PROPOSTAS PARA SE DETERMINAR SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUES COM UM NÚMERO REDUZIDO DE PADRÕES

Horacio Hideki Yanasse
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE/LAC
Av. dos Astronautas, 1758, Jardim da Granja, São José dos Campos, SP
horacio@lac.inpe.br

Resumo

Neste trabalho apresenta-se propostas de procedimentos visando obter um número reduzido de padrões distintos em problemas de corte de estoque. As propostas baseiam-se em conceitos do método simplex para resolução de problemas de programação linear.

Palavras-Chaves: Problema de Corte; Padrão de Corte; Redução de Padrão; Heurísticas.

Abstract

In this paper we present proposals of methods aiming to obtain a reduced number of different patterns in cutting stock problems. These proposals are based on concepts of the simplex method to solve linear programming problems.

Keywords: Cutting Problems; Cutting Patterns; Pattern Reduction; Heuristics.

1. INTRODUÇÃO

O problema de corte consiste em determinar a "melhor maneira" de cortar itens, com dimensões e quantidades específicas, de objetos, com dimensões específicas, de forma a otimizar uma função objetivo.

Existe uma vasta literatura que trata de problemas de corte. Os leitores interessados podem consultar, por exemplo, Hinxman (1980), Dyckhoff e Waescher (1990), Lirov (1992), Dowsland e Dowsland (1992), Sweeney e Paternoster (1992), Dyckhoff e Finke (1992), Martello (1994a, 1994b), Bischoff e Waescher (1995), Mukhacheva (1997), Dyckhoff et. al. (1997), Arenales et. al. (1999), Wang e Waescher (2002), Hifi (2002) e SICUP (2004), entre outros. A diversidade e especificidade dos diversos problemas de corte encontrados na prática motivou Dyckhoff (1990) a sugerir uma classificação destes problemas.

Uma solução para o problema de corte de estoque consiste de um conjunto de padrões de corte e a freqüência correspondente que serão ser cortados. Em alguns ambientes de produção há interesse em se ter um número reduzido de padrões na solução. Por exemplo, quando cada troca de padrão de corte requer uma preparação para o corte, consumindo recursos (por exemplo, tempo de máquina e mão de obra). Nestes casos, a redução do número de padrões de corte na solução é desejada.

O problema de minimização de padrões de corte é NP-difícil (McDiarmid, 1999). Na literatura, foi encontrado um número relativamente pequeno de trabalhos tratando deste problema. Em Haessler (1975), uma Técnica Exaustiva de Repetição de Padrão é proposta; em Farley e Richardson (1984), iterações do S*implex* são realizadas para substituir variáveis básicas (os padrões de corte). Foerster e Wäscher (1999) propuseram um método iterativo de redução de padrão combinando 2, 3, 4 ou mais padrões, a partir de um plano mínimo de corte gerado em um primeiro estágio. Umetami et. al. (2003) propuseram uma nova heurística que busca uma solução que minimiza o desvio quadrático dos itens demandados após o número de padrões distintos ser fixado em um valor pré-estabelecido. Yanasse e Limeira (2003) e Yanasse et. al. (2004) propuseram algumas heurísticas baseadas em combinações de itens em padrões que potencialmente conduzem a um número reduzido de padrões.

A única proposta para resolução exata do problema é o descrito em Vanderbeck (2000), onde o problema é formulado como um de programação inteira quadrático.

Uma formulação do problema de corte de estoque que tem como objetivo não só a minimização dos custos de perdas mas, também os custos de trocas de padrões distintos foi sugerida por Haessler (1975).

(P_0): Minimizar $C_1 \sum_j T_j X_j + C_2 \sum_j \delta(X_j)$,

Sujeito à $R_l \leq \sum_j A_j X_j \leq R_u$,

$X_j \geq 0$, valores inteiros, para $j = 1, ..., n$

onde,

A_j é um vetor de padrões de corte com elementos a_{ij}, onde a_{ij} é o número de itens de comprimento l_i a ser obtido de um padrão j.

