

COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS DE ANÁLISE DE ENVOLTÓRIA DE DADOS COM VARIÁVEIS DE SOMA CONSTANTE

Eliane Gonçalves Gomes

Embrapa - SGE

Parque Estação Biológica, W3 Norte final, Asa Norte, 70770-901, Brasília, DF

eliane.gomes@embrapa.br

José Virgílio Guedes de Avellar

Instituto de Estudos Avançados - IEAv

Rodovia dos Tamoios km 5.5, Torrão de Ouro, 12228-460, São José dos Campos, SP

avellar@ieav.cta.br

Resumo

Os modelos de Análise de Envoltória de Dados (DEA) clássicos supõem total liberdade de produção (ou de uso dos recursos), ou seja, a produção (ou uso dos insumos) de uma DMU não afeta a produção (ou uso dos recursos) das demais. Entretanto, em alguns casos essa liberdade não existe. Para contornar essa limitação, foram propostos dois modelos tipo DEA: o Modelo de Fronteira Hiperbólica (MFH) e o modelo DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ). Neste artigo, esses dois modelos são comparados e aplicados a dois casos de estudo, na distribuição de medalhas para alguns países nas Olimpíadas de Sidney e na realocação do número de aprovados em um concurso vestibular.

Palavras-chave: DEA; Modelo de fronteira hiperbólica; Modelo DEA com ganhos de soma zero; Soma constante de variáveis; Olimpíadas; Vestibular.

Abstract

The traditional Data Envelopment Analysis (DEA) models assume that there is complete freedom of production (or resources use), i.e., the production (or resources consumption) of a given DMU does not affect the production (or inputs use) of the others. In some cases, however, this freedom does not exist. To overcome this limitation, in the literature were proposed two DEA-type models: the Hyperbolic Frontier Model (HFM) and the Zero Sum Gains DEA model (ZSG-DEA). In this paper, we compare and apply these models in two case studies, on the medals distribution for some countries that were in Sidney Olympic Games and in the reallocation of the quantity of approved students in the “vestibular”.

Keywords: DEA; Hyperbolic frontier model; Zero sum gains DEA model; Variables with constant sum; Olympic games; “Vestibular”.

1. INTRODUÇÃO

O conceito de fronteira de produção, que está relacionado ao processo físico no qual os *inputs* (recursos ou fatores de produção) são combinados para gerar *outputs* (resultados ou produtos), pode ser definido como sendo a máxima quantidade de *outputs* que podem ser produzidos a partir de uma quantidade fixa de *inputs*, ou ainda, a menor quantidade de *inputs* que é necessária ao processo para determinar-se uma quantidade fixa de *outputs*.

Dois enfoques podem ser usados para a determinação de uma fronteira de produção: o enfoque paramétrico e o não-paramétrico. O primeiro possui como característica o fato de basear-se em uma função de produção definida, valendo-se, para isso, de técnicas estatísticas,

como o método dos mínimos quadrados, que utiliza como referência a linha de tendência central. O grande problema deste tipo de método é que o mesmo tem como resultado uma função média de produção e não uma função máxima, como determina a definição teórica de fronteira de produção (Angulo Meza, 2002). Já o enfoque não-paramétrico tem início com Koopmans (1951), que define o processo produtivo como sendo um vetor *input/output* a partir do qual não é possível incrementar qualquer *output* sem reduzir outro *output* ou, ainda, reduzir qualquer *input* sem incrementar qualquer outro *input*.

Com base no índice de eficiência desenvolvido por Koopmans e no critério de eficiência de Pareto, a Análise de Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis – DEA*) surgiu em 1978 (Charnes *et al.*, 1978). As unidades em avaliação são comparadas de acordo com o conceito de eficiência de Farrell (Farrel e Fieldhouse, 1962), que consiste na razão entre a soma ponderada dos *outputs* y e a soma ponderada dos *inputs* x de cada unidade.

DEA é uma ferramenta da estatística não-paramétrica que tem como principal objetivo medir a eficiência relativa de diferentes entidades de um gênero comum e estabelecer metas de eficiência (com base na identificação de *benchmarks*) para as entidades consideradas aquém da fronteira de eficiência. Usa para tal, a comparação dos diversos *inputs* e *outputs* dos processos realizados nas entidades avaliadas, denominadas *Decision Making Units* (DMUs). A medida de eficiência, cujo cálculo é feito de maneira relativa, baseada em observações reais, está contida no intervalo $[0,1]$, ou seja, todas as DMUs devem estar abaixo ou na fronteira de eficiência.

Enquanto os modelos clássicos de DEA baseiam-se em liberdade total de ação, tanto na utilização de recursos como na produção de bens, há casos em que essa liberdade não existe (Gomes, 2003). No caso de competições, por exemplo, se for considerado como *output* o resultado final, a melhora de posição de qualquer competidor implica na perda de posição de um ou mais de seus adversários. Um outro exemplo é o caso da avaliação de eficiência de unidades produtivas que produzem um produto de demanda constante; uma certa DMU considerada ineficiente deverá produzir mais unidades do produto para atingir a fronteira de eficiência, com a conseqüente diminuição da produção das demais unidades produtivas.

