

UMA ABORDAGEM NUMÉRICA DE DOIS ALGORITMOS UTILIZADOS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS LINEARES DE DOIS NÍVEIS

Joviana Sartori de Souza
Universidade Estadual do Norte Fluminense
Av. Alberto Lamego, 2000- Campos dos Goytacazes, RJ
joviana@uenf.br

Gudélia Morales de Arica
Universidade Estadual do Norte Fluminense
Av. Alberto Lamego, 2000- Campos dos Goytacazes, RJ
gudelia@uenf.br

Resumo

A Programação de Dois Níveis (PDN) é uma das áreas ainda muito estudada no campo da otimização, devido às suas propriedades específicas como a não convexidade, que tornam a resolução dos problemas de PDN bem complexa. Além disso, são vários os problemas de aplicação real, que pela sua estrutura hierárquica são formuláveis pela PDN. Um ramo específico da PDN é a Programação Linear em Dois Níveis (PLDN) em que todas as funções envolvidas no problema são lineares. Dois algoritmos que resolvem problemas de PLDN são abordados: o Algoritmo do k-ésimo melhor vértice e o Algoritmo Local, um algoritmo recente na literatura, que se baseia em pontos de equilíbrio. E um exemplo numérico é desenvolvido para se observar os passos que cada algoritmo realiza.

Palavras-chave: Programação de Dois Níveis, pontos de equilíbrio

Abstract

The Bilevel Programming (BP) is one of the areas still very studied in the field of the optimization, which had to its specific properties as not the convexity, that become the resolution of the problems of well complex. Moreover, the problems of real application are several, that for its hierarchic structure are formulated for the BP. A specific branch of the PDN is the Bilevel Linear Programming (BLP) where all the involved functions in the problem is linear. Two algorithms that decide BLP problems are boarded: the Algorithm of k^{th} better vertex and the Local Algorithm, a recent algorithm in the literature, that if bases on equilibrium point. E a numerical example is developed to observe the steps that each algorithm carries through.

Keywords: Bilevel Programming, equilibrium point

1-Introdução

Os problemas modelados pela Programação Linear em Dois Níveis (PLDN) possuem uma estrutura hierárquica e por isso o campo de aplicação real para este tipo de programação é muito extenso. Os problemas de PLDN são constituídos somente por funções lineares e por esta característica é possível utilizar métodos da Programação Linear para a sua resolução. A formulação do problema de PLDN é:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & f_1(x, y) = c_1^T x + c_2^T y \\ \text{s.a} \quad & B_1 x + B_2 y \leq b \\ & x \geq 0, y \text{ solução de} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_y \quad & f_2(x, y) = d_2^T y \\ \text{s.a} \quad & A_1 x + A_2 y \leq a \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Onde os vetores $x, c_1 \in \mathcal{R}^{n_1}$ e $c_2, d_2, y \in \mathcal{R}^{n_2}$, $a \in \mathcal{R}^{m_2}$, $b \in \mathcal{R}^{m_1}$, as matrizes $A_1 \in \mathcal{R}^{m_2 \times n_1}$, $A_2 \in \mathcal{R}^{m_2 \times n_2}$, $B_1 \in \mathcal{R}^{m_1 \times n_1}$ e $B_2 \in \mathcal{R}^{m_1 \times n_2}$.

Neste artigo é considerado no primeiro nível apenas a restrição de não-negatividade do vetor x . Tal problema chamar-se-á PLDNP:

$$\begin{aligned} \text{(PLDNP)} \quad & \min_{x,y} \quad f_1(x, y) = c_1^T x + c_2^T y \\ \text{s.a} \quad & x \geq 0, y \text{ solução de} \\ & \min_y \quad f_2(x, y) = d_2^T y \\ \text{s.a} \quad & A_1 x + A_2 y \leq a \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

A complexidade destes problemas está no fato da sua região viável não ser convexa e às vezes desconexa, Arica (1995), Campêlo (1999), Dantas (1998), Vicente (1992).