X_j é o número de objetos a ser processado de acordo com o padrão j,

T_j é a quantidade de perdas em polegadas incorrido no padrão j. Se L é a largura máxima utilizável do objeto, então $T_j = L - \sum_i a_{ij} l_i$,

C_1 é o valor monetário de perda por polegada,

C_2 é o custo de mudança de padrões em valores monetários,

R_1 e R_u são limitantes inferiores e superiores sobre a demanda do clientes, refletindo uma prática da indústria em geral, e

$\delta(X_j) = 1$ para $X_j > 0$ e 0 caso contrário.

A dificuldade na resolução do problema de programação matemática formulado acima é devido ao número elevado de colunas A_j no problema, da integralidade da variáveis de decisão e da não linearidade da função objetivo.

Neste trabalho estudamos a utilização de conceitos de programação linear para tentar reduzir o número de padrões numa solução.

2. PROGRAMAÇÃO LINEAR E A REDUÇÃO DO NÚMERO DE PADRÕES

Para evitar a geração explícita do número elevado de colunas A_j no problema (P_0) e tentar achar uma boa solução para o problema, consideremos o problema linear auxiliar (P_1):

minimizar $\sum_{j=1}^{n} c_j X_j$

Sujeito à $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq R_i \qquad i=1,..,m$

$X_j \geq 0 \qquad j = 1,...,n$

onde

m é o número total de itens distintos no problema, e

n é o número total de padrões viáveis para o problema.

Com o plano ótimo de corte obtido resolvendo-se o problema (P_1) pode-se arredondar para o inteiro superior os valores fracionários obtidos e obter (possivelmente) uma solução viável para o problema (P_0).

No entanto, estamos interessados em encontrar uma solução com o número mínimo possível de padrões e que mantenha o custo total mínimo ou em um valor baixo. Como se pode ter um número reduzido de padrões em uma solução?

Consideremos inicialmente o seguinte problema (P2(**w**)):

minimizar $\sum_{j=1}^{n} c_j X_j + \sum_{i=1}^{m} w_i Y_i$

Sujeito à $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j - Y_i = R_i \qquad i=1,..,m$

$X_j \geq 0 \qquad j = 1,...,n$

$Y_i \geq 0 \qquad i = 1,...,m$

onde:

Y_i é a produção do item i que excede o limite inferior demandado, e

w_i é o custo unitário da produção excedente do item i em relação à sua demanda mínima.

Observe que em (P2(**w**)), se na base tivermos variáveis Y_j´s então teremos menos variáveis X_i ´s positivas na solução e, isto é o almejado. A dificuldade em ir adiante com esta idéia consiste em determinar boas soluções que tenham variáveis Y_j´s na base.

Uma proposta possível seria, após a resolução do problema P2(**0**) e determinação de uma solução ótima (***X****, ***Y****), forçar a entrada de variáveis de folga nesta solução segundo algumas regras. Esta é a proposta utilizada em Farley e Richardson (1984) e em Walker (1976).

Podemos desenvolver outras regras diferentes de Farley e Richardson (1984) ou Walker (1976) para a entrada de variáveis Y_j´s na base manipulando os valores do vetor **w**.

Seja

$\boldsymbol{X_B}$ as variáveis básicas da solução corrente

$\boldsymbol{W_B}$ a solução dual correspondente

$\boldsymbol{c_B}$ o vetor de custos correspondentes às variáveis básicas

$\mathbf{A}$ matriz dos coeficientes a_{ij}

$\mathbf{A}_j$ j-ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$

$\mathbf{B}$ matriz básica

$\mathbf{B}^{-1}$ inversa da base cujo elemento (i,j) é f_{ij}

$\mathbf{B}^{-1}{}_j$ j-ésima coluna da matriz $\mathbf{B}^{-1}$

$(\mathbf{B}^{-1})^j$ j-ésima linha da matriz $\mathbf{B}^{-1}$

$\overline{\boldsymbol{R}}$ é a solução corrente (das variáveis básicas).

Observe que no tableau ótimo, nas colunas correspondentes às variáveis de excesso temos, em qualquer iteração, a matriz - $\mathbf{B}^{-1}$ uma vez que iniciamos com a matriz - $\mathbf{I}$.