A literatura sobre esse tema em DEA é bastante recente. Beasley (2003) ressaltou que o artigo escrito por Cook e Kress (1999) foi o primeiro a relacionar um problema de alocação de custos fixos com a metodologia DEA. Os autores indicam que no caso de um modelo com um *input* e um *output*, os custos fixos são alocados para cada DMU proporcionalmente em relação à quantidade total de *inputs*. A limitação dessa abordagem é que a alocação é feita apenas com base na quantidade de *inputs* e, dessa forma, o fato de haver DMUs com a mesma quantidade de *inputs* é suficiente para que recebam a mesma soma de recursos, independentemente de possuírem *outputs* em quantidades diferentes (ou seja, valores de eficiência diferentes).

O modelo de Villa e Lozano (2004) e Lozano e Villa (2004), chamado de *Constant Sum of Outputs* (CSO) refere-se à tomada de decisão centralizada em relação à alocação de recursos. Os autores propõem um modelo DEA BCC, em duas fases, no qual a maximização de eficiência de cada DMU individual é feita simultaneamente à minimização do total de recursos ou maximização da produção total.

Outros modelos tipo DEA que admitem a restrição de soma constante de variáveis são o Modelo de Fronteira Hiperbólica (MFH) (Avellar, 2004; Avellar *et al.*, 2005) e o modelo DEA com Ganhos Soma Zero (DEA-GSZ) (Estellita Lins *et al.*, 2003; Gomes, 2003; Gomes *et al.*, 2003, 2004, 2005). O primeiro é empregado ao caso DEA CCR, e o segundo aos casos CCR e BCC, com ou sem restrições aos pesos dos multiplicadores. O uso desses dois modelos resulta em uma fronteira DEA em que todas as DMUs são 100% eficientes, ou seja, ambos os modelos propõem a melhor, ou mais justa, distribuição para a variável limitada.

Neste artigo são apresentados e comparados os modelos MFH e DEA-GSZ, para o

caso DEA CCR com variável de *output* limitada. Esses modelos são aplicados a dois casos de estudo, a saber, o da distribuição de medalhas para alguns países que participaram das Olimpíadas de Sidney em 2000 e para o caso da realocação/redistribuição do número de aprovados em um concurso vestibular.

O artigo está assim organizado: na seção 2 são apresentados os fundamentos dos modelos DEA clássicos; na seção 3 descrevem-se os modelos MFH e DEA-GSZ. Os resultados do uso desses modelos para os dois exemplos são mostrados na seção 4. Conclusões e propostas futuras são apresentadas na seção 5, seguidas das referências bibliográficas.

2. ANÁLISE DE ENVOLTÓRIA DE DADOS

DEA possui como objetivo calcular a eficiência de unidades produtivas, conhecendo-se os níveis de recursos utilizados e de resultados obtidos. Em sua formulação, usa problemas de programação linear (PPLs) que otimizam cada observação individual de modo a estimar uma fronteira eficiente (linear por partes), composta das unidades que apresentam as melhores práticas dentro da amostra em avaliação (unidades Pareto-Koopmans eficientes). Essas unidades servem como referência ou *benchmark* para as unidades ineficientes.

A eficiência relativa de uma DMU é definida como a razão da soma ponderada de produtos pela soma ponderada de insumos necessários para gerá-los. Os pesos usados nas ponderações são obtidos de um programa de programação fracionária, posteriormente linearizado, que atribui a cada DMU os pesos que maximizam a sua eficiência.

A vantagem de DEA frente a outros modelos de produção é a capacidade de incorporar múltiplos *inputs* (entradas, recursos, insumos ou fatores de produção) e múltiplos *outputs* (saídas ou produtos) para o cálculo de uma medida de eficiência única. Em princípio, a formulação de DEA permite total flexibilidade na escolha dos pesos; modelos mais avançados permitem incorporar restrições aos pesos (Allen *et al.*, 1997), provenientes dos julgamentos dos especialistas a respeito da importância relativa de cada variável.

Há dois modelos DEA clássicos. O modelo CCR (também conhecido por CRS ou *constant returns to scale*) trabalha com retornos constantes de escala (Charnes *et al.*, 1978) e assume proporcionalidade entre *inputs* e *outputs*. O modelo BCC ou VRS (*variable returns to scale*), devido a Banker *et al.* (1984), considera retornos variáveis de escala, ou seja, substitui o axioma da proporcionalidade pelo axioma da convexidade. Tradicionalmente são possíveis duas orientações radiais para esses modelos na busca da fronteira de eficiência: orientação a *inputs*, quando se deseja minimizar os recursos disponíveis, sem alteração do nível de produção; orientação a *outputs*, quando o objetivo é aumentar as quantidades produzidas, sem mexer nas quantidades dos recursos usados.