Os algoritmos aqui abordados para a resolução do problema (PLDNP) são: o Algoritmo k -ésimo melhor vértice proposto por Bialas e Karwan (1984) e o Algoritmo Local proposto por Campêlo (1999), Campêlo e Scheimberg (2002), ambos utilizam o Método Simplex na sua estrutura. As Seções 2 e 3 abordam estes algoritmos, a Seção 4 apresenta um exemplo numérico com a resolução detalhada encontrada por estes algoritmos e as conclusões finais são apontadas na Seção 5.

2- O Algoritmo k -ésimo melhor vértice

Este algoritmo é baseado em métodos enumerativos dos pontos extremos, uma vez que em um problema de PLDN a solução ótima se existir, encontra-se em um ponto extremo da sua região viável, Campêlo (1999), Bialas e Karwan (1984), Dantas (1998), Vicente (1992).

A aplicação deste algoritmo está condicionada aos casos em que o conjunto viável (W) do problema relaxado (PR) é limitado (onde o modelo do problema (PR) é o modelo do problema de PLDN sem a função objetivo do segundo nível) e o problema do segundo nível constitui uma aplicação unívoca.

A formulação do Problema Relaxado e do problema do segundo nível são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{(PR)} \quad & \min_{x,y} \quad f_1(x, y) = c_1^T x + c_2^T y \\ \text{s.a} \quad & A_1 x + A_2 y \leq a \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{S}(x) \quad & \min_y \quad f_2(x, y) = d_2^T y \\ \text{s.a} \quad & A_2 y \leq a - A_1 x \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Nota-se que $S(x)$ consiste em um problema paramétrico controlado pelo vetor x .

O algoritmo encontra um ótimo global para o problema em um número finito de iterações, uma vez que é provado por Bialas e Karwan (1984) que é finito o número de bases a explorar. O objetivo deste algoritmo é o de obter a solução ótima do problema de PLDN entre os vértices do problema (PR).

Algoritmo k-ésimo melhor vértice

Passo 1: Solucione o Problema Relaxado através do Método Simplex encontrando uma solução (x_1, y_1) .

$i \leftarrow 1$

$U = \{(x_i, y_i)\}$ e $\bar{U} = \emptyset$

Passo 2: Solucione o problema do segundo nível $S(x_i)$ encontrando y_i^* .

Se $y_i^* = y_i \Rightarrow (x_i, y_i) \in \Psi$ (conjunto viável do problema de PLDN) e é solução ótima do problema (PLDNP), pare com $k = i$.

Caso contrário vá para o passo 3.

Passo 3: Seja U_i o subconjunto de vértices extremos de W que são adjacentes a (x_i, y_i) e tais que: $f_1(x, y) \leq f_1(x_i, y_i)$.

$\bar{U} = \bar{U} \cup \{(x_i, y_i)\}$ e $U = (U \cup U_i) \setminus \bar{U}$

Vá para o passo 4.

Passo 4:

$i \leftarrow i+1$

Escolha (x_i, y_i) tal que: $f_1(x_i, y_i) = \min_{(x,y) \in U} f_1(x, y)$

Volte para o passo 2.

Observação:

U representa o conjunto de vértices a avaliar e \bar{U} o conjunto de vértices já avaliados.

Ou seja, supondo $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_j, y_j)$ uma ordenação dos vértices de W onde $f_1(x_1, y_1) \leq f_1(x_2, y_2) \leq \dots \leq f_1(x_j, y_j)$, solucionar o problema (PLDNP) equivale a determinar o menor índice k tal que (x_k, y_k) pertença ao conjunto viável (Ψ) do problema (PLDNP).

3- Algoritmo Local

O Algoritmo Local proposto por Campêlo (1999), Campêlo e Scheimberg (2002), baseia-se em um problema equivalente ao problema (PLDNP) e no conceito de pontos de equilíbrio.

