Telecomunicações – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Rua São Francisco Xavier, 524, Bl. E, Sala 5025, 20550-900, Maracanã, Rio de Janeiro, RJ
lbiondi@uerj.br

Resumo

Neste artigo mostra-se que o modelo DEA-BCC tem a possibilidade de gerar eficiências negativas em determinadas situações. Apresenta-se a origem dessa falha e é proposta uma restrição adicional que corrige o problema. Esta restrição é interpretada geométrica e algebricamente e é exemplificada numericamente.

Palavras-chave: DEA, Eficiências negativas, Modelo BCC.

Abstract

In this paper it's shown that the DEA-BCC model allows, under certain conditions, the existence of negative efficiencies. We present how this failure appears and we propose an additional constraint in order to solve that problem. We build a geometrical and algebraical interpretation of such constraint and we also present a numerical example.

Keywords: DEA, Negative efficiencies, BCC Model.

1. INTRODUÇÃO

Como é amplamente conhecido, os modelos DEA, tais como o CCR (Charnes et al, 1978) e o BCC (Banker et al, 1984), permitem duas formulações duais (Estellita Lins e Angulo-Meza, 2000) e, portanto, equivalentes. A formulação dos multiplicadores do modelo CCR estabelece que os pesos ou multiplicadores das variáveis devem ser calculados de forma a maximizar a eficiência de cada DMU. É imposta a restrição de que esses pesos quando aplicados às outras DMUs não podem gerar eficiências maiores do que 1 (considerando a orientação a input). Como existe a restrição padrão de que os multiplicadores são todos não negativos, e como os valores dos inputs e outputs são também não negativos, os pesos de uma DMU aplicados a qualquer outra fornecem um índice de eficiência contido no intervalo $[0,1]$.

No caso do modelo BCC, o modelo dos multiplicadores é obtido através do dual do modelo do envelope. Como este modelo tem uma restrição de igualdade, existe uma variável livre no modelo dos multiplicadores e, portanto, não se pode garantir a não negatividade dos índices de eficiência quando os pesos de uma DMU são utilizados para outra, em situações tipo Avaliação Cruzada (Soares de Mello, 2002; Soares de Mello et al., 2002, 2004) ou em alguns índices de eficiência não radial (Angulo-Meza, 2002; Angulo-Meza et al., 2003). A seguir é demonstrado numericamente este problema e como contorna-lo.

2. EFICIÊNCIAS NEGATIVAS NO MODELO BCC

O modelo DEA-BCC dos multiplicadores orientado a inputs é apresentado em (I)

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \mu_0}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \mu_0}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \\
 & v_i, \mu_r \geq 0, \mu_0 \in \mathfrak{R}
 \end{aligned} \tag{I}$$

Onde os μ_r são os multiplicadores não negativos dos outputs, os v_i são os multiplicadores não negativos dos inputs, y_{rj} é o output r da DMU j , x_{ij} é o input i da DMU j . O termo μ_0 representa o coeficiente linear do hiperplano suporte e pode assumir qualquer valor real.

Nas restrições, que aplicam os pesos da DMU em análise às outras DMUs, o primeiro termo tem o sinal determinado pelo numerador. Caso o μ_0 seja suficientemente negativo, este termo poderá ser negativo.

Para caso de apenas um output, Soares de Mello (2002) mostra que os pesos de uma DMU o_1 aplicados à DMU o_2 geram eficiência negativa se o *output* da DMU o_2 for menor que $-\mu_0/\mu$ da o_1 .

A Tabela 1 apresenta os dados, os multiplicadores e as eficiências que ilustram a situação anteriormente descrita.

Tabela 1. Dados do exemplo numérico.

DMU	I1	O1	Pesos			Eff
			v1	u1	u0	
A	4	10	0,250	0,375	-2,75	1,000
B	1	5	1,000	0,000	1,000	1,000
C	2	7	0,500	0,000	0,500	0,500
D	1	8	1,000	0,125	0,000	1,000
E	6	6	0,167	0,000	0,16667	0,167

É importante ressaltar que, como para as DMUs eficientes existem múltiplos pesos ótimos, foram apresentados os primeiros pesos encontrados pelo solver utilizado, o SIAD (Angulo-Meza et al., 2003, 2004). Como pode ser observado, o μ_0 da DMU A é negativo. Como seu μ_1 é 0,375 quando seus multiplicadores forem aplicados às outras DMUs, geraram eficiências negativas para DMUs que tenham output inferior a 7,333, ou seja as DMUs B, C e E.

A Tabela 2 apresenta as eficiências das DMUs quando calculadas como os pesos das outras DMUs, uma situação semelhante à Avaliação Cruzada.

Tabela 2. Matriz tipo Avaliação Cruzada para o exemplo numérico.

	A	B	C	D	E
A	1,000	-3,500	-0,250	1,000	-0,333
B	0,250	1,000	0,500	1,000	0,167
C	0,250	1,000	0,500	1,000	0,167
D	0,313	0,625	0,438	1,000	0,125
E	0,250	1,000	0,500	1,000	0,167

Nesta tabela, a coluna indica a DMU avaliada utilizando os pesos da DMU da linha correspondente. Assim, a DMU B avaliada com os pesos da DMU A tem uma eficiência $-3,5$. Este é um resultado que não tem interpretação na teoria clássica de eficiência (Coelli et al., 1998).