Teoricamente, podemos introduzir na base corrente qualquer variável Y_j cujo coeficiente - f_{ij} na coluna correspondente do tableau seja diferente de 0. Entretanto, após o pivotamento, é possível que a base obtida seja inviável. Dado o fato das colunas correspondentes a $\boldsymbol{X}$ no problema não estarem todas explicitamente disponíveis, fica difícil utilizar o método dual simplex para achar uma solução básica viável a partir de uma base inviável. Desta forma, os possíveis candidatos ao pivotamento são somente aqueles elementos das colunas do tableau abaixo dos Y_j´s com $-f_{ij} > 0$. Caso existam tais elementos, pode-se proceder o pivotamento. Considera-se todos os pivotamentos possíveis, escolhe-se aquele que resulta em menor custo.

Este procedimento pode ser sucessivamente aplicado para se tentar reduzir o número de padrões. Entretanto, não há garantias de que existam coeficientes $f_{ij} < 0$ no tableau. Neste caso, o procedimento falha em reduzir o número de padrões.

Uma alternativa a explorar é aplicar este pivotamento nas diversas iterações do método simplex e armazenar a melhor solução obtida.

Focalizemos agora a possibilidade de geração de soluções básicas degeneradas. Uma redução de padrões é conseguida se a solução básica for degenerada. Como gerar padrões que resultem em soluções básicas degeneradas?

Suponha que uma variável X_j seja uma candidata a entrar na base. Temos então que

$\boldsymbol{W_B}\mathbf{A}_j$ - $c_j \geq 0$. Após o pivotamento, a solução básica obtida será degenerada se no teste da razão tivermos pelo menos 2 linhas empatadas com o razão mínima. Seja $\boldsymbol{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$. Devemos ter então que para pelo menos 2 linhas, r e s, $(\overline{R}_r/y_{rj}) = (\overline{R}_s/y_{sj})$, ou $(\overline{R}_r/(\mathbf{B}^{-1})^r\mathbf{A}_j)) = (\overline{R}_s/(\mathbf{B}^{-1})^s\mathbf{A}_j))$, ou ainda, $\overline{R}_s(\mathbf{B}^{-1})^r\mathbf{A}_j = \overline{R}_r(\mathbf{B}^{-1})^s\mathbf{A}_j$. Esta expressão é equivalente a $\sum_{j=1}^{m} g_j a_{ij} = 0$ onde g_j é igual ao j-ésimo elemento de $(\overline{R}_s(\mathbf{B}^{-1})^r - \overline{R}_r(\mathbf{B}^{-1})^s)$. Estamos interessados em padrões que satisfaçam esta condição e que tenham custos reduzidos não negativos.

Sugerimos incluir esta condição no subproblema de geração de colunas utilizado na resolução do problema de corte de estoque utilizando a relaxação linear do problema, conforme Gilmore e Gomory (1961, 1963).

No caso unidimensional, na geração de colunas, precisamos encontrar um padrão, solução do seguinte problema de programação linear inteira

maximizar $\sum_{j=1}^{m} W_j b_j$

Sujeito à $\sum_{j=1}^{m} l_j b_j \leq L$

$\sum_{j=1}^{m} g_j b_j = 0$

$b_j \geq 0$ e inteiro $\qquad j = 1,...,m$

É possível que não seja possível a determinação de padrões que satisfaçam estas condições e que tenham custo reduzido não-negativo. Possibilidades que podem ser exploradas são:

aceitar padrões que deteriorem um pouco a função objetivo, ou seja, aceitar padrões com custo reduzido negativo.

em todas a iterações do método simplex, desde a primeira, procurar sempre introduzir padrões que produzam soluções degeneradas.

Focalizemos agora a possibilidade do uso de relaxação lagrangiana para a redução do número de padrões. Uma solução básica ótima do problema (P_1), caso não degenerado, fornece uma solução viável para o problema (P_0) com m padrões pois o número de variáveis básicas em uma solução do simplex de (P_1) é igual ao número de restrições do problema. Assim, para se obter um número menor de padrões, podemos utilizar a seguinte relaxação lagrangiana L(λ) do problema:

minimizar $\sum_{j=1}^{n} c_j X_j - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (a_{ij} X_j - R_i)$

Sujeito à $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq R_i \qquad i=k+1,..,m$

$X_j \geq 0 \qquad j = 1,...,n$

onde λ_i é o multiplicador de lagrange correspondente à restrição i.