Existem duas formulações equivalentes para DEA (PPLs duais). De forma simplificada, pode-se dizer que uma das formulações (modelo dos Multiplicadores) trabalha com a razão de somas ponderadas de produtos e recursos, com a ponderação escolhida de forma mais favorável a cada DMU, respeitando-se determinadas condições. A outra formulação (modelo do Envelope) define uma região viável de produção e trabalha com uma projeção de cada DMU na fronteira dessa região; as DMUs ineficientes localizam-se abaixo da fronteira de eficiência e as eficientes na fronteira.

Em (1) e em (2) apresentam-se, respectivamente, o modelo DEA CCR dos Multiplicadores e do Envelope, com orientação a *outputs*. Considera-se que cada DMU k , $k=1\dots n$, é uma unidade de produção que utiliza r *inputs* x_{ik} , $i=1\dots r$, para produzir s *outputs* y_{jk} , $j=1\dots s$; x_{io} e y_{jo} são os *inputs* e *outputs* da DMU o . Em (1), v_i e u_j são os pesos calculados pelo modelo para *inputs* e *outputs*, respectivamente. Em (2), a eficiência da DMU o em análise é dada por $1/h_o$ e λ_k representa a contribuição da DMU k na formação do alvo da DMU o .

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sum_{i=1}^r v_i x_{io} \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} = 1 \\
 & - \sum_{i=1}^r v_i x_{ik} + \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} \leq 0, \forall k \\
 & u_j, v_i \geq 0, \forall j, i
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } h_o \\
 & \text{sujeito a} \\
 & x_{io} - \sum_{k=1}^n x_{ik} \lambda_k \geq 0, \forall i \\
 & -h_o y_{jo} + \sum_{k=1}^n y_{jk} \lambda_k \geq 0, \forall j \\
 & \lambda_k \geq 0, \forall k
 \end{aligned} \tag{2}$$

3. MODELOS DEA COM VARIÁVEIS DE SOMA CONSTANTE

3.1. MODELO DEA DE FRONTEIRA HIPERBÓLICA

MFH é um tipo de modelo DEA com soma constante de *outputs* que visa a distribuição justa de uma determinada meta total da corporação (como o número total de medalhas olímpicas) a um conjunto de entidades de natureza comum (como um conjunto de países), considerando simultaneamente todos os outros insumos empregados e produtos gerados em cada uma dessas entidades (Avellar, 2004; Avellar *et al.*, 2005).

Com base no fato de que em um problema com r *inputs* e apenas um *output*, a fronteira DEA CCR tem formato convexo (Cooper *et al.*, 2000; Soares de Mello, 2002), foi usada como hipótese a existência de um lugar geométrico em formato hiperbólico, assegurando essa convexidade. Neste modelo, os *inputs* relacionam-se com um *output* constante M_T a ser distribuído a todas as DMUs. No MFH busca-se, dentre uma família de hipérbolas que representam diferentes possíveis fronteiras de eficiência, aquela que satisfaz à condição de posicionar todas as DMUs k sobre a mesma hipérbole, assegurando, simultaneamente, que a soma dos valores de M_k seja igual à meta total M_T .

A Figura 1 (Avellar *et al.*, 2005) ilustra o conceito para o caso em que há apenas dois *inputs*. Nela estão representadas as radiais ou retas caminho sobre as quais as DMUs (que são representadas pelos pontos) movimentam-se conforme variem os valores do *output* M_k a ser distribuído a cada DMU. Na Figura 1, os *inputs* reais de cada DMU estão escalonados, isto é, foram divididos pelo maior valor de *input* existente em cada um dos eixos. O que se deseja são os valores de *outputs* M_k que formem um lugar geométrico correspondente a uma hipérbole e que somados resultem na meta total M_T , pré-estabelecida, que se deseja distribuir.

Além de alocar para as DMUs um *output* total baseado nos *inputs* existentes, o MFH também pode levar em conta a influência de outros *outputs* eventualmente gerados em cada DMU. O princípio é o mesmo, ou seja, busca-se dentre uma família de hipérbolas aquela que irá satisfazer à condição de posicionar todas as DMUs sobre a fronteira de eficiência, de maneira que a soma das M_k seja igual à meta total M_T .