3. MODELO PROPOSTO

Como já foi indicado na introdução, as eficiências negativas surgem pelo fato de a restrição do modelo DEA-BCC orientado a input apenas impõe que os pesos de uma DMU aplicados a outras gerem eficiências não superiores a 1. Como uma das variáveis é livre e números negativos são evidentemente inferiores a 1, não há impedimento para surgirem eficiências negativas.

Este problema é facilmente resolvido com restrições adicionais que os pesos de uma DMU aplicadas a outra gerem eficiências maiores ou iguais a zero. Este modelo chamado DEA-BCC orientado à input corrigido é apresentado em (2).

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \mu_0}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \\
 & \text{sujeito a} \\
 & 0 \leq \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \mu_0}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \\
 & v_i, \mu_r \geq 0, \mu_0 \in \Re
 \end{aligned} \tag{2}$$

Aplicando este modelo ao exemplo numérico apresentado na Tabela 1, são obtidos os resultados apresentados na Tabela 3.

Tabela 3. Exemplo numérico para o modelo DEA-BCC corrigido.

DMU	I1	O1	Pesos			Eff
			v1	u1	u0	
A	4	10	0,250	0,083	-0,417	0,417
B	1	5	1,000	0,000	1,000	1,000
C	2	7	0,500	0,000	0,500	0,500
D	1	8	1,000	0,000	1,000	1,000
E	6	6	0,167	0,000	0,167	0,167

Observa-se que o modelo corrigido apenas alterou a eficiência da DMU A, por ser a única que gerava eficiências negativas, quando seus pesos eram aplicados às outras. De fato, o termo $-\mu_0/\mu_1$ da DMU A é igual a 5 que o menor dos outputs das outras DMUs. A matriz tipo Avaliação Cruzada para o modelo DEA-BCC corrigido é apresentada na tabela 4.

Tabela 4. Matriz tipo Avaliação Cruzada para o modelo DEA-BCC corrigido.

	A	B	C	D	E
A	0,417	0,000	0,333	1,000	0,056
B	0,250	1,000	0,500	1,000	0,167
C	0,250	1,000	0,500	1,000	0,167
D	0,250	1,000	0,500	1,000	0,167
E	0,250	1,000	0,500	1,000	0,167

Observa-se que todas as avaliações feitas por todas as DMUs, e, em especial, as da DMU A, geram eficiências entre 0 e 1. É interessante observar que a DMU B avaliada pela DMU A tem eficiência 0, o que significa que a restrição de não negatividade referente à DMU B foi a restrição ativa no modelo DEA-BCC orientado a input corrigido da DMU A.

4. INTERPRETAÇÃO DA RESTRIÇÃO ADICIONAL

Como as restrições de não negatividade são, na verdade, restrições aos pesos, elas podem ser substituídas por uma ou mais DMUs artificiais (Gonçalves, 2003). Como a DMU A foi a única que teve a eficiência alterada, a fronteira correspondente ao modelo corrigido é obtida com a introdução de uma DMU com o mesmo output da DMU A e input igual ao quociente entre o input da DMU A e a sua eficiência no modelo corrigido segundo Gonçalves et al (2001). Efetuando-se o cálculo, a DMU artificial tem output 10 e input 1,667.

Na Figura 1, apresentam-se as duas fronteiras, o traço em preto representa a parte da fronteira comum aos dois modelos, o traço contínuo é o referente ao modelo original e o traço interrompido representa a fronteira do modelo corrigido.

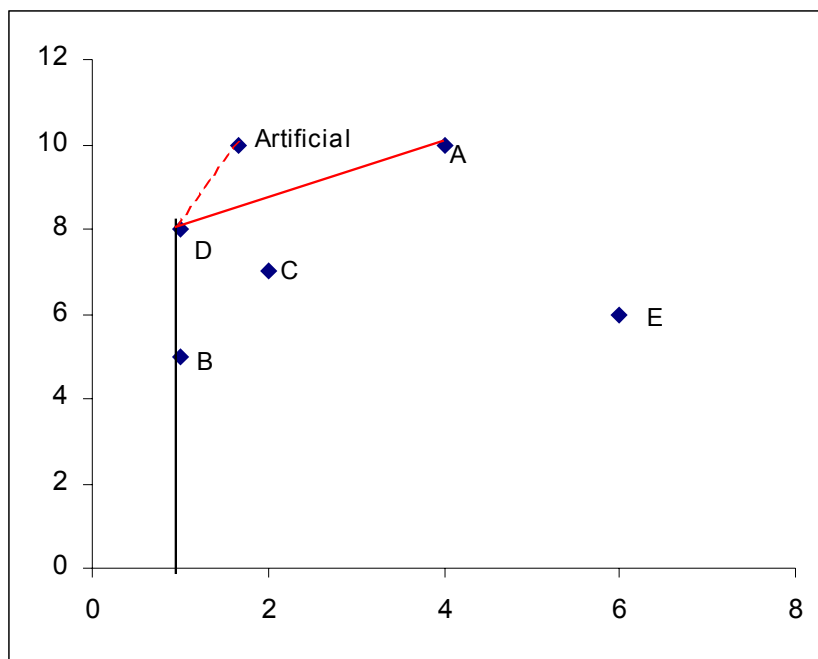


Figura 1. Fronteiras do modelo original e do modelo corrigido.