3.1- Problema Equivalente ao problema (PLDNP)

Com o objetivo de transformar o problema (PLDNP) em um problema de um só nível, este é substituído por um problema globalmente equivalente (PE), que consiste em substituir o segundo nível pelas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

O problema (PE) possui a seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
 \text{(PE)} \quad & \min_{x,y} f_1(x, y) = c_1^T x + c_2^T y \\
 & \text{s.a} \quad A_1 x + A_2 y + w = a \\
 & \quad x \geq 0, y \geq 0, w \geq 0 \\
 & \quad A_2^T u - v = -d \\
 & \quad u \geq 0, v \geq 0 \\
 & \quad v^T y = 0, u^T w = 0
 \end{aligned}$$

Pode-se notar que o problema (PE) possui um único nível, mas seu conjunto viável é não linear, devido às restrições de complementaridade das folgas. Uma forma de se contornar este problema é transferir tais restrições para a função objetivo, penalizando-as com um parâmetro $M > 0$. Este método de penalização é utilizado por Campêlo (1999), Anandalingam e White (1990), Önal (1993).

A formulação do problema penalizado é:

$$\begin{aligned}
 P(M) \quad & \min \quad c_1^T x + c_2^T y + M(u^T w + v^T y) \\
 \text{s.a.} \quad & A_1 x + A_2 y + w = a \\
 & x \geq 0, y \geq 0, w \geq 0 \\
 & A_2^T u - v = -d \\
 & u \geq 0, v \geq 0
 \end{aligned}$$

Por facilidade utiliza-se uma notação mais compacta onde as matrizes e o vetor correspondente à função objetivo são representados em blocos:

$$A = [A_1 \ A_2 \ I_{m_2}] \in \mathcal{R}^{m_2 \times n}, D = [0 \ -I_{n_2} \ A_2^T] \in \mathcal{R}^{n_2 \times n}, c^T = (c_1^T, c_2^T, 0) \in \mathcal{R}^n$$

Onde $n = n_1 + n_2 + m_2$, I_j é a matriz identidade de ordem $j \times j$ e 0 é a matriz nula com dimensão apropriada para cada caso.

Desta forma podem-se definir dois conjuntos viáveis:

- $Z = \{z \in \mathcal{R}^n: Az = a, z^T = (x^T, y^T, w^T) \geq 0\}$,

que corresponde ao conjunto viável da formulação primal do problema do segundo nível, mas, como está sendo considerado o problema (PLDNP), tal conjunto representa também o conjunto viável do Problema Relaxado com a inclusão das variáveis de folga.

- $S = \{s \in \mathcal{R}^n: Ds = d, s^T = (0, v^T, u^T) \geq 0\}$,

que corresponde ao conjunto viável do problema dual do segundo nível.

3-2- Pontos de Equilíbrio

A definição de pontos de equilíbrio seguinte é dada por Campêlo (1999).

Definição 4.1.1: Um *ponto de equilíbrio* do problema penalizado $P(M)$ é uma solução (z', s') do problema para o qual $\exists M' \geq 0$ tal que, para cada $M \geq M'$ verifica-se:

$$\min_{s \in S} F_M(z', s) = F_M(z', s') = \min_{z \in Z} F_M(z, s')$$

Onde $F_M(z, s) = c^T z + M s^T z$.

A condição da definição anterior quer dizer que, a partir de um determinado valor de M , o valor da função objetivo do problema $P(M)$ não varia.

Pela proposição 3.3.1 de Campêlo (1999), se (z', s') é um ponto de equilíbrio do problema $P(M)$ então $s'^T z' = 0$, ou seja, um ponto de equilíbrio satisfaz a condição de complementaridade.

Campêlo (1999) sugere dois algoritmos para a obtenção de pontos de equilíbrio. Para introduzir tais algoritmos definem-se dois problemas lineares paramétricos:

$$\begin{aligned}
 P(M, s') \quad & \min \quad c^T z + M s'^T z \\
 \text{s.a.} \quad & z \in Z
 \end{aligned}$$

Onde s' é uma solução viável fixa do conjunto S , ou seja, é uma solução dual viável.

$$\begin{aligned}
 P(M, z') \quad & \min \quad c^T z' + M s^T z' \\
 \text{s.a.} \quad & s \in S
 \end{aligned}$$

Onde z' é uma solução viável fixa do conjunto Z , ou seja, é uma solução primal viável.