Uma solução básica viável para o problema L(λ) tem somente m-k padrões. Infelizmente, nem toda solução de L(λ) é viável para o problema (P_1) (e nem para (P_0)). Os padrões gerados em L(λ) satisfazem as demandas dos itens $k+1,..,m$, mas não há garantias de que as demandas dos itens $1, 2, \ldots, k$ serão satisfeitas. Tampouco, não há garantias de que os padrões utilizados na solução de L(λ) contem estes itens. Se estes itens não estiverem presentes, teremos que introduzir outros padrões para satisfazer a demanda deles.

O procedimento que sugerimos utilizar inicia resolvendo o problema (P_1) com geração de colunas. Com a solução ótima deste problema, utilizamos a solução $\boldsymbol{w}$ correspondente do dual para selecionar quais restrições relaxar e definir o problema L(λ).

Ordenamos as restrições a serem escolhidas segundo a razão não crescente de w_i/l_i. Com isso, procuramos favorecer a introdução destes itens nos padrões gerados no subproblema (problema da mochila) definido a seguir. Selecionamos as k primeiras restrições correspondentes a esta ordenação. Assim, λ é o vetor formado com os valores w_i correspondentes as k restrições da ordenação feita que dão o maior retorno. Sem perda de generalidade, suponhamos que estas restrições sejam as k primeiras.

Para resolver o problema L(λ) sugerimos utilizar novamente a geração de colunas como em Gilmore e Gomory (1961, 1963). O subproblema a ser resolvido é o seguinte problema da mochila

$$\text{maximizar} \qquad \sum_{j=k+1}^{m} W_j b_j + \sum_{j=1}^{k} w_j b_j$$

$$\text{Sujeito à} \qquad \sum_{j=1}^{m} l_j b_j \leq L$$

$$b_j \geq 0 \text{ e inteiro}, \qquad j = 1,\ldots,m$$

A cada iteração, apenas os valores de W_j, $j = k+1,\ldots,m$ são atualizados.

A solução básica inicial do problema L(λ) é obtida considerando-se os padrões homogêneos dos itens $k+1, \ldots, m$. As colunas obtidas da base ótima do problema P_1 também são mantidas. Determina-se a solução ótima do problema considerando-se estes padrões e geração de colunas, obtidas pelo(s) melhor (ou melhores) padrão(ões) gerado(s) através do subproblema acima.

Quando uma solução ótima do problema L(λ) for obtida, aplica-se um procedimento de factibilização da solução. Este procedimento consiste em ajustar (aumentar), se necessário, as freqüências de cada padrão de modo que as demandas de todos os itens sejam satisfeitas. Caso estes padrões não sejam suficientes para atender as demandas de todos os itens, considera-se a adição de padrões compostos apenas dos itens cujas demandas não puderam ser atendidas.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos algumas propostas de desenvolvimentos de procedimentos visando obter um número reduzido de padrões distintos em problemas de corte de estoque, baseadas em conceitos do método simplex.

As implementações destes procedimentos estão sendo iniciadas. Esperamos que os experimentos científicos a serem conduzidos comprovem a expectativas que temos destes procedimentos em fornecer boas soluções para o problema de redução de padrões em problemas de corte de estoque.

A partir das propostas apresentadas, outras combinações podem ser desenvolvidas e são objeto de desenvolvimentos futuros.

4. AGRADECIMENTOS

Trabalho sendo desenvolvido com suporte financeiro parcial do CNPq e FAPESP.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Arenales, M.; Morabito, R.; Yanasse H. Cutting and packing problems**.** **Pesquisa Operacional**, v. 19, n. 2, p. 107-299, 1999.

[2] Bischoff, E.; Wäscher, G. Cutting and packing. **European Journal of Operational Research**, v. 84, n. 3, 1995.

[3] Dowsland, K.; Dowsland, W. Packing problems**. European Journal of Operational Research**, v. 56, p. 2-14, 1992.

[4] Dyckhoff, H. A typology of cutting and packing problems, European Journal of Operational Research 44, 145-159, 1990.

[5] Dyckhoff, H.; Finke, U. **Cutting and packing in production and distribution**: Typology and bibliography. Heidelberg : Springler-Verlag, 1992.

[6] Dyckhoff, H.; Scheithauer, G.; Terno, J. *Cutting and packing*. In: AMICO, M.; MAFFIOLI, F.; MARTELLO, S. (Ed.) **Annoted bibliographies in combinatorial optimization**. New York: John Wiley & Sons. p. 393-414, 1997.