Observa-se que foi mantida a convexidade da fronteira. Como será visto adiante, isso nem sempre acontece. Para justificar esta afirmação é necessária uma interpretação algébrica da restrição adicional, o que é feito através do dual do modelo corrigido apresentado em (3)

Min θ

sujeito a

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda'_j \geq y_{r0}, r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta x_{i0}, i = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j + \sum_{j=1}^n \lambda'_j = 1, j = 1, \dots, n$$

$$\lambda_j, \lambda'_j \geq 0, \forall j$$

Observa-se que as restrições adicionais, uma para cada DMU, geram igual número de variáveis de decisão adicionais λ' . Ressalta-se que quando o somatório de todos os λ' não for igual a 0, o somatório dos λ não será unitário e, portanto, não haverá garantia de convexidade no modelo corrigido.

Pelo teorema das folgas complementares, o produto de λ' pela folga da restrição que lhe deu origem deve ser 0. Em consequência, λ' só podem ser diferente de zero se a folga na restrição adicional for 0, ou seja se a restrição estiver ativa.

No exemplo numérico apresentado, só a DMU tinha a eficiência alterada e era a restrição relativa à DMU B que provocava essa alteração. Assim, com exceção do λ'_B para a DMU A, todos os outros λ' são nulos.

5. CONCLUSÕES

Neste artigo mostrou-se que o modelo DEA-BCC orientado a input pode gerar situações paradoxais, devido à existência de eficiências negativas. Mostrou-se ainda que uma pequena alteração intuitiva no modelo dos multiplicadores corrige essa situação. No entanto,

esta pequena alteração no modelo dos multiplicadores gera uma profunda alteração no modelo dual, o modelo do envelope. Esta alteração provoca alterações da fronteira e, em casos extremos, pode chegar a provocar perda de convexidade.

Finalmente, deve se observar que as situações aqui apresentadas não se aplicam ao modelo CCR nem ao modelo BCC orientado a outputs.

6. BIBLIOGRAFIA

Angulo-Meza, L. (2002). Um Enfoque Multiobjetivo para Determinação de Alvos na Análise Envoltória de Dados. Tese de Doutorado. Engenharia de Produção. COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro.

Angulo-Meza, L., Biondi, L.N., Coelho, P.H.G., Estellita-Lins, M.P. (2003). Índices de Eficiência não Radiais em Modelos Multiobjetivo para Determinação de Alvos em DEA. Anais do XXXV SBPO. Natal.

Angulo-Meza, L., Biondi, L.N., Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Coelho, P.H.G. (2003) SIAD - Sistema Integrado De Apoio À Decisão: Uma Implementação Computacional De Modelos De Análise De Envoltória De Dados. Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção. Vol. 3, n. 20. Disponível em: http://www.producao.uff.br/rpep/relpesq303/relpesq_303_20.doc

Angulo-Meza, L., Biondi, L.N., Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Coelho, P.H.G. (2004) FSDA-Free Software for Decision Analysis (SLAD- Software Livre de Apoio à Decisão): A software package for Data Envelopment Analysis Models). Memórias del XII Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación de Operaciones y Sistemas. La Habana.

Banker, R.D., Charnes, A. & Cooper, W.W. (1984). Some Models For Estimating Technical Scale Inefficiencies In Data Envelopment Analysis. *Management Science*, vol. 30, n.9, 1078-1092.

Charnes, A., Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, vol. 2, pp. 429-454.

Coelli, T., Rao, D.S.P. Battese, G.E. (1998). An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. Eds.Kluwer Academic Publishers.

Estellita-Lins, M.P., Angulo-Meza, L. (2000). *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão*. Editora da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Gonçalves, D. A. (2003). Condições de Equivalência entre Restrições aos Pesos e DMU não Observada em DEA. Tese de Doutorado. Engenharia de Produção. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Gonçalves, D. A., Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Biondi, L.N. (2001). Atribuição de restrições aos índices de eficiência de DMUs com outputs indesejáveis. Anais do XXXIII SBPO, Campos do Jordão.

Soares de Mello, J.C.C.B. (2002). Suavização da Fronteira DEA com Métodos Variacionais. Tese de Doutorado. Engenharia de Produção. COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro.

Soares de Mello, J.C.C.B., Estellita-Lins, M.P., Gomes, E.G. (2002). Construction of a Smoothed DEA Frontier. *Pesquisa Operacional*, vol. 22, pp. 183-201.

Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo-Meza, L., Gomes, E.G., Biondi, L.N. (2004). Paradoxos em modelos DEA-BCC. Actas do IO 2004, pp. 62. Porto.