

**CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM UM ELEMENTO
ESTRUTURAL TRELIÇADO UTILIZANDO ALGORITMOS DE
PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR SEM RESTRIÇÃO E ESTUDO DA
CONVERGÊNCIA**

Aline Michelly Silva Moreira

Universidade Federal Fluminense – UFF

Av. dos Trabalhadores, 420, Vila Santa Cecília, Volta Redonda, RJ - CEP: 27225-125

aline_michelly@vm.uff.br

Milena de Andrade Sacramento

Universidade Federal Fluminense – UFF

Av. dos Trabalhadores, 420, Vila Santa Cecília, Volta Redonda, RJ - CEP: 27225-125

milenasacramento@vm.uff.br

Salete Souza de Oliveira Buffoni

Universidade Federal Fluminense – UFF

Av. dos Trabalhadores, 420, Vila Santa Cecília, Volta Redonda, RJ - CEP: 27225-125

salete@vm.uff.br

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver uma formulação e certas estratégias de implementação e comparação de métodos em programação não-linear sem restrição aplicados ao cálculo de deslocamentos em elementos estruturais, apresentando como exemplo a análise e cálculo dos deslocamentos em um elemento de treliça através da formulação da energia potencial mínima. Os deslocamentos foram calculados através dos seguintes métodos: Método Univariante que foi implementado no trabalho de Sacramento & Buffoni (2006), Método das Direções Conjugadas de Powell, Método de Newton Raphson Padrão e Método de Newton Raphson Modificado. Os algoritmos foram implementados em linguagem Fortran. Após a solução do problema se realizam comparações entre os métodos.

Palavras-chaves: Programação Matemática; Otimização sem restrições; Elementos de treliça; Algoritmos.

Abstract

The main aim of the present work is to develop a formulation and some strategies for implementation and comparison of methods in nonlinear programming without restriction applied to the calculation of displacements in structural elements, presenting as example the analysis and calculation of the displacements in a truss element through the formulation of the minimum potential energy. The displacements had been calculated through the following methods: Univariate Method that was implemented in the work of Sacramento & Buffoni (2006), Powell Conjugated Directions Method, Standard Newton Raphson Method and Modified Newton Raphson Method. The algorithms had been implemented in Fortran language. After the solution of the problem it carries through comparisons between the methods.

Word-keys: Mathematical programming; optimization without restrictions; Truss Elements; Algorithms.

1. INTRODUÇÃO

Otimizar é melhorar o que já existe, projetar o novo com mais eficiência e menor custo. A otimização visa determinar a melhor configuração de projeto sem ter que testar todas as possibilidades envolvidas. Problemas de otimização são caracterizados por situações em que se deseja maximizar ou minimizar uma função numérica de várias variáveis, num contexto em que podem existir restrições. Tanto as funções como as restrições dependem dos valores assumidos pelas variáveis de projeto ao longo do procedimento de otimização.

Pode-se aplicar otimização em várias áreas, como por exemplo, no projeto de sistemas ou componentes, planejamento e análise de operações, problemas de otimização de estruturas, otimização de forma, controle de sistemas dinâmicos. A otimização tem como vantagens diminuir o tempo dedicado ao projeto, possibilitar o tratamento simultâneo de uma grande quantidade de variáveis e restrições de difícil visualização gráfica e/ou tabular, possibilitar a obtenção de algo melhor, obtenção de soluções não tradicionais, menor custo. Como limitação se tem o aumento do tempo computacional quando se aumenta o número de variáveis de projeto, podem-se surgir funções descontínuas que apresentam lenta convergência, funções com presença de muitos mínimos locais onde o mínimo global raramente é obtido.

De acordo com vários autores dentre os quais se citam Gill, P. E, Murray, W. & Wright M. (1981), Filho (2004) e Friedlander (1994) uma das subáreas da pesquisa operacional é a programação matemática, que é dividida em Programação Linear e Programação Não-Linear com ou sem restrições. Quando se otimiza um problema, trabalha-se com um modelo que é uma representação simplificada do real, que abrange apenas as variáveis mais relevantes e que exercem maior impacto sobre a solução, porém, a maioria dos problemas possui não-linearidades que é uma melhor representação da realidade.

O presente trabalho apresenta o cálculo dos deslocamentos em uma treliça através da formulação da energia potencial mínima, nesse problema a função-objetivo é uma função não-linear das variáveis de decisão. Apresentam-se uma comparação entre os métodos Univariante, Método das Direções Conjugadas de Powell que é um método de ordem zero, Métodos de Newton Raphson Padrão e Newton Raphson Modificado que são métodos de segunda ordem.

2. MÉTODOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR SEM RESTRIÇÕES

Os métodos de programação não-linear sem restrição dividem-se em três métodos. Os métodos de ordem zero que são utilizados quando o valor da função é obtido com precisão pobre. Pode ser uma função não diferenciável ou altamente não-linear e, portanto, os valores das derivadas (ou gradientes) não são confiáveis e não devem ser utilizados, pois é difícil obter as derivadas de forma precisa. Dessa forma, somente o valor da função-objetivo é utilizado. Entre os mais importantes métodos de ordem zero, há o método univariante e o método das direções conjugadas de Powell. Os métodos de primeira ordem utilizam os valores da função-objetivo e de suas derivadas (gradientes) em relação às variáveis de projeto. Exemplos clássicos destes métodos são o “Steepest Descent”, ou máximo declive, método dos gradientes conjugados e método de Fletcher e Reeves e por fim os métodos de segunda ordem que utilizam os valores da função-objetivo, de suas derivadas e também da matriz Hessiana. Os exemplos mais importantes são os métodos de Newton Raphson Padrão, Newton Raphson Modificado e Quase-Newton.

Os métodos existentes para resolver problemas de Programação Não-Linear sem restrições procuram, inicialmente, encontrar uma direção d a seguir que reduza a função-objetivo, às vezes chamada de direção de busca. Uma vez obtida essa direção, decidem o quanto “andar” nessa direção t . Através desse procedimento, a cada passo, um problema de encontrar n

variáveis x é reduzido a um problema de encontrar uma variável t , como está descrito na equação a seguir:

$$x = x_0 + t d_0 \quad f(x) = f(x_0 + t d_0) = f(t) \quad (1)$$

Onde x_0 é o ponto inicial. O problema de encontrar t pode ser resolvido fazendo uso de técnicas de minimização de uma função de uma variável que são de fácil implementação. Essa etapa é denominada busca unidimensional, e, quando a direção d coincide com a direção de um dos eixos coordenados é denominada busca univariada. O algoritmo seguido pelos métodos de otimização sem restrições é apresentado a seguir:

- Encontrar x_0 e d_0 que reduzam a função-objetivo;
- Encontrar t na direção d_0 que minimize f (busca unidimensional) e obter $x = x_0 + t d_0$;
- Verificar a convergência, e, se satisfeita, pare ($x = x^*$);
- Caso contrário, $x_{i+1} = x$, $i = i+1$ (controle do número de iterações) e voltar à etapa inicial.

Detalhes sobre este assunto podem ser encontrados em Friedlander(1994).

3. MÉTODOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR SEM RESTRIÇÃO IMPLEMENTADOS

3.1. MÉTODO UNIVARIANTE

Por ser um método para resolução de problemas de otimização sem restrições, deve-se trabalhar com uma direção de busca d , que minimize a função-objetivo f , um incremento t e um ponto inicial x_0 . Além disso, somente o valor da função-objetivo f é utilizado, uma vez que este é um método de ordem zero. Dessa forma, tem-se que:

$$x_{k+1} = x_k + t e_k \quad (2)$$

onde e_i são os vetores unitários que são colocados em ordem cíclica e representam as direções de busca a se “caminhar” (d):

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \quad (3)$$

e t são comprimentos de passo negativos ou positivos escolhidos de tal forma que $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

O método se resume em “mudar uma variável de cada vez” (univariante).

?? Algoritmo Univariante

1. Determinar se t é positivo ou negativo, sendo que seu valor deve ser bem pequeno;

2. Partindo de um ponto inicial x_0 escolhido e conhecendo-se t , encontrar o valor de x_{k+1} para uma dada direção e_k na qual se caminha. Verificar se $f(x_{k+1})$ decresce no sentido positivo ou negativo para este e_k , calculando-se $f(x_{k+1}) = f(x_k \pm te_k)$;
3. Se $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, continuar nesta direção dobrar t e testar novamente, voltando ao passo 2. Enquanto f estiver sendo minimizada, a direção e_k é mantida. Caso contrário, parar no último valor x_i bem sucedido na direção e_k e escolher uma nova direção e_{k+1} , voltando portanto, ao passo 1, com t original;
4. Parar quando nenhuma direção e_k melhorar f .

3.2. MÉTODO DAS DIREÇÕES CONJUGADAS DE POWELL

A maior parte dos problemas envolve funções que não são quadráticas. Porém, toda função pode ser bem aproximada por uma quadrática próxima do mínimo. No método das direções conjugadas de Powell, a cada passo a função a ser minimizada é aproximada localmente por uma função quadrática, dada por:

$$f = 1/2x^T Qx + b^T x + c \tag{4}$$

Considere agora um conjunto de direções $d_i, i=1,2,...$ Q -conjugadas, linearmente independentes, ou seja:

$$d_i^T Q d_j = 0 \text{ para } i \neq j \tag{5}$$

Pode ser mostrado que: “Se f for minimizada ao longo de cada direção d definida acima, então o mínimo de f será encontrado no, ou antes, do $n^{ésimo}$ passo independentemente do ponto inicial, dado que erros de arredondamento não sejam acumulados”, onde n é número de variáveis. É importante que as direções sejam linearmente independentes (como definido acima). Caso contrário, não há convergência para o mínimo.