O primeiro algoritmo descrito a seguir parte de um ponto viável $s_0 \in S$.

Algoritmo 1

Passo 0 → Se $Z \times S \neq \emptyset$, tome $s_0 \in S$.

Passo 1 → Resolva $P(M, s_0)$, pelo método Simplex big-M. Obtenha uma solução z_0 ou verifique que o problema é ilimitado. No segundo caso, conclua que $P(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$.

Passo 2 → Resolva $P(M, z_0)$ pelo método Simplex, obtendo uma solução s' .

Passo 3 → Resolva $P(M, s')$, pelo método Simplex big-M. Obtenha uma solução z' ou verifique que o problema é ilimitado. No primeiro caso, (z', s') é um ponto de equilíbrio; no segundo, conclua que $P(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$.

E o segundo algoritmo parte de um ponto viável $z_0 \in Z$.

Algoritmo 2

Passo 0 → Se $Z \times S \neq \emptyset$, tome $z_0 \in Z$.

Passo 1 → Resolva $P(M, z_0)$ pelo método Simplex, obtendo uma solução s' .

Passo 2 → Resolva $P(M, s')$, pelo método Simplex big-M. Obtenha uma solução z' ou verifique que o problema é ilimitado. No primeiro caso, (z', s') é um ponto de equilíbrio, no segundo, conclua que $P(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$.

O Algoritmo Local baseia-se na análise das tabelas ótimas de $P(M, z')$ e $P(M, s')$ para verificar se (z', s') é uma solução local ou global para o problema (PLDNP), se não for, o algoritmo fornece uma direção de descida para sair do ponto de equilíbrio, melhorando o valor da função objetivo.

A seguir são apresentados os quadros iniciais e ótimos do método Simplex para os problemas $P(M, s')$ e $P(M, z')$.

Tabela 3.2.1: Tabela inicial do problema $P(M, s')$

	z_B^T	z_{NB}^T	
	A_B	A_{NB}	a
M	$s'_B{}^T$	$s'_{NB}{}^T$	0 → (*)

Onde:

A função objetivo $F_M(z, s') = c^T z + M s'^T z$ é representada por duas linhas;

(*) corresponde ao termo da complementaridade penalizado $s'^T z$;

A matriz A_B corresponde à matriz associada às variáveis básicas, antes de transformá-la em uma matriz I_B , e A_{NB} à matriz associada às variáveis não-básicas.

Considere $I = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto dos índices das variáveis e tome B o conjunto correspondente aos índices das variáveis básicas associadas ao vetor incógnita z , tal que $B \subset I$, e NB o conjunto dos índices das variáveis não-básicas tal que $NB \subset I$.

Tabela 3.2.2: Tabela ótima do problema P(M, s')

	z_B^T	z_{NB}^T	
	I	$A^*_{NB} = A_B^{-1} A_{NB}$	$z'_B = A_B^{-1} a$
M	0	$s^*_{NB}{}^T = s'_{NB}{}^T - s'_B{}^T A^*_{NB}$	$0 = s'_B{}^T z'_B$
	0	$c^*_{NB}{}^T = c_{NB}{}^T - c_B{}^T A^*_{NB}$	$c_B{}^T z'_B$

Observa-se que o termo penalizado trabalha a taxa M de forma implícita e o valor ótimo é zero.

Tabela 3.2.3: Tabela inicial do problema P(M, z')

	s_E^T	s_{NE}^T	
	D_E	D_{NE}	d
M	$z'_E{}^T$	$z'_{NE}{}^T$	0

Onde:

O 1º termo de $F_M(z', s) = c^T z' + Ms^T z'$ é constante; então só se representa a linha da parcela penalizada. O conjunto E corresponde ao conjunto dos índices associados às variáveis básicas em z' e NE corresponde ao conjunto dos índices associados às variáveis não-básicas em z'.

