O PROBLEMA DE TRANSPORTE DE GÁS: ALGUNS MODELOS MATEMÁTICOS PARA MINIMIZAR SEU CUSTO

Pollyanna Vieira Leite
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF/LEPROD
Av. Alberto Lamego, 2000 - Campos dos Goytacazes - RJ
CEP 28013-600
pollyanna@uenf.br

Luis Humberto Guillermo Felipe
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF/LCMAT
Av. Alberto Lamego, 2000 - Campos dos Goytacazes - RJ
CEP 28013-600
guillerm@uenf.br

Resumo

O gás natural dirigido pela pressão é transportado de um ponto a outro através de gasodutos. Durante o transporte, o gás vai perdendo pressão devido ao atrito entre ele e as paredes internas do duto e para elevar a pressão, compressores são instalados na rede. Esses compressores consomem grande parte do gás transportado, por isso, o problema em questão é o de minimizar esse consumo, que é de grande importância, pois pequenas melhorias significam uma economia muito grande, já que os investimentos feitos nessa área são enormes. Existem diversos trabalhos com propostas diferentes para solucionar esse problema, e o que se pretende aqui é apresentar alguns modelos matemáticos que viabilizam a solução do problema de transporte de gás.

Palavras-Chaves: rede de gás natural, transporte, minimização.

Abstract

The natural gas driven by the pressure is transported from a point to another one through pipelines. As the gas flows through the network, pressure is lost due to the friction between it and the pipe's inner walls and, in order to raise the pressure, compressors are installed in the network. These compressors consume great part of the transported gas, hence, the problem in question is to minimize this consumption, which is of great importance, because small improvements mean an important economy, since the investments made in this area are enormous. There are diverse works with different proposals to solve this problem, and what it is intended here it is to present some mathematical models that make possible the solution of the problem of gas transport.

Keywords: natural gas network, transmission, minimization.

1. INTRODUÇÃO

Um dos aspectos que mais caracteriza o gás natural é a possibilidade de seu estado físico ser adaptado às condições de transporte desde a região onde é produzido até a região onde será consumido (freqüentemente distantes uma da outra).

O transporte por gasodutos é a solução mais amplamente utilizada. Gasoduto é um duto para conduzir o gás natural, que é introduzido nele sob pressão, por meio de compressores.

A operação do gasoduto é modernamente feita à distância, sendo monitorada por instrumentos ao longo da tubulação, seja com a utilização de comunicação por satélites, seja com fibras óticas na faixa de domínio do gasoduto (as quais são também utilizadas para comunicação de interesse geral). Esta instrumentação acompanha a evolução da pressão na tubulação (para identificar a eventual perda de gás para a atmosfera) e também mede o fluxo que passa ao longo dela, inclusive as saídas nos pontos de entrega aos distribuidores, para fins de faturamento. Tudo é controlado da estação central de acompanhamento. No caso de um acidente, válvulas automáticas bloqueiam o trecho afetado.

Mesmo assim, continuamente, são feitas inspeções terrestres e aéreas ao longo dos dutos, por pessoal especializado, para constatação de qualquer eventual ação de terceiros que possa colocar em risco a integridade física das instalações. Também são realizadas periódicas inspeções internas por equipamentos instrumentados, que percorrem toda a tubulação, registrando eletronicamente qualquer anomalia. As operações de recuperação de algum dano nos dutos são relativamente fáceis, desde que a empresa responsável disponha de razoável flexibilidade.

Por força do fluxo, há uma perda de energia por atrito entre o gás e as paredes internas dos dutos, e a pressão vai caindo ao longo da tubulação, sendo necessária uma estação de compressão (de trecho em trecho) para elevar a pressão e permitir a continuidade do fluxo de gás.

Nesse caminho, o compressor consome parte do combustível (gás) que flui pelos dutos do sistema. Em [4] é estimado que os compressores consomem de 3% a 5% do gás transportado. O gasto com este transporte é significante, porque o total de gás transportado é muito grande.

O custo do consumo do sistema é dependente do custo do consumo do compressor. De acordo com [2] o custo do funcionamento do compressor representa de 25% a 50% do custo total consumido pelo sistema. O problema de otimização deste custo consiste então, em minimizar o consumo de combustível nas estações de compressão, ou seja em todos os compressores.

O problema de otimização de consumo de combustível em um sistema de transporte de gás é de grande importância, pois os investimentos feitos nessa área são muito grandes e uma pequena melhoria no funcionamento desse sistema representa uma economia significante.

Os sistemas de transporte de gás natural, tratados aqui, são compostos por dutos, compressores e pontos de interconexão física, que com auxílio da teoria de grafos são representados como arcos (dutos e compressores) e nós (pontos de interconexão física). As variáveis de decisão desse problema são de dois tipos: fluxo de gás em cada arco e pressão em cada nó extremo dos arcos.

Estes sistemas são muito complexos por diversos motivos, entre eles podemos destacar: a sofisticação dos compressores que, além disso têm diversas configurações e características; o conjunto de soluções viáveis é não convexo e a função objetivo é não convexa e não linear [3], isso dificulta muito a determinação do ótimo global.

Existem diversas publicações relacionadas ao problema de transporte de gás natural que objetivam tornar o problema mais tratável e também fornecer técnicas para a resolução deste problema. A proposta deste trabalho é fazer um estudo das abordagens já existentes para este problema de otimização do custo de transporte de combustível em redes de transporte de gás, comparar as estratégias adotadas para resolver tais problemas, verificando o que cada uma tem de melhor, e tentar aperfeiçoar os métodos já existentes, apresentando o problema de uma maneira mais completa e compreensível.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O sistema de transporte de gás natural é representado por uma rede que é composta de dutos, compressores e pontos de interconexão física; nesta rede os arcos correspondem aos dutos e compressores e os nós correspondem aos nós de junção.

O problema é o de minimizar a função que representa o custo do transporte de combustível consumido pelas estações compressoras conectadas à rede, cujas variáveis de decisão são o fluxo de gás em cada um dos arcos da rede, e as pressões correspondentes nos nós (que nos compressores são chamadas de pressão de sucção e de descarga, respectivamente). No modelo a ser adotado será suposto que para cada arco é designada uma direção e que todos os compressores de uma estação compressora são iguais. Vejamos

Notações adotadas na formulação deste problema:

N: Conjunto de todos os nós da rede
A_d: Conjunto dos arcos correspondentes aos dutos
A_c: Conjunto dos arcos correspondentes aos compressores
A: Conjunto de todos os arcos da rede
t_{ij}: Constante que representa a resistência em cada duto $(i,j) \in A_d$
p_i: Pressão no nó $i \in N$
p_i^L, p_i^U : Limites de pressão inferior e superior, respectivamente, de cada nó $i \in N$
s_i: Fluxo resultante de cada nó $i \in N$, sendo que $s_i > 0$ se i é um nó de sucção, $s_i < 0$ se i é um nó de descarga e $s_i = 0$ se i é um nó de transição.
f_{ij}: Fluxo no arco $(i,j) \in A$

2.1 Primeira Formulação Matemática:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{(i,j)\in A} (f_{ij}, p_i, p_j) \qquad (1)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} - \sum_{(i,j)\in A} f_{ji} = s_i \qquad i \in N \qquad (2)$$

$$p_i^2 - p_j^2 = t_{ij} f_{ij}^2 \qquad (i,j) \in A_d \qquad (3)$$

$$p_i \in [p_i^L, p_i^U] \qquad i \in N \qquad (4)$$

$$(f_{ij}, p_i, p_j) \in D_{ij} \qquad (i,j) \in A_c \qquad (5)$$

onde D_{ij} representa o conjunto de operações viáveis do compressor *(i,j)* e a função objetivo (1) representa o somatório dos fluxos de gás $g_{ij}(f_{ij}, p_i, p_j)$ consumidos por todas as estações compressoras da rede.

A restrição (2) representa o fluxo de gás resultante de cada nó, (3) representa o fluxo de gás em cada duto, (4) é o limite permitido de pressão em cada nó.

O conjunto viável é geralmente não convexo e a função a ser minimizada é não convexa e não linear. Esses e outros detalhes sobre o conjunto viável e a função objetivo podem ser vistos mais adiante nos itens 2.4 e 2.5.

2.2 Segunda Formulação Matemática:

O problema descrito acima também pode ser escrito utilizando matrizes de incidência. Vamos considerar uma rede com *n* nós, *m* compressores e *l* dutos. Para cada duto é dada uma direção que pode ou não coincidir com a direção do fluxo de gás.

A matriz de incidência nó-duto A_l é uma matriz *(n x l)* cujos elementos a_{ij}^l têm valor 1 se o duto *j* sai do nó *i*, -1 se o duto *j* entra no nó *i* e 0 caso contrário.

De maneira análoga a matriz de incidência A_m é uma matriz *(n x m)* cujos elementos a_{ik}^m têm valor 1 se o nó *i* é um nó de descarga da estação *k*, -1 se o nó *i* é um nó de sucção da estação *k* e 0 de outra maneira. *A* é uma matriz *n x (l+m)* formada colocando A_l à esquerda de A_m.

Logo, a *i*-ésima linha de cada matriz corresponde ao nó *i*, as colunas de A_l correspondem aos dutos, e cada coluna em A_m corresponde ao *k*-ésimo compressor na rede.

Sejam $u = (u_1 ... u_l)^T$ e $v = (v_1 ... v_m)^T$ os vetores de fluxo através dos dutos e compressores, respectivamente, e $w = (u^T v^T)^T$. Sejam $p = (p_1 ... p_n)^T$, o vetor de pressões nos nós da rede e $s = (s_1 ... s_n)^T$ o vetor fonte nos nós da rede. Também é suposto, sem perda de generalidade que $\sum_{i=1}^{n} s_i = 0$, ou seja, o que se produz é igual ao que se consome – oferta igual à procura.

Suponha também que são dados os limites de pressão p_i^L, p_i^U em cada nó da rede. Sendo assim, o modelo fica representado do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimizar} \quad F(w,p) = \textstyle\sum_{k=1}^{m} g_k(v_k, p_{in(k)}, p_{out(k)}) && (6)\\
&\text{sujeito a:} \quad A\mathrm{w} = s, && (7)\\
&\qquad A_l^T p^2 = \varphi(u), && (8)\\
&\qquad p \in [p^L, p^U], \text{ e} && (9)\\
&\qquad (v_k, p_{in(k)}, p_{out(k)}) \in D_k, \quad k = 1,...,m && (10)
\end{aligned}
$$

onde $p^2 = (p^2{}_1 ... p^2{}_n)^T$, $\varphi(u) = (\varphi_1(u_1) ... \varphi_l(u_l))^T$, com $\varphi_j(u_j) = c_j u_j^2$. v_k, $p_{in(k)}$, $p_{out(k)}$ são o fluxo total, a pressão de sucção e a pressão de descarga, respectivamente. D_k é o conjunto viável do compressor *k* e *F* é a função objetivo a ser minimizada.

Vamos agora dar mais detalhes sobre a função objetivo e o conjunto viável do problema, para isso precisamos de informações sobre o funcionamento dos compressores.

2.3 Compressores

Wu, Mercado, Boyd e Scott [3] afirmam que as variáveis associadas a cada compressor são: o volume *Q*, a velocidade *S*, o calor *H* e a eficiência η. A relação entre essas variáveis pode ser descrita pelas seguintes equações:

$$\frac{H}{S^2} = A_H + B_H\left(\frac{Q}{S}\right) + C_H\left(\frac{Q}{S}\right)^2 + D_H\left(\frac{Q}{S}\right)^3, \qquad (11)$$

$$\eta = A_E + B_E\left(\frac{Q}{S}\right) + C_E\left(\frac{Q}{S}\right)^2 + D_E\left(\frac{Q}{S}\right)^3, \qquad (12)$$

onde A_H, B_H, C_H, D_H, A_E, B_E, C_E e D_E são constantes que dependem de cada unidade compressora.

Outros quatro parâmetros fornecidos são: velocidade mínima S_{min}, velocidade máxima S_{max}, limite inferior e superior da razão $P = Q/S$, isto é,

$$S_{\min} \le S \le S_{\max} \qquad (13)$$

$$P_{\min} \le P \le P_{\max} \qquad (14)$$

Serão consideradas neste trabalho somente as estações compressoras que consistem de vários compressores idênticos.

2.4 Conjunto viável para uma unidade de compressor e para estações de compressão

Wu, Mercado, Boyd e Scott [3] também afirmam que as desigualdades (13) e (14) junto com a equação (11) constituem o conjunto viável para uma unidade compressora. Sabendo que as variáveis utilizadas no problema que modela a rede são: fluxo e pressões de sucção e descarga, os relacionamentos entre *(H, Q)* e (v, p_s, p_d), são dados abaixo:

$$H = \frac{ZRT_s}{m}\left[\left(\frac{p_d}{p_s}\right)^m - 1\right] \qquad (15)$$

$$Q = ZRT_s \frac{v}{p_s} \qquad (16)$$

onde $m = (k-1)/k$, o calor específico k, o fator de compressibilidade do gás Z e a constante de gás R são todos positivos. Além disso, cada unidade deve ter limites de pressão de sucção. Logo, o conjunto viável D^{unit} para cada unidade é:

$$D^{unit} = \left\{(v, p_s, p_d) : p_s^L \le p_s \le p_s^U, V^l \le \frac{v}{p_s} \le V^U, G^l\left(\frac{v}{p_s}\right) \le \frac{p_d}{p_s} \le G^U\left(\frac{v}{p_s}\right)\right\} \qquad (17)$$

onde,

$$V^l = \frac{Q^L}{ZRT_s}, \qquad (18)$$

$$V^U = \frac{Q^U}{ZRT_s}, \qquad (19)$$

$$G^L(q) = \left[1 + \frac{m}{ZRT_s} H^L(ZRT_s)\right]^{1/m}, \qquad (20)$$

$$G^U(q) = \left[1 + \frac{m}{ZRT_s} H^U(ZRT_s)\right]^{1/m}, \qquad (21)$$

Vamos considerar agora uma estação compressora com N unidades idênticas. Se somente uma unidade for selecionada para funcionar, então o conjunto viável denotado como D^1 é igual ao conjunto D^{unit} para uma única unidade.

Quando k unidades são selecionadas para funcionar, $1 \le k \le N$, então o conjunto viável, denotado por D^k é

$$D^k = \{(v, p_s, p_d) : (v/k, p_s, p_d) \in D^1\} \qquad (22)$$

Suponha que ao menos uma unidade esteja funcionando; o conjunto viável total D é então a união de D^{k}, ou seja,

$$D = \bigcup_{k=1}^{N} D^{k} \qquad (23)$$

2.5 Função de custo do transporte de combustível

2.5.1 Para uma unidade de compressão a função de custo do transporte de combustível g é dada por

$$g^{unit}(v, p_s, p_d) = \alpha v \left\{ \left(\frac{p_d}{p_s} \right)^{m} - 1 \right\}, \qquad \forall (v, p_s, p_d) \in D^{unit} \qquad (24)$$

onde α é uma constante positiva, que por simplicidade é suposta igual a 1.

O comportamento da função $g^{unit}(v,p_s,p_d)$ depende das características de cada compressor. Entretanto, é comum que o custo do combustível aumente com relação à p_d/p_s e ao fluxo v/p_s, e que diminua com relação à pressão de sucção p_s.

2.5.2 Para uma estação de compressão

O fluxo consumido por cada unidade k em funcionamento é igual a $g^{unit}(v/k, p_s, p_d)$. Desde que k unidades sejam selecionadas na estação, o fluxo total consumido por cada estação é $kg^{unit}(v/k, p_s, p_d)$. O custo mínimo de fluxo é, então,

$$g_k(v, p_s, p_d) = \min_{k \in K} \{ kg^{unit}(v/k, p_s, p_d) \}, \qquad (25)$$

onde $K = \{k : k \text{ é inteiro}, \ 1 \le k \le N, \quad (v, p_s, p_d) \in D^{k}\}$.

3. Revisão Bibliográfica

Serão relatados agora alguns trabalhos existentes para viabilizar a resolução do problema descrito na seção 2. Em cada um deles é descrita uma técnica que torna o problema mais tratável. Vejamos:

3.1 Método de redução de redes

Mercado, Wu, Scott e Boyd [1] propõem uma técnica para reduzir o tamanho de uma rede de transporte de gás, para que a rede reduzida resultante seja composta apenas de nós e arcos, pois assim se todas as fontes (fluxo resultante em cada nó) são dadas, então o fluxo em todos os dutos pode ser determinado.

A técnica proposta por eles consiste em remover de uma rede composta por nós, dutos e compressores, todos os compressores ficando com componentes desconectados. Cada um desses componentes é uma sub-rede composta de arcos e nós (dutos e pontos de interconexão física), em seguida essas sub-redes são encolhidas em um nó e os arcos compressores removidos anteriormente são recolocados, e assim, rede reduzida - contendo apenas nós e arcos - é obtida.

É possível distinguir dois casos em termos topológicos na rede reduzida: o caso em que a rede é uma árvore e o caso em que a rede apresenta ciclos. A resolução do problema varia de acordo com a topologia da rede reduzida.

Se a rede reduzida é uma árvore, todas as taxas de fluxo nas arestas podem ser determinadas em forma única. Além disso, as pressões em todos os nós da sub-rede se determinam de forma única pela pressão do nó de referência. Mas se a rede reduzida apresenta ciclos, não é mais possível determinar o fluxo de maneira única.

3.2 Solução heurística para estruturas cíclicas

A abordagem para sistemas cíclicos é limitada e varia conforme a estrutura de decisão. Como foi visto na seção anterior, o problema é reduzido por uma técnica de redução de rede, e dependendo da configuração dessa rede reduzida, o problema pode ter uma estrutura de decisão seqüencial ou não seqüencial. Para sistemas que apresentam uma estrutura de decisão seqüencial, a Programação Dinâmica (PD) é aplicada diretamente; já para sistemas que apresentam uma estrutura não seqüencial, a Programação Dinâmica não seqüencial é utilizada

A metodologia utilizada por Mercado, Kim, Boyd [2] para resolver problemas de redes cíclicas com estrutura seqüencial é um método heurístico baseado em um procedimento iterativo de dois estágios. No primeiro, as variáveis do fluxo do gás são fixadas e as variáveis ótimas de pressão são encontradas através da PD. No segundo, as variáveis de pressão são fixadas e é feita uma tentativa para encontrar um conjunto das variáveis de fluxo que aprimoraria a função objetivo através da exploração da estrutura básica da rede.

Para redes cíclicas com estrutura não seqüencial; Sánchez, Mercado[6] propõem um algoritmo de PD não seqüencial para encontrar as pressões ótimas em cada nó da rede, que é aplicado depois que um conjunto de fluxos viáveis é encontrado - num primeiro momento - pela técnica de redução de redes descrita na seção anterior, em seguida o algoritmo atua juntando ou prendendo dois compressores conectados ficando com um elemento “virtual” que representa a operação de ambos os compressores. Depois disso o sistema é substituído por um sistema equivalente com um compressor a menos. O processo continua até que não seja mais possível reduzir o sistema, ou seja, até que exista apenas um elemento virtual.

Sánchez e Mercado [4] propõem uma técnica que combina a PD não seqüencial com a busca Tabu para solucionar um sistema de redes cíclicas com estrutura não seqüencial. Primeiramente, uma solução inicial viável é encontrada, em seguida, o algoritmo de PD não seqüencial é utilizado para determinar o conjunto de pressões ótimas e por último, é feita uma modificação no fluxo com o objetivo de aprimorar o valor da função objetivo.

3.3 Relaxamento

Este modelo foi proposto com o objetivo de tornar a função objetivo e o conjunto viável do problema mais tratáveis já que ambos não são convexos. Wu, Mercado, Boyd e Scott [3] propõem um relaxamento para o conjunto viável e outro para a função objetivo.

3.3.1 Relaxamento do conjunto viável

Este relaxamento é feito desenvolvendo um superconjunto cuja construção é feita através de uma aproximação linear externa ao contorno do conjunto viável e então conectando o contorno linear exterior com a origem obtendo assim um conjunto viável relaxado convexo.

3.3.2 Relaxamento da função objetivo

Relembrando que a função de custo mínimo é dada por:

$$g_k(v, p_s, p_d) = \min_{k \in K} \left\{ k g^{unit}\left(\frac{v}{k}, p_s, p_d \right) \right\}$$

onde

$$K = \{k : k \text{ é inteiro}, 1 \le k \le N, (v, p_s, p_d) \in D_k\}$$
$$D_k = \{(v, p_s, p_d) : (v/k, p_s, p_d) \in D^1\}$$

A idéia introduzida para conseguir uma aproximação inferior convexa para a função g é bem geral. Primeiro, um conjunto linear de limites inferiores de *g* é encontrado, digamos,

$$l^i(v,p_s, p_d) = a^i v + b^i p_s + c^i p_d + d^i \le g\,(v,p_s, p_d)\ ,\ i \in I,$$

onde *I* é um conjunto de índices. Seja

$$l(v,p_s, p_d) = max_{i \in I}\ \{\ l^i(v,p_s, p_d)\},$$

Então teremos:

$$l(v,p_s, p_d) \le g\,(v,p_s, p_d)$$

A teoria clássica de programação linear mostra que l é convexo. Assim, l é um pedaço da aproximação inferior linear convexa de g.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho é parte de um projeto de tese de mestrado em andamento no Laboratório de Engenharia de Produção – Leprod - da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – UENF.

O trabalho encontra-se em fase inicial e pretende fazer um levantamento de trabalhos e publicações referentes às redes de transporte de gás, comparar os modelos matemáticos que eles empregam para a minimização do custo, estabelecendo o que existe de melhor em cada um deles e o que pode ser melhorado, e finalmente será feito um compêndio unificado desses trabalhos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] MERCADO, Roger Z. R.; WU, Suming; SCOTT, L. Ridgway; BOYD, E. Andrew. **Preprocessing on Natural Gas (Transmission Networks)**.November 2000.

[2] MERCADO, Roger Z. R.; KIM, Seongbae; BOYD, E. Andrew. **Efficient Operation of Natural Gas Transmission Systems: a Network-Based Heuristic for Cyclic Structures**. September. 2004.

[3] WU, Suming; MERCADO, Roger Z. R.; BOYD, E. Andrew; SCOTT, L. Ridgway. **Model Relaxations for the Fuel Cost Minimization of Steady-State Gas Pipeline Networks**. February 1999.

[4] SÁNCHEZ, Conrado Borraz; MERCADO, Roger Z. R.. **Improving the Operation of Pipeline Systems on Cyclic Structures by Tabu Search.** November 2005.

[6] SÁNCHEZ, Conrado Borraz; MERCADO, Roger Z. R.. **A Non-Sequential Dynamic Programming Approach for Natural Gás Network Optimization**. June 2004.