A estratégia de Powell é baseada na seguinte propriedade: Se x_1 e x_2 são dois pontos, d , uma direção especificada e x_{1d} corresponde ao ponto mínimo de f na linha paralela a d iniciando em x_1 e x_{2d} é o ponto de mínimo de f na linha paralela a d iniciando em x_2 , então d e a direção $(x_{2d} - x_{1d})$ serão Q -conjugadas, o que significa que o método de Powell toma m passos univariantes e move na direção $d_k = x_k - x_{k-m}$. O algoritmo seguido pelo método das direções conjugadas de Powell é descrito a seguir:

- 1- Minimizar a função f ao longo das direções coordenadas (busca univariada), iniciando em x_0^k e gerando os pontos x_1^k, \dots, x_n^k onde k é o número do ciclo;
- 2- Após encerrar a busca univariada encontrar o índice m correspondente à direção em que a função f apresenta o maior decréscimo indo de x_{m-1}^k para x_m^k ;
- 3- Calcular a direção “padrão” $d_p^k = x_n^k - x_0^k$ (soma de todos os movimentos univariados) e determinar o valor de t que minimize f tal que: $x = x_0^k + t d_p^k$;
- 4- Se $|t| > \frac{\sqrt{f(x_0^k) - f(x_{m+1}^k)}}{\sqrt{f(x_{m+1}^k) - f(x_m^k)}}$ utilizar as mesmas direções para a próxima busca univariada. - Se a equação NÃO for satisfeita, então substituir a $m^{ésima}$ direção pela direção padrão d_p^k ;?

5- Começar a nova busca univariada com as direções obtidas no passo 4, repetir os passos 2, 3, e 4 até que a convergência seja atingida, ou seja: $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$.

3.3. MÉTODOS DE NEWTON RAPHSON

Os métodos de Newton Raphson Padrão e Newton Raphson Modificado por serem métodos de segunda ordem utilizam os valores da função objetivo, suas derivadas e sua matriz hessiana. O método aqui apresentado é o mais antigo e mais clássico método de otimização sem restrição de segunda ordem.

De acordo com Friedlander (1994) a proposição seguida pelos métodos de Newton Raphson é a seguinte:

Se

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + b^T x + c \tag{6}$$

é uma função quadrática com matriz hessiana H positiva definida, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, a direção $d \in \mathbb{R}^n$ dada por :

$$d = -H^{-1} \nabla f(x_0) \tag{7}$$

Verifica que:

$$x^* = x_0 + d \tag{8}$$

É o minimizador global de f em \mathbb{R}^n , como apresenta a Figura 1.

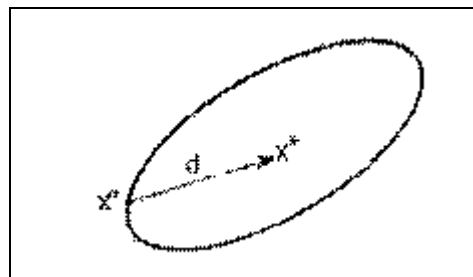


Figura 1 - x^* é o minimizador global de f . (Friedlander ,1994).

O princípio deste método é minimizar uma função f através de uma aproximação local por uma função quadrática. As aproximações quadráticas ganham importância à medida que se aproximam do ponto ótimo do problema, sendo melhores do que as lineares. Próximo de x^k tem-se uma aproximação pela série de Taylor truncada.

$$f(x) \approx f(x_k) + \nabla f(x_k)^T (x - x_k) + \frac{1}{2} (x - x_k)^T H(x_k) (x - x_k) \tag{9}$$

O segundo membro de (9) é minimizado como segue

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k) \tag{10}$$

Esta equação é a forma pura do método de Newton. O valor de Δx_k é interpretado como uma correção na direção oposta ao gradiente da função, de forma a acelerar o processo iterativo.

4. CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS EM UM ELEMENTO DE TRELIÇA UTILIZANDO-SE OS MÉTODOS IMPLEMENTADOS

Deseja-se determinar os deslocamentos (u_1 e u_2) da treliça não-linear apresentada na Figura 2 através da formulação da energia potencial mínima, onde L é o comprimento da barra na direção 1, A é a área da seção transversal, E_1 é o módulo de elasticidade na direção 1, E_2 é o módulo de elasticidade na direção 2 e P é a carga aplicada no ponto B. Os valores das variáveis citadas são dados de entrada no programa implementado e são definidos por:

$$L = 400 \text{ cm}; A = 4 \text{ cm}^2; E_1 = 2 \times 10^6 \text{ kN/cm}^2; E_2 = -2.5 \times 10^8 \text{ kN/cm}^2; P = 8000 \text{ KN} \tag{11}$$