D_E corresponde à matriz associada às variáveis básicas e D_{NE} à matriz associada às variáveis não-básicas.

Tabela 3.2.4: Tabela ótima do problema P(M,z')

	s_E^T	s_{NE}^T	
	I	$D_{NE}^* = D_E^{-1} D_{NE}$	$s'_E = D_E^{-1} d$
M	0	$z_{NE}^{*T} = z'_{NE}{}^T - z'_E{}^T D_{NE}^*$	$0 = z'_E{}^T s'_E$

Com a análise destas tabelas ótimas pode-se verificar se o ponto de equilíbrio será uma solução local ou global do problema (PLDNP).

Como (z', s') é um ponto de equilíbrio, pelo Lema 3.3.3 de Campêlo (1999), chega-se à conclusão de que:

$$s_{NB}^* \geq 0 \quad e \quad z_{NE}^* \geq 0$$

E quando $c_{NB}^* \geq 0$, tem-se que (z', s') é solução do Problema Relaxado (PR) e, logo, solução global do problema (PLDNP). Por outro lado, (z', s') é solução local do problema (PLDNP) se $z_{NE}^* > 0$, ou seja, s' é o único ponto em S complementar a $z' \Rightarrow S(z') = \{s'\}$.

Observação:

O critério de parada utilizado nesta aplicação do Simplex ocorre quando todos os coeficientes de custos reduzidos da função objetivo forem maiores que zero.

Mas se não ocorrer nenhuma dessas duas situações, é abordada a seguir uma maneira de como encontrar direções para sair do ponto de equilíbrio, melhorando o valor da função objetivo. São analisadas as direções extremas, Bazaraa et al (1990), de Z e S, a partir de z' e s' respectivamente. Nota-se que essas direções podem ser obtidas a partir das tabelas ótimas, e são dadas pelas colunas das seguintes matrizes:

$$G_{NB} = \begin{bmatrix} -A_{NB}^* \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times (n-m)} \quad e \quad H_{NE} = \begin{bmatrix} -D_{NE}^* \\ I_{n-n_2} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times (n-n_2)}$$

Onde I_q é a matriz identidade de ordem $q \times q$.

Assume-se por simplicidade que as matrizes G_{NB} e H_{NE} conservam a mesma indexação de A_{NB} e D_{NE} respectivamente.

Tomando $i \in NB$ e $j \in NE$, a coluna G_i de G e a coluna H_j de H podem ser representadas como:

$$G_i = \begin{bmatrix} -A_{NB}^* \\ e_i \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^n \quad e \quad H_j = \begin{bmatrix} -D_{NE}^* \\ e_j \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^n$$

Onde $e_i \in \mathcal{R}^{n-m}$ e $e_j \in \mathcal{R}^{n-n_2}$ são colunas de I_{n-m} e I_{n-n_2} respectivamente.

Considerando os seguintes conjuntos:

$$NB^- = \{i \in NB / c^*_i < 0\} = \{i \in NB / c^T G_i < 0\}$$

$$NE^0 = \{j \in NE / z_j^* = 0\} = \{j \in NE / z'^T H_j = 0\}$$

Onde os conjuntos NB^- e NE^0 representam, respectivamente, as direções de melhora de Z em z' , em relação à função objetivo $c^T z$, e as direções de S em s' no qual é viável a restrição $z'^T s = 0$.

Segundo Campêlo (1999), através destes dois conjuntos podem-se extrair condições suficientes de otimalidade para o problema (PLDNP):

- Se $NB^- = \emptyset \Rightarrow z'$ é solução global do problema (PLDNP).
- Se $NE^0 = \emptyset \Rightarrow z'$ é solução local do problema (PLDNP).

Algoritmo Local

Passo 1 \rightarrow Se $Z \times S = \emptyset$, pare o problema (PLDNP) é inviável. Caso contrário encontre um $z' \in Z$.

Passo 2 \rightarrow Aplique o Algoritmo 1. Se $P(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$, pare: o problema (PLDNP) é ilimitado. Caso contrário, tome (z', s') o ponto de equilíbrio encontrado.

Passo 3 \rightarrow Considere as tabelas ótimas do Simplex relativos aos problemas $P(M, s')$ e $P(M, z')$.

Sejam NB^- e NE^0 como definidos anteriormente. Se $NB^- = \emptyset$ ou $NE^0 = \emptyset$, pare: z' é um ótimo global ou local do problema (PLDNP), respectivamente.

Passo 4 \rightarrow Calcule $\delta_i = \min \{G_i^T s : s \in S(z')\} > 0 \forall i \in NB^-$. Caso existam $i \in NB^-$ e $s' \in S(z')$ tais que $\delta_i = G_i^T s' = 0$, volte para o passo 2. Caso contrário, PARE: z' é um ótimo local do problema (PLDNP).

4- Exemplo Numérico

Considere o seguinte problema:

$$(P1) \quad \begin{array}{ll} \min & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 \geq 0 \\ & \min x_2 \\ & \text{s.a.} \quad x_1 - x_2 \geq -3 \\ & \quad -x_1 - 2x_2 \geq -12 \\ & \quad -4x_1 + x_2 \geq -12 \\ & \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

4.1- Resolução do problema (P1) pelo algoritmo k-ésimo melhor vértice

Em linhas gerais os passos que o algoritmo faz são:

$i = 1$

\rightarrow Resolve-se o Problema Relaxado pelo Método Simplex:

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 - x_2 \geq -3 \\ & -x_1 - 2x_2 \geq -12 \\ & -4x_1 + x_2 \geq -12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Encontrando como solução o ponto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 5, 0, 0, 9)$

→ Resolve-se o problema do seguidor para $x_1 = 2$:

$$\begin{aligned}
 S(2) \quad & \min \quad x_2 \\
 \text{s.a} \quad & -x_2 \geq -3 - 2 \\
 & -2x_2 \geq -12 + 2 \\
 & x_2 \geq -12 + 8 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

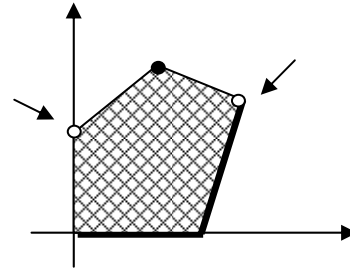
E obtém-se como solução $x_2^* = 0$

Então como $x_2^* \neq x_2$, encontra-se os vértices adjacentes a $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$:

$$\rightarrow U_1 = \{(4, 4, 3, 0, 0), (0, 3, 0, 6, 15)\}$$

→ $i = i + 1$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\
 (x_1, x_2) \in U_1
 \end{aligned}$$



Obtendo como solução o vértice $(4, 4, 3, 0, 0)$

→ Resolvendo o problema do seguidor para $x_1 = 4$:

$$\begin{aligned}
 S(4) \quad & \min \quad x_2 \\
 \text{s.a} \quad & -x_2 \geq -3 - 4 \\
 & -2x_2 \geq -12 + 4 \\
 & x_2 \geq -12 + 16 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Obtém-se $x_2^* = 4 = x_2 \Rightarrow (4, 4, 3, 0, 0)$ é solução para o problema (P1).