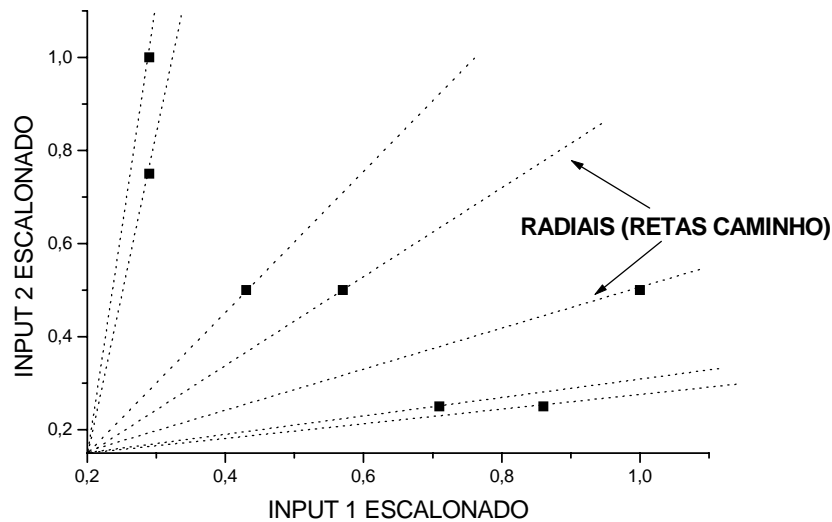


Figura 1. Representação das radiais no MFH.

Inicia-se a formulação considerando o caso em que cada DMU tem apenas dois *inputs*, *s outputs* e há um novo *output* a ser distribuído entre elas, cuja soma é igual a M_T . Definem-se as seguintes variáveis: x_{1k} é o valor do *input* 1 da DMU k ; x_{2k} é o valor do *input* 2 da DMU k ; a_1 é o valor máximo do *input* 1; a_2 é o valor máximo do *input* 2; M_T é a meta total para o grupo de DMUs; M_k é o valor de *output* de cada DMU, a ser calculado; y_{jk} é o valor do *output* j da DMU k , $j=1\dots s$; b_j é o maior valor de cada *output* j .

O denominador da coordenada de cada eixo terá o valor da meta M_k mais o somatório de todos os *s outputs* escalonados relativos à DMU k . O escalonamento assegura a adimensionalidade e permite que haja um critério de proporção quando consideram-se variáveis de diferentes dimensões.

Como visto, no MFH apenas um *output* é distribuído (M_k), sendo que os demais *outputs* são dados e influenciam na distribuição deste. Para dois *inputs* têm-se as expressões (3) e (4), onde γ_{1k}' e γ_{2k}' são, respectivamente, os valores das coordenadas dos eixos 1 (abscissa) e 2 (ordenada) das DMUs k .

$$\gamma_{1k}' = \left(\frac{1}{\left(M_k + \sum_{j=1}^s \frac{y_{jk}}{b_j} \right)} \cdot \frac{x_{1k}}{a_1} \right) \tag{3}$$

$$\gamma_{2k}' = \left(\frac{1}{\left(M_k + \sum_{j=1}^s \frac{y_{jk}}{b_j} \right)} \cdot \frac{x_{2k}}{a_2} \right) \tag{4}$$

A hipérbole caracterizada pela constante C , centrada no ponto $(0,0)$, já que zero é considerado o valor mínimo de *input/output* a ser representado, conterá todos os pontos γ_{ik}' , $i = 1,2$, com as condições apresentadas em (5), (6) e (7).

$$\gamma_{1k} \cdot \gamma_{2k} = \left(\frac{1}{\left(M_k + \sum_{j=1}^s \frac{y_{jk}}{b_j} \right)} \cdot \frac{x_{1k}}{a_1} \right) \left(\frac{1}{\left(M_k + \sum_{j=1}^s \frac{y_{jk}}{b_j} \right)} \cdot \frac{x_{2k}}{a_2} \right) = C \Rightarrow M_k = \frac{1}{C^{1/2}} \cdot \left(\frac{x_{1k} \cdot x_{2k}}{a_1 \cdot a_2} \right)^{1/2} - \sum_{j=1}^s \frac{y_{jk}}{b_j} \tag{5}$$

$$M_T = \sum_{k=1}^n M_k \Rightarrow M_T = \frac{1}{C^{1/2}} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n (x_{1k} \cdot x_{2k})^{1/2}}{(a_1 \cdot a_2)^{1/2}} - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^s \frac{y_{jk}}{b_j} \tag{6}$$

$$\frac{1}{C^{1/2}} = \frac{\left(M_T + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^s \frac{y_{jk}}{b_j} \right) (a_1 \cdot a_2)^{1/2}}{\sum_{k=1}^n (x_{1k} \cdot x_{2k})^{1/2}} \tag{7}$$

De (5) e (7), tem-se (8).

$$M_k = \frac{\left(M_T + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^s \frac{y_{jk}}{b_j} \right) (x_{1k} \cdot x_{2k})^{1/2}}{\sum_{k=1}^n (x_{1k} \cdot x_{2k})^{1/2}} - \sum_{j=1}^s \frac{y_{jk}}{b_j} \tag{8}$$

A representação da fronteira CCR do modelo MFH para dois *inputs* e $(s+1)$ *outputs* está representada na Figura 2 (Avellar *et al.*, 2005). Os $(s+1)$ *outputs* equivalem aos s *outputs* que influenciam na distribuição de M_T mais a meta M_k , incógnita do problema.