A relação tensão-deformação não-linear é dada por:

$$\sigma = E_1 \epsilon + E_2 \epsilon^2 \tag{12}$$

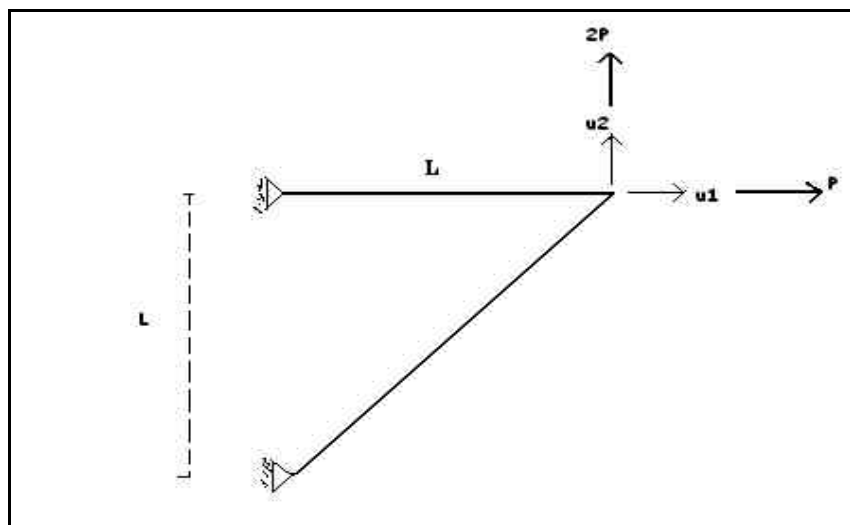


Figura 2 – Treliça Não-Linear. (Sacramento & Buffoni, 2006)

A energia potencial total de um sistema é obtida através do somatório das energias de deformação (U) (Timoshenko & Gere, 1994). As energias (U) são expressas por unidade de volume do material. Considerando-se um elemento sujeito à tensão e deformação, tem-se:

$$u = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon \tag{13}$$

$$U = \int_V u dV \tag{14}$$

Utilizando-se as equações de compatibilidade chegam-se as seguintes expressões:

$$u_1 = \frac{L_1}{L} u_2 \tag{15}$$

$$u_2 = \frac{L_2}{L_2} (\cos 45^\circ u_1 + \cos 45^\circ u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} u_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} u_2 \tag{16}$$

$$u_2 = (u_1 + u_2) \frac{1}{2} \tag{17}$$

Fazendo uso das expressões (13) e (14), chega-se às seguintes expressões para os deslocamentos:

$$U_{1,2} = AL \frac{E_1 u_1^2}{2L^2} + \frac{1}{3} \frac{E_2 u_1^3}{L^3} + AL\sqrt{2} \frac{E_1 (u_1 + u_2)^2}{8L^2} + \frac{E_2 (u_1 + u_2)^3}{24L^3} \tag{18}$$

Dessa forma, a energia potencial é dada pela seguinte expressão:

$$U = AL \frac{E_1 u_1^2}{2L^2} + \frac{1}{3} \frac{E_2 u_1^3}{L^3} + AL\sqrt{2} \frac{E_1 (u_1 + u_2)^2}{8L^2} + \frac{E_2 (u_1 + u_2)^3}{24L^3} + 2Pu_1 + Pu_2 \tag{19}$$

Onde L é o comprimento da barra na direção 1, A é a área da seção transversal, E_1 é o módulo de elasticidade na direção 1, E_2 é o módulo de elasticidade na direção 2 e P é a carga aplicada. A Figura 3 apresenta as curvas de nível para a energia potencial da expressão (19) e verifica-se que esta é mínima próxima aos pontos $u_1 = 0.5$ e $u_2 = 1$.

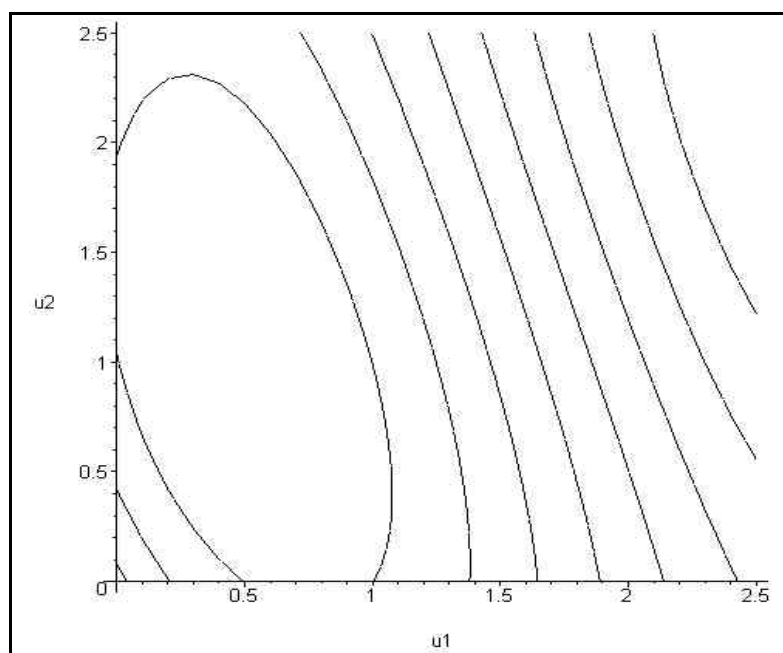


Figura 3 - Curvas de nível da energia potencial. (Sacramento e Buffoni, 2006).