4.2- Resolução do problema (P1) pelo Algoritmo Local

O problema equivalente ao problema (P1), utilizando as condições de KKT é escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 (PE) \quad & \min \quad -x_1 - 3x_2 \\
 \text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\
 & 4x_1 - x_2 + x_5 = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\
 & -u_1 - 2u_2 + u_3 + v = 1 \\
 & u_1, u_2, u_3, v \geq 0 \\
 & vx_2 = 0 \\
 & u_1x_3 + u_2x_4 + u_3x_5 = 0
 \end{aligned}$$

E o problema penalizado é:

$$\begin{aligned}
 P(M) \quad & \min \quad -x_1 - 3x_2 + M(u_1x_3 + u_2x_4 + u_3x_5 + vx_2) \\
 \text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\
 & 4x_1 - x_2 + x_5 = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\
 & -u_1 - 2u_2 + u_3 + v = 1 \\
 & u_1, u_2, u_3, v \geq 0
 \end{aligned}$$

Aplicando o Algoritmo 1, tem-se que:

$$z' = (4,4,3,0,0) \text{ e } s' = (0,0,0,0,1)$$

- O problema $P(M, z')$ é:

$$\begin{aligned} \min & -4 - 12 + 3u_1 + 4v \\ \text{s.a.} & -u_1 - 2u_2 + u_3 + v = 1 \\ & u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3 \\ & v \geq 0 \end{aligned}$$

O algoritmo obteve como solução:

$$s' = (0,0,0,0,1)$$

Tabela 4.2.1: Tabela ótima do problema $P(M, z')$

	u_1	u_2	u_3	v	
u_3	-1	-2	1	1	1
	3	0	0	4	0

- O problema $P(M, s')$ é:

$$\begin{aligned} \min & -x_1 - 3x_2 + 100x_5 \\ \text{s.a.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\ & 4x_1 - x_2 + x_5 = 12 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Tabela 4.2.2: Tabela ótima do problema $P(M, s')$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	-0.33	0.33	3
x_2	0	1	0	0.44	-0.11	4
x_1	1	0	0	0.11	0.22	4
100	0	0	0	0	1	
	0	0	0	1.44	-0.11	

Nota-se pela análise da Tabela 4.2.1 do problema $P(M, z')$ que z' é solução local do problema (PLDNP), pois s' é o único complementar a z' no conjunto S , pois apesar da tabela indicar uma outra alternativa: a variável u_2 , quando esta entrar na base gerará uma solução inviável.

Agora optando por aplicar o Algoritmo 2, tem-se que o ponto de equilíbrio encontrado é:

$$z' = (3,0,6,9,0) \text{ e } s' = (0,1,0,0,0)$$

- O problema $P(M, z')$ é:

$$\begin{aligned} \min & -3 + 600u_1 + 900u_2 \\ \text{s.a.} & -u_1 - 2u_2 + u_3 + v = 1 \\ & u_i \geq 0, i = 1, \dots, 3 \\ & v \geq 0 \end{aligned}$$

O algoritmo obteve como solução:

$$s' = (0, 1, 0, 0, 0)$$

Tabela 4.2.3: Tabela ótima do problema $P(M, z')$

	u_1	u_2	u_3	v	
v	-1	-2	1	1	1
	600	900	0	0	

- O problema $P(M, s')$ é:

$$\begin{aligned} \min & -x_1 + 97x_2 \\ \text{s.a.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\ & 4x_1 - x_2 + x_5 = 12 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Tabela 4.2.4: Tabela ótima do problema $P(M, s')$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0.75	1	0	0.25	6
x_4	0	2.25	0	1	-0.25	9
x_1	1	-0.25	0	0	0.25	3
	0	96.75	0	0	0.25	

Separando a última linha da Tabela 4.2.4 em duas linhas de modo que uma corresponde aos coeficientes do termo penalizado e a outra aos coeficientes da função objetivo original, tem-se a Tabela 4.2.5 a seguir:

Tabela 4.2.5: Tabela ótima do problema $P(M, s')$ com os coeficientes do termo penalizado e da função objetivo original desmembrados

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	-0.25	0	0	0.25	3
x_4	0	2.25	0	1	-0.25	9
x_3	0	0.75	1	0	0.25	6
100	0	1	0	0	0	
	0	-3.25	0	0	0.25	

Nota-se pela análise das tabelas:

→ Tabela 4.2.5

O ponto z' não é solução global do problema (PLDNP), pois $NB^- \neq \emptyset$:

$$c^*_i = -3.25 < 0 \text{ para } i \in NB \text{ (} i = 2 \text{)}$$

→ Tabela 4.2.3

O ponto z' não é solução local do problema (PLDNP), pois $NE^0 \neq \emptyset$, ou seja, s' não é o único complementar a z' no conjunto S :

$$z^*_j = 0, \text{ para } j \in NE \text{ (} j = 3 \text{)}$$

Agora calculando:

$$\delta_i = \min \{G_i^T s : s \in S(z')\} \quad \forall i \in NB^-.$$

$$i = 2$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \\ -0.75 \\ -2.25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \min & v - 0.75u_1 - 2.25u_2 \\ \text{s.a.} & 6u_1 + 9u_2 = 0 \\ & u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3 \\ & v \geq 0 \end{aligned}$$

A solução encontrada será $\delta_i = 0$ e $s = (0, 0, 0, 0, 100.5991)$.

Agora encontrando um ponto de equilíbrio para $s' = (0, 0, 0, 0, 100.5991)$

$$z' = (4 \ 4 \ 3 \ 0 \ 0) \text{ e } s' = (0, 0, 0, 0, 1)$$

→ Analisando as tabelas ótimas dos problemas $P(M, z')$ e $P(M, s')$.

Observa-se que tais tabelas já foram analisadas quando no passo 2 usou-se o Algoritmo 1. Então da conclusão feita por essa abordagem, tem-se que $z'=(4,4,3,0,0)$ é solução local do problema (PLDNP).

5- Conclusões

O algoritmo proposto por Campêlo (1999) possui uma implementação mais complexa, devido à sua fundamentação teórica. Aborda o problema PLDNP de forma clássica, isto é, a partir de um problema equivalente (PE) de um só nível, utilizando recursos refinados da Programação Linear tanto como da Não-Linear (quando faz uso de direções de descida e das condições de KKT), identificando uma solução local ou global de forma exata.

Já a implementação do Algoritmo K-ésimo melhor vértice é mais simples, porém o algoritmo apresenta algumas limitações: a sua eficiência está relacionada com a diferença entre o valor ótimo do problema PLDNP e o valor ótimo do problema (PR).

Sendo o Problema Linear de Dois Níveis um problema que consiste em otimizar uma função objetivo sobre uma região não-convexa, o problema pode possuir ótimos locais, portanto o algoritmo proposto por Campêlo (1999) se faz mais completo, uma vez que identifica se é uma solução local ou global.

Referências:

- Anandalingam, G.e White, D (1990) A solution method for the linear static Stackelberg problem using penalty functions .IEEE Transactions on Automatic Control, 35: 1170-1173.
- Arica, CH. J. R (1995) O problema de Programação Matemática de Dois Níveis: Condições de Otimalidade e Proposta Numérica. Tese de Doutorado COPPE/Sistemas, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 116 p.
- Bazaraa,M.S., Jarvis,J.J., Sherali,H.D (1990) Linear Programming and Network Flows. 2.ed. Jonh Wiley & Sons, 684p.
- Bialas, W, Karwan, M (1984) Two-Level Linear Programming .Management Science 30: 1004-1020.
- Campêlo, M.B.N (1999) Programação Linear em Dois Níveis: Uma abordagem teórica e computacional. Tese de Doutorado- COPPE- Universidade Federal do Rio de Janeiro, 169p.
- Campêlo, M., Scheimberg,S.A (2002) Study of Local Solutions in Linear Bilevel Problem . *Submitted to Journal of Optimization Theory and Applications* , Kluwer.
- Dantas, S. (1998) Problemas de Programação em Dois Níveis: Um Estudo dos Casos Linear, Linear Quadrático e Quadrático. Tese de Mestrado – COOPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Önal, H.(1993) A modified simplex approach for solving bilevel linear programming problems .European Journal of Operational Research, 67:126-135.

Vicente L. (1992) Bilevel programming. Master's thesis, University of Coimbra, Department of Mathematics, 88p.