[7] Dyckhoff, H.; Wäscher, G. Cutting and packing. **European Journal of Operational Research**, v.44, n.2, special issue, 1990.

[8] Farley, A. A.; Richardson, K. V. Fixed charge with identical fixed charges. **European Journal of Operational Reserch**, v. 18, p.245-249, 1984.

[9] Foerster, H.; Wäscher, G. Pattern Reduction in one-dimensional cutting stock problem. **International Journal of Production Research**, v.38, p. 1657-1676, 1999.

[10] Gilmore, P.C., Gomory, R. A linear programming approach to the cutting-stock problem. **Operations Research** 9, 848-859, 1961.

[11] Gilmore, P.C., Gomory, R. A linear programming approach to the cutting-stock problem- part II. **Operations Research** 11, 863-888, 1963.

[12] Haessler, R. W. Controlling cutting pattern changes in one-dimensional trim problems. **Operations Research**, v. 23, n. 3, p. 483-493, 1975.

[13] Hifi, M. (Ed.) Special issue on cutting and packing. **Studia Informatica Universalis** 2, 2002.

[14] Hinxman, A. I. The trim-loss and assortment problems: A survey. **European Journal of Operational Research**, v. 5, p. 8-18, 1980.

[15] Lirov, Y. (Ed.) Special issue: Cutting stock: Geometric resource allocation, **Mathematical and Computer Modelling** 16(1), 1992.

[16] Martello, S. (Ed.) Special issue: Knapsack, packing and cutting, Part I: One-dimensional knapsack problems, **INFOR** 32(3), 1994a.

[17] Martello, S. (Ed.) Special issue: Knapsack, packing and cutting, Part II: Multidimensional knapsack and cutting stock problems, **INFOR** 32(4), 1994b.

[18] McDiarmid, C. Pattern minimisation in cutting stock problems. **Discrete Applied Mathematics**, 98, p. 121-130, 1999.

[19] Mukhacheva, E.A. (Ed.) Decision making under conditions of uncertainty: cutting-packing problems, The International Scientific Collection, Ufa, Russia, 1997.

[20] SICUP. Special Interest Group on Cutting and Packing, (Website http://www.apdio.pt/sicup/), 2004.

[21] Sweeney, P.; Paternoster, E. Cutting and packing problems: a categorized, application-oriented research bibliography**. Journal of the Operational Research Society**, v. 43, p. 691-706, 1992.

[22] Umetani, S.; Yagiura, M., Ibaraki, T. One-dimensional cutting stock problem to minimize the number of different patterns. **European Journal of Operational Research**, 146: 388-402, 2003.

[23] Vanderbeck, F. Exact algorithm for minimizing the number of setups in the one-dimensional cutting stock problem. **Operations Research**, v. 48, p. 915-926, 2000.

[24] Yanasse, H.H.; Limeira, M.S. Algumas heurísticas para redução do número de padrões distintos em problemas de corte de estoques. VII Oficina de problemas de Corte e Empacotamento, Baurú, SP, 11-12 de dezembro de 2003. SPOLM 2003, VI Simpósio de Pesquisa Operacional da Marinha/ VII Simpósio de Logística da Marinha, Rio de Janeiro, RJ, 16-17 de dezembro de 2003. Anais do SPOLM, p. 92-104.

[25] Yanasse, H.H.; Katsurayama, D.M.; Limeira, M.S. Reducing the number of different patterns in cutting stock problems: new contributions. XXIV Encontro Nacional de Engenharia de Produção / X International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, Florianópolis, SC, 03-05 de novembro de 2004, Proceedings of the X. International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, intitulado “Knowledge engineering and management applied for the development of productive systems”, editado por Fogliatto, F.S.; Ribeiro, J.L.D.; Abreu, A.F.; Bornia, A.C.; p.123-130. Arquivo ICEOM0601-1333, p.2982-2989, do CD do ENEGEP 2004, ISBN 85-88478-11-0.

[26] Walker, W.E., “A heuristic adjacent extreme point algorithm for the fixed charge problem”. **Management Science**, 22(5): 587-596 (1976).

[27] Wang, P.Y; Wäscher, G. Cutting and packing**. European Journal of Operational Resesearch**, v. 141, n. 2, p. 239-469, 2002.