4.1. MÉTODO UNIVARIANTE

O ponto de partida é $x_0 = (0,0)$, ou seja, $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$, com um passo $t = 0.000001$. A Figura 4 apresenta a convergência do método univariante para o ponto $(0.458752, 1.00942)$ no qual a energia potencial se torna mínima para um valor de -7056.556 . A convergência ocorreu depois de 110 iterações. A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos em cada iteração.

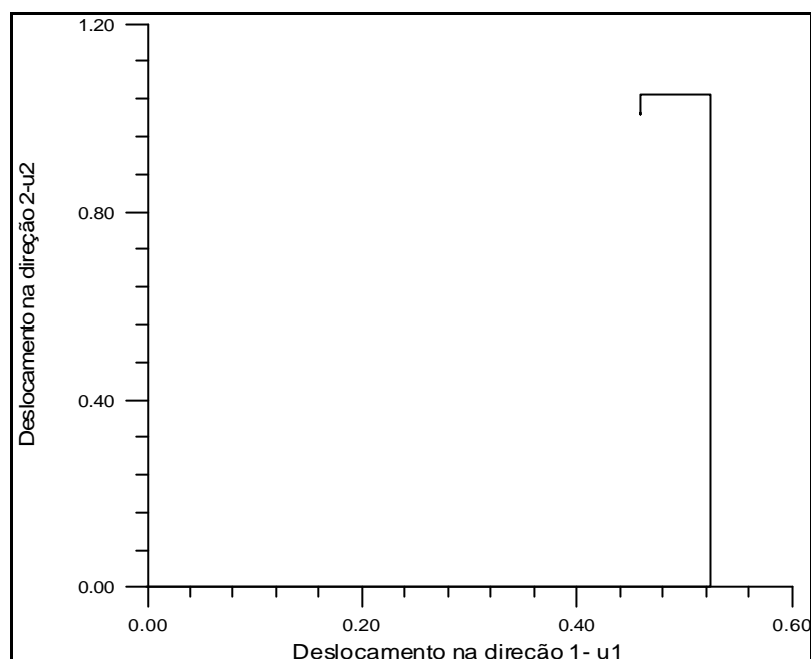


Figura 4 – Convergência do método univariante para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida $(0,0)$. (Sacramento ? Buffoni, 2006).

Tabela 1 – Método univariante – Ponto de partida $(0,0)$. (Sacramento ? Buffoni, 2006)

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (?)
1	0	0	-0.01599999
2	1E-006	0	-0.01599999
3	3E-006	0	-0.04799988
4	7E-006	0	-0.1119993
5	1.5E-005	0	-0.239997
6	3.1E-005	0	-0.495987
7	6.3E-005	0	-1.007946
8	0.000127	0	-2.031782
9	0.000255	0	-4.07912
10	0.000511	0	-8.172466
11	0.001023	0	-16.35384
12	0.002047	0	-32.6953
13	0.004095	0	-65.29319
14	0.008191	0	-130.1492
15	0.016383	0	-258.5058

16	0,032767	0	-509,8255
17	0,065535	0	-991,1171
18	0,131071	0	-1870,121
19	0,262143	0	-3308,304
20	0,524287	0	-5021,3
21	0,524287	1E-006	-5021,305
22	0,524287	3E-006	-5021,314
23	0,524287	7E-006	-5021,333
24	0,524287	1,5E-005	-5021,369
25	0,524287	3,1E-005	-5021,443
26	0,524287	6,3E-005	-5021,59
27	0,524287	0,000127	-5021,884
28	0,524287	0,000255	-5022,472
29	0,524287	0,000511	-5023,648
30	0,524287	0,001023	-5025,999
31	0,524287	0,002047	-5030,697
32	0,524287	0,004095	-5040,073
33	0,524287	0,008191	-5058,752
34	0,524287	0,016383	-5095,812
35	0,524287	0,032767	-5168,75
36	0,524287	0,065535	-5309,934
37	0,524287	0,131071	-5573,801
38	0,524287	0,262143	-6029,705
39	0,524287	0,524287	-6671,613
40	0,524287	1,048575	-7015,154
41	0,524286	1,048575	-7015,155
42	0,524284	1,048575	-7015,157
43	0,52428	1,048575	-7015,162
44	0,524272	1,048575	-7015,171
45	0,524256	1,048575	-7015,189
46	0,524224	1,048575	-7015,226
47	0,52416	1,048575	-7015,3
48	0,524032	1,048575	-7015,448
49	0,523776	1,048575	-7015,742
50	0,523264	1,048575	-7016,328
51	0,52224	1,048575	-7017,485
52	0,520192	1,048575	-7019,746
53	0,516096	1,048575	-7024,052
54	0,507904	1,048575	-7031,799
55	0,49152	1,048575	-7043,806
56	0,458752	1,048575	-7053,644
57	0,458752	1,048574	-7053,644
58	0,458752	1,048572	-7053,645
59	0,458752	1,048568	-7053,645
60	0,458752	1,04856	-7053,647
ITERAÇÃO	μ_1	μ_2	Energia Potencial Mínima ($^{\circ}$)
61	0,458752	1,048544	-7053,649
62	0,458752	1,048512	-7053,654
63	0,458752	1,048448	-7053,663
64	0,458752	1,04832	-7053,682
65	0,458752	1,048064	-7053,72
66	0,458752	1,047552	-7053,794
67	0,458752	1,046528	-7053,94
68	0,458752	1,04448	-7054,22
69	0,458752	1,040384	-7054,732
70	0,458752	1,032192	-7055,568
71	0,458752	1,015808	-7056,478
72	0,458752	1,015807	-7056,478
73	0,458752	1,015805	-7056,478
74	0,458752	1,015801	-7056,478
75	0,458752	1,015793	-7056,478
76	0,458752	1,015777	-7056,478
77	0,458752	1,015745	-7056,479
78	0,458752	1,015681	-7056,481
79	0,458752	1,015553	-7056,484
80	0,458752	1,015297	-7056,49
81	0,458752	1,014785	-7056,501
82	0,458752	1,013761	-7056,52

83	0.458752	1.011713	-7056.546
84	0.458752	1.007617	-7056.549
85	0.458752	1.007618	-7056.549
86	0.458752	1.00762	-7056.549
87	0.458752	1.007624	-7056.549
88	0.458752	1.007632	-7056.549
89	0.458752	1.007648	-7056.55
90	0.458752	1.00768	-7056.55
91	0.458752	1.007744	-7056.55
92	0.458752	1.007872	-7056.551
93	0.458752	1.008128	-7056.552
94	0.458752	1.00864	-7056.554
95	0.458752	1.009664	-7056.555
96	0.458752	1.009663	-7056.555
97	0.458752	1.009661	-7056.555
98	0.458752	1.009657	-7056.555
99	0.458752	1.009649	-7056.556
100	0.458752	1.009633	-7056.556
101	0.458752	1.009601	-7056.556
102	0.458752	1.009537	-7056.556
103	0.458752	1.009409	-7056.556
104	0.458752	1.00941	-7056.556
105	0.458752	1.009412	-7056.556
106	0.458752	1.009416	-7056.556
107	0.458752	1.009424	-7056.556
108	0.458752	1.009423	-7056.556
109	0.458752	1.009421	-7056.556
110	0.458752	1.00942	-7056.556

4.2. MÉTODO DAS DIREÇÕES CONJUGADAS DE POWELL

O objetivo é verificar a convergência do método das direções conjugadas de Powell para os valores de deslocamentos da treliça nas direções 1 e 2 que tomam a energia potencial mínima, onde os valores exatos apresentam-se na Figura 5. Dessa forma, realizaram-se testes para dois casos que são apresentados a seguir.

O ponto de partida é $x_0 = (0,0)$, ou seja, $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$, com um passo $t = 0.000001$. A Figura 5 apresenta a convergência do método das direções conjugadas de Powell para o ponto $(0.4686304, 0.9995436)$ no qual a energia potencial se torna mínima para um valor de -7057.248 . A convergência ocorreu depois de 30 iterações. A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos em cada iteração.

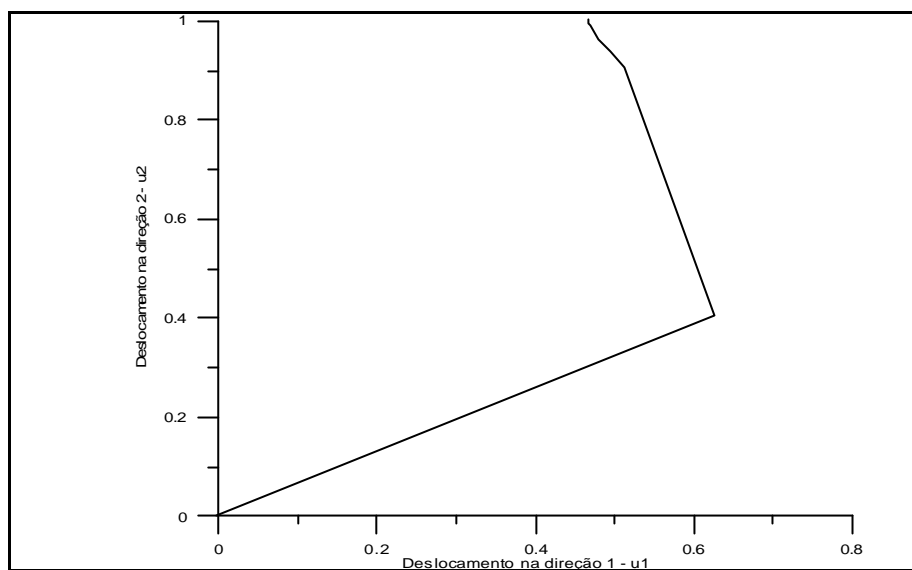


Figura 5 – Convergência do método de Powell para o ponto onde a energia potencial é mínima.
Ponto de partida (0,0).

Tabela 2 – Método de Powell – Ponto de partida (0,0)

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (?)
1	0	0	-0.0159999
2	0.6266127	0.4022441	-6488.465
3	0.5142263	0.9030534	-7037.739
4	0.497187	0.9345962	-7048.978
5	0.4811828	0.9600459	-7054.741
6	0.4702343	0.9893137	-7057.087
7	0.4696954	0.9936308	-7057.195
8	0.4694637	0.9971546	-7057.238
9	0.4690671	0.9982404	-7057.245
10	0.4688735	0.9987917	-7057.247
11	0.4688735	0.9992333	-7057.247
12	0.4686572	0.9993771	-7057.248
13	0.4686465	0.9994478	-7057.248
14	0.4686424	0.9995034	-7057.248
15	0.4686373	0.9995189	-7057.248
16	0.4686341	0.9995336	-7057.248
17	0.4686326	0.9995386	-7057.248
18	0.4686323	0.9995386	-7057.248
19	0.4686317	0.9995413	-7057.248
20	0.4686315	0.9995413	-7057.248
21	0.4686312	0.9995417	-7057.248
22	0.4686306	0.9995431	-7057.248
23	0.4686305	0.9995433	-7057.248
24	0.4686305	0.9995435	-7057.248
25	0.4686304	0.9995435	-7057.248

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial
26	0.4686304	0.9995436	-7057.248
27	0.4686304	0.9995436	-7057.248
28	0.4686304	0.9995436	-7057.248
29	0.4686304	0.9995436	-7057.248
30	0.4686304	0.9995436	-7057.248

4.3. MÉTODO DE NEWTON RAPHSON PADRÃO

O objetivo é verificar a convergência do método de Newton Raphson Padrão para os valores de deslocamentos da treliça nas direções 1 e 2 que tornam a energia potencial mínima. Os resultados apresentam-se na Figura 6.

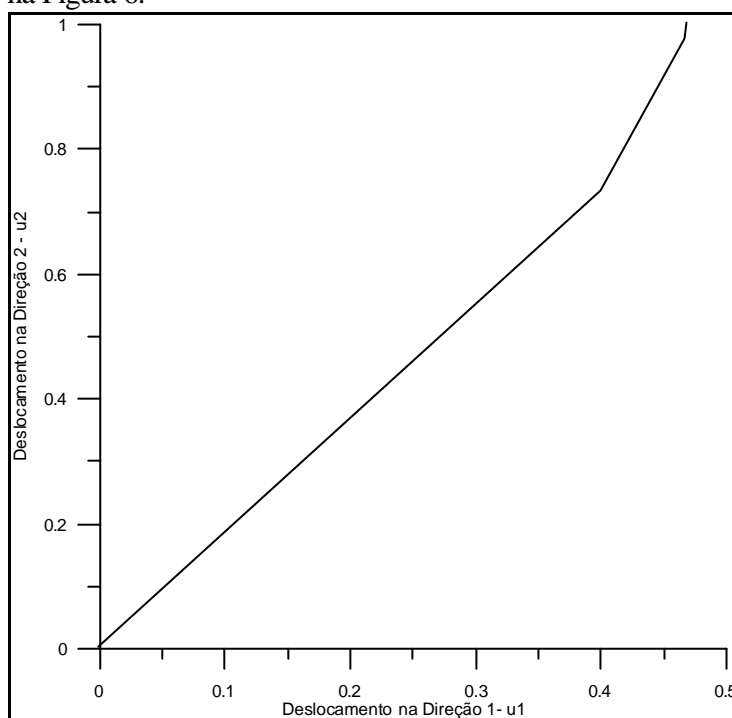


Figura 6 - Convergência do método de Newton Raphson Padrão para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0)

Tabela 3- Método de Newton Raphson Padrão – Ponto de partida (0,0).

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (?)
1	0	0	0
2	0.4	0.7313709	-6792.15
3	0.4666667	0.9740878	-7055.774
4	0.4686275	0.9993314	-7057.247
5	0.4686292	0.9995434	-7057.248

O ponto de partida é $x_0 = (0,0)$, ou seja, $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$, com um passo $t = 0.000001$. A Figura 6 apresenta a convergência do método de Newton Raphson Padrão para o ponto $(0.4686292, 0.9995434)$ no qual a energia potencial se torna mínima para um valor de $-7057,248$. A convergência ocorreu depois de 5 iterações. A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos em cada iteração.

4.4. MÉTODO DE NEWTON RAPHSON MODIFICADO

O objetivo é verificar a convergência do método de Newton Raphson Padrão para os valores de deslocamentos da treliça nas direções 1 e 2 que tornam a energia potencial mínima. Os resultados apresentam-se na Figura 7.

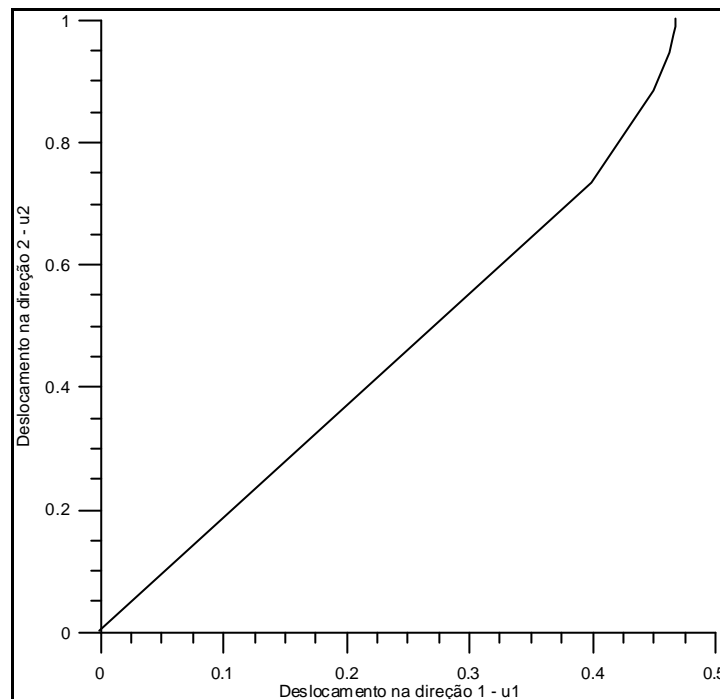


Figura 7 - Convergência do método de Newton Raphson Modificado para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida $(0,0)$

O ponto de partida é $x_0 = (0,0)$, ou seja, $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$, com um passo $t = 0.000001$. A Figura 6 apresenta a convergência do método de Newton Raphson Padrão para o ponto $(0.4686291, 0.9995324)$ no qual a energia potencial se torna mínima para um valor de $-7057,248$. A convergência ocorreu depois de 15 iterações. A Tabela 4 apresenta os resultados obtidos em cada iteração.

Tabela 4 - Método de Newton Raphson Modificado – Ponto de partida $(0,0)$.

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (?)
1	0	0	0
2	0.4	0.7313709	-6792.15

3	0.45	0.8813709	-7018.028
4	0.4632813	0.9450503	-7050.114
5	0.4670717	0.974205	-7055.839
6	0.4681737	0.9877719	-7056.959
7	0.4684958	0.9940903	-7057.188
8	0.4685901	0.9970242	-7057.235
9	0.4686177	0.9983821	-7057.245
ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (?)
10	0.4686258	0.9990089	-7057.247
11	0.4686282	0.9992976	-7057.247
12	0.4686289	0.9994305	-7057.248
13	0.4686291	0.9994915	-7057.248
14	0.4686291	0.9995196	-7057.248
15	0.4686291	0.9995324	-7057.248

A Tabela 5 apresenta uma comparação entre todos os métodos implementados e verifica-se que os métodos de Newton Raphson possuem uma convergência para solução ótima com menos iterações.

Tabela 5 – Comparação entre os métodos

Método	Ponto de Partida	Número de Iterações	Deslocamentos		Energia Potencial Mínima (?)
			u_1	u_2	
Univariante	(0,0)	110	0.458752	1.00942	-7056.556
Powell	(0,0)	30	0.4686304	0.9995436	-7057.248
Newton Raphson Padrão	(0,0)	5	0.4686292	0.9995434	-7057,248
Newton Raphson Modificado	(0,0)	15	0.4686291	0.9995324	-7057.248

5. CONCLUSÕES

Para o problema resolvido através dos algoritmos de minimização, pode-se observar que os métodos de Newton Raphson são os mais eficientes se comparados com os método univariante ou com o método de Powell como apresenta a Tabela 5. Nota-se que o método univariante é o menos eficiente em relação aos resultados dos outros métodos.

A partir dos resultados obtidos pretende-se continuar o estudo dos métodos em programação não-linear sem restrições e estudar matematicamente a convergência para diversos casos, para então partir aos métodos de programação não-linear com restrições que refletem a realidade.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FILHO, J. V. C. *Pesquisa Operacional – Técnicas de Otimização Aplicadas a Sistemas Agroindustriais*. 2^a. Edição. Editora Atlas. 2004, São Paulo..
- [2] GILL, P. E; MURRAY, W.; WRIGHT, M. *Practical optimization*. Academic Press, 1981. Nova York
- [3] FRIEDLANDER, A. *Elementos de Programação Não-Linear*. Editora Unicamp. Campinas. 1994. São Paulo.
- [4] TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. *Mecânica dos Sólidos*. LTC Editora, 1994. Rio de Janeiro.
- [5] SACRAMENTO, M.A., BUFFONI, S.S.O. *Programação Não-Linear Aplicada ao Cálculo de Deslocamentos em Elementos de Treliça*. Profundão – 10º Encontro de Engenharia de Produção da UFRJ, 2006.