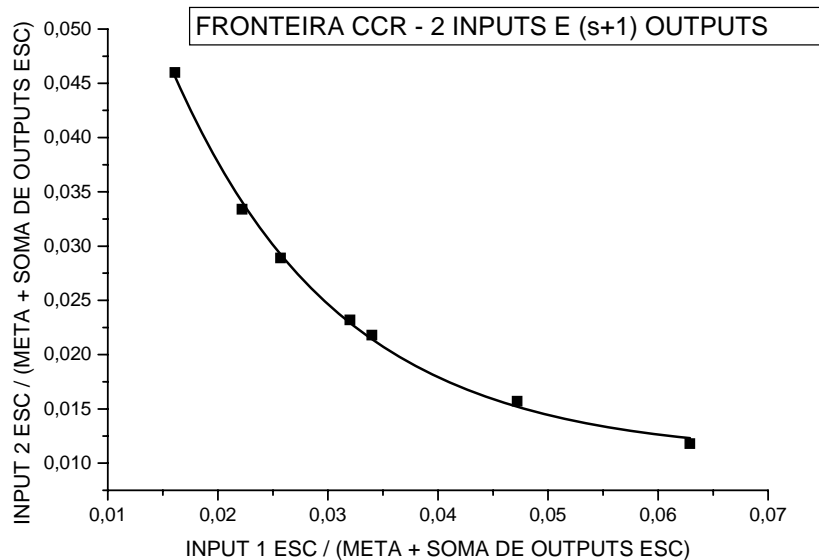


Figura 2. Representação gráfica da fronteira hiperbólica do MFH.

Avellar (2004) generalizou o problema de distribuição de metas M_k em presença de s *outputs* e r *inputs*, obtendo a expressão (9).

$$M_k = \frac{\left(M_T + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^s \frac{y_{jk}}{b_j} \right) \left(\prod_{i=1}^r x_{ik} \right)^{1/r}}{\sum_{k=1}^n \left(\prod_{i=1}^r x_{ik} \right)^{1/r}} - \sum_{j=1}^s \frac{y_{jk}}{b_j} \tag{9}$$

3.2. MODELO DEA COM GANHOS DE SOMA ZERO

Nesta classe de modelos (Gomes, 2003; Estellita Lins *et al.*, 2003; Gomes *et al.*, 2003, 2004, 2005), uma DMU ineficiente que busque a fronteira pelo aumento de *outputs* (ou redução de *inputs*) impõe às demais a redução de seus *outputs* (ou aumento de seus *inputs*), com o conseqüente deslocamento da fronteira original, para que a soma total seja mantida constante. Esta situação é semelhante a um jogo com soma zero, no qual o que é ganho por um jogador deve ser perdido pelos demais.

A Figura 3 mostra um trecho da fronteira para o caso bidimensional, segundo o modelo DEA-GSZ CCR, orientado a *outputs*. A DMU *o* ineficiente receberá uma determinada quantidade de *output* para pertencer à fronteira. O ganho *z* é o quanto a DMU *o* deverá ganhar para atingir a fronteira eficiente, que corresponde à perda das demais DMUs. *z* pode ser definido por $z = h_{Ro} y_o - y_o = \sum_{j \neq o} y_j - y_j'$, onde h_{Ro} é o inverso da eficiência da DMU *o* sob a condição de soma de *outputs* constante (modelo orientado a *output*) e y_j' são os novos *outputs* das DMUs restantes que incorporam a perda de *output* devido ao ganho da DMU *o*, de forma que a soma seja mantida constante, ou seja, $y_j' = f_j(h_{Ro})$.

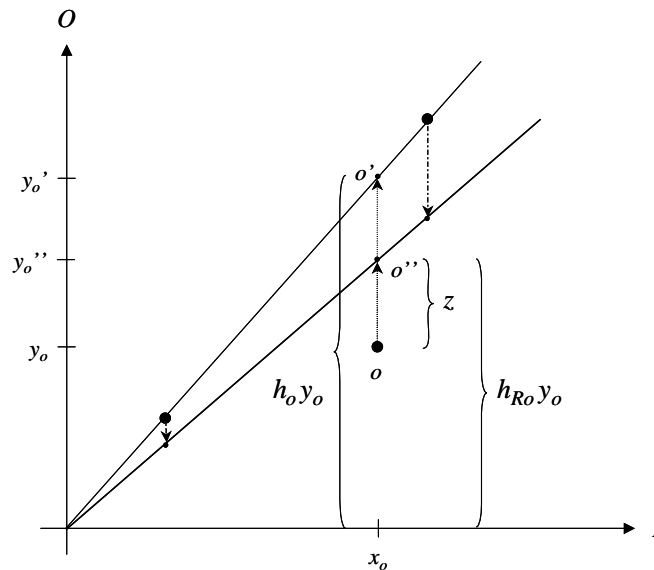


Figura 3. Trecho da fronteira CCR sob o paradigma DEA-GSZ.

Em alguns casos, podem-se encontrar barreiras práticas na realização em curto prazo dos alvos calculados; uma determinada DMU que busca eficiência pode não ser capaz de alcançar aquele alvo que lhe é atribuído (Gomes, 2003; Gomes *et al.*, 2003). Os autores propõem neste caso uma busca de alvos por etapas (estratégia de busca seqüencial), com alvos intermediários nas camadas de iso-eficiências. No caso em que todas as DMUs eficientes formam um único grupo de cooperação na busca pela eficiência, é possível criar uma situação em que é feita uma redistribuição global da variável restrita, obtendo-se uma fronteira DEA uniformizada, em que todas as DMUs são DEA eficientes.

A busca pela fronteira de eficiência pode ser realizada segundo diferentes estratégias. De particular interesse é a estratégia de redução proporcional, na qual a redução dos *outputs*

(ou aumento dos *inputs*) é proporcional ao nível inicial de *outputs* (ou *inputs*) da DMU. Essa estratégia possibilitou a formulação de dois teoremas (Gomes, 2003) que permitem a simplificação do problema. Esses teoremas são o teorema da Igualdade das Contribuições das DMUs de Referência (“no modelo DEA-GSZ em que seja adotada uma estratégia que não altere a composição da fronteira eficiente, exceto pela DMU que busca o alvo, o valor da contribuição das DMUs k é igual ao seu valor no modelo DEA clássico”) e o teorema da Determinação do Alvo (“o alvo da DMU em análise no DEA-GSZ de estratégia proporcional é igual ao alvo no caso clássico multiplicado pelo coeficiente de redução”).

Para o caso de uma estratégia qualquer de redução, o modelo multiobjetivo deve ser resolvido com o uso de técnicas de programação não linear multiobjetivo. Problemas deste tipo conduzem freqüentemente ao uso de metaheurísticas. No entanto, para a estratégia de redução proporcional, em especial para o modelo CCR, Gomes (2003) e Gomes *et al.* (2005) provam que o modelo é reduzido a um modelo de programação não linear mono-objetivo, segundo o teorema da Proporcionalidade das Eficiências em Estratégia Proporcional (Gomes, 2003; Gomes *et al.*, 2003), cujo enunciado diz: “Considere-se o problema de várias DMUs em cooperação na busca de alvos com estratégia proporcional. As eficiências das DMUs no modelo DEA-GSZ são diretamente proporcionais às suas eficiências no modelo DEA clássico”. Como consequência, ao considerar-se o caso em que várias DMUs atuam em cooperação na busca de alvos com estratégia proporcional, o problema de programação não linear multiobjetivo é reduzido a um problema de programação não linear mono-objetivo.

No caso em que todas as DMUs ineficientes formam um único grupo de cooperação e buscam eficiência na fronteira de eficiência DEA clássica, a aplicação do modelo DEA-GSZ fará com que ocorra a redistribuição global do *input* ou do *output* de soma constante. Após essa redistribuição, todas as DMUs pertencerão à fronteira eficiente, ou seja, todas serão 100% eficientes, gerando uma situação chamada de fronteira uniformizada.

A fronteira DEA uniformizada estará localizada em níveis inferiores aos da fronteira DEA do modelo clássico, já que as DMUs eficientes perdem unidades de *output* (ou ganham unidades de *input*) para compensar o ganho (ou perda) das unidades ineficientes, de modo a manter a soma constante. Esta situação de “eficientização” máxima pode ser vista como “ideal” por órgãos reguladores, já que será apresentada ao decisor a distribuição de recursos (ou produtos) que faz com que todas as unidades sejam 100% eficientes.

Para a construção da fronteira uniformizada de forma direta, em que as DMUs ineficientes formam um grupo de cooperação W , segundo o modelo DEA CCR tem-se as equações (10), para orientação a *inputs*, e (11), para orientação a *outputs*, que representam o teorema da Determinação do Alvo. Nessas equações, h_{Ri} e h_i são, respectivamente, as eficiências nos modelos DEA-GSZ CCR e DEA CCR clássico; W é o grupo de DMUs em cooperação; $r_{ij} = h_{i-I}/h_{j-I}$ é o fator de proporcionalidade resultante do emprego da estratégia proporcional, na orientação a *inputs*; $q_{ij} = h_{i-O}/h_{j-O}$ é o fator de proporcionalidade na orientação a *outputs*. Para os modelos DEA BCC orientados a *outputs* e a *inputs* são derivadas expressões análogas (Gomes, 2003).

$$h_{Ri} = h_i \left(1 + \frac{\sum_{j \in W} [x_j (1 - r_{ij} h_{Ri})]}{\sum_{j \in W} x_j} \right) \quad (10)$$

$$h_{Ri} = h_i \left(1 - \frac{\sum_{j \in W} [y_j (q_{ij} h_{Ri} - 1)]}{\sum_{j \in W} y_j} \right) \quad (11)$$

Uma restrição desta classe de modelos é que os desenvolvimentos feitos até o momento para a obtenção da fronteira uniformizada restringem-se a modelos com *input* ou *output* único de soma constante.

4. APLICAÇÃO DOS MODELOS MFH E DEA-GSZ

4.1. REDISTRIBUIÇÃO DE PONTOS OLÍMPICOS

Em Estellita Lins *et al.* (2003) é feito um ranking de 79 países nas Olimpíadas de Sidney, usando DEA para classificá-los de acordo com a sua eficiência. Os *inputs* representavam os argumentos de que quanto maior a população do país, maiores as chances de ganhar medalhas (*input* População) e que condições apropriadas ao treinamento também propiciam melhores chances de obtenção de medalhas (*input* PIB). Esse estudo de caso foi usado por Villa e Lozano (2004) para comparar os resultados dos modelos CSO e DEA-GSZ.

Assume-se aqui que o *input* associado à habilidade em produzir bons atletas e, conseqüentemente, ganhar medalhas, é melhor representado pelo Índice de Desenvolvimento Humano do que pelo PIB. Países com baixo PIB e população pequena, como Cuba, têm vantagens segundo a ótica de Estellita Lins *et al.* (2003). Cuba destaca-se em número de medalhas nas Olimpíadas como conseqüência de investimentos em saúde, educação e esportes. Um nível satisfatório de IDH explica melhor esse fato do que o baixo PIB.

O *output* é representado por um índice que agrega os três tipos de medalhas. Os fatores de ponderação são os utilizados em Estellita Lins *et al.* (2003) e Gomes (2003): 0,5814 para medalha de ouro, 0,2437 para prata e 0,1749 para bronze.

Como o modelo MFH tem a limitação de só ser aplicado a modelos DEA-CCR, foi selecionado um grupo de 14 países pertencentes à União Européia que participaram das Olimpíadas de Sidney em 2000, e que têm características similares de *inputs*. Os resultados da aplicação dos modelos MFH e DEA-GSZ a esse estudo de caso encontram-se na Tabela 1, na qual são apresentadas as eficiências antes da redistribuição, o valor original do *output* e duas possibilidades de valor para o *output* após a redistribuição. Ressalta-se que os valores de *output* segundo ambos os modelos são aqueles com que todas as DMUs são DEA CCR eficientes.

Tabela 1. Resultados da comparação entre os modelos MFH e GSZ para o caso da redistribuição de pontos olímpicos.

Países	Pontos olímpicos	Eficiência DEA CCR (%)	Modelo MFH – após redistribuição		Modelo DEA-GSZ – após redistribuição	
			Pontos olímpicos	Eficiência DEA CCR (%)	Pontos olímpicos	Eficiência DEA CCR (%)
Alemanha	16,8	100,00	11,2	100,000	11,1	100,000
França	12,9	89,52	9,6	100,000	9,5	100,000
Reino Unido	10,1	69,93	9,5	100,000	9,5	100,000
Itália	11,8	83,34	9,4	99,971	9,4	100,000
Espanha	3,3	27,11	7,9	100,000	8,2	100,000
Holanda	9,9	100,00	5,0	100,000	6,5	100,000
Bélgica	1,0	15,90	4,0	100,000	4,2	99,999
Suécia	4,1	74,01	3,7	100,000	3,6	99,999
Áustria	1,4	27,96	3,5	100,000	3,3	100,000
Dinamarca	2,1	62,62	2,9	100,000	2,2	99,999
Grécia	4,3	63,71	4,0	100,000	4,5	99,999
Finlândia	1,6	49,20	2,8	100,000	2,1	99,999
Portugal	0,3	5,63	3,9	99,882	4,1	100,000
Irlanda	0,2	10,28	2,4	100,000	1,6	100,000
Total	79,8	-	79,8	-	79,8	-

4.2. REALOCAÇÃO DO NÚMERO DE APROVADOS EM UM VESTIBULAR

A eficiência da Universidade Federal Fluminense (UFF) e dos municípios em relação ao vestibular foi avaliada em Soares de Mello *et al.* (2001), segundo dois modelos DEA CCR. O primeiro modelo, denominado de modelo de eficiência segundo a ótica da UFF, avalia a capacidade de a universidade atrair inscritos dos diversos municípios. O segundo modelo, modelo de eficiência segundo a ótica dos municípios, analisa o poder dos municípios em aprovar alunos no vestibular da instituição. Ambos os modelos possuem as mesmas DMUs (municípios do estado do Rio de Janeiro), e os mesmos *inputs* (população e um parâmetro denominado vagas equivalentes). Para o modelo de eficiência segundo a ótica da UFF, o *output* é o número de inscritos no vestibular. Já no modelo que avalia a eficiência segundo a ótica dos municípios, o *output* é o número de aprovados.

Neste último modelo, o *output* número de aprovados tem soma constante. Com efeito, a soma do número de aprovados é igual ao número total de vagas, que é determinado no edital do concurso. Com a aplicação dos modelos MFH e DEA-GSZ CCR a este modelo é possível determinar uma configuração de alocação dos aprovados com a qual todos os municípios teriam máxima eficiência.

Para este fim, foram utilizados os mesmos dados usados em Soares de Mello *et al.* (2001) e Gomes *et al.* (2005) para o modelo segundo a ótica dos municípios. A Tabela 2 resume os resultados da aplicação dos dois modelos de soma constante a este estudo de caso, que podem servir como subsídio ao fomento de políticas públicas de incentivo ao ingresso à educação superior e de melhoria do ensino, de modo a aumentar o número de aprovados no vestibular.

Tabela 2. Resultados da comparação entre os modelos MFH e GSZ para o caso da realocação de aprovados no vestibular.

DMUs	<i>Output</i> original	Eficiência DEA CCR clássico (%)	Modelo MFH – após redistribuição		Modelo DEA-GSZ – após redistribuição	
			<i>Output</i> redistribuído	Eficiência DEA CCR (%)	<i>Output</i> redistribuído	Eficiência DEA CCR (%)
Angra dos Reis	43	40,80	33,1	100,000	39,8	99,998
Araruama	9	9,70	25,9	100,000	35,0	99,997
Barra do Piraí	11	10,31	31,7	100,000	40,3	99,998
Barra Mansa	16	12,86	47,7	100,000	47,0	99,999
Bom Jardim	2	5,21	15,2	99,992	14,5	99,997
Bom Jesus do Itabapoana	13	23,53	21,0	100,000	20,9	99,998
Cabo Frio	22	22,68	31,4	100,000	36,6	99,998
Cachoeiras de Macacu	9	11,98	21,3	100,000	28,3	99,999
Cambuci	4	10,37	17,0	99,986	14,6	99,998
Campos dos Goytacazes	86	51,20	75,7	100,000	63,4	99,999
Cantagalo	4	11,03	14,8	100,000	13,7	99,998
Carmo	3	10,95	12,8	100,000	10,3	99,998
Casimiro de Abreu	6	9,19	21,5	100,000	24,6	99,999
Conceição de Macabu	5	15,44	16,5	100,000	12,2	99,998
Cordeiro	3	7,56	15,5	99,989	15,0	99,998
Duas Barras	0	5,36	10,6	99,956	7,0	99,998
Duque de Caxias	67	13,96	184,8	100,000	181,1	99,998
Eng.º Paulo de Frontin	1	4,56	11,5	99,972	8,3	99,998
Itaboraí	23	7,33	92,4	100,000	118,5	99,999
Itaguaí	4	1,86	77,4	100,000	81,1	99,996
Italva	1	4,25	13,7	100,000	8,9	99,998
Itaocara	23	53,91	17,9	99,996	16,1	99,998
Itaperuna	19	15,74	33,9	100,000	45,6	99,998
Itatiaia	1	3,26	13,6	99,981	11,6	99,998

Tabela 2. Continuação.

DMUs	Output original	Eficiência DEA CCR clássico (%)	Modelo MFH – após redistribuição		Modelo DEA-GSZ – após redistribuição	
			Output redistribuído	Eficiência DEA CCR (%)	Output redistribuído	Eficiência DEA CCR (%)
Laje do Muriaé	4	29,45	10,2	100,000	5,1	99,998
Macaé	68	54,25	39,3	99,978	47,3	99,998
Magé	18	15,96	46,5	100,000	42,6	99,998
Mangaratiba	1	2,92	15,0	99,996	12,9	99,998
Maricá	25	27,77	66,0	100,000	34,0	99,998
Mendes	1	3,24	13,6	100,000	11,7	99,999
Miguel Pereira	3	8,08	14,9	100,000	14,0	99,998
Miracema	29	61,42	19,1	100,000	17,8	99,998
Natividade	2	4,94	16,4	99,988	15,3	99,997
Nilópolis	20	6,84	89,2	100,000	110,3	99,999
Niterói	813	100,00	209,0	99,997	306,9	100,000
Nova Friburgo	24	21,90	43,9	100,000	41,4	99,999
Nova Iguaçu	52	9,03	258,0	100,000	217,4	99,999
Paracambi	1	1,46	21,0	99,993	25,9	99,997
Parati	2	4,44	17,2	99,977	17,0	99,999
Paraíba do Sul	3	4,70	19,6	99,999	24,1	99,999
Paty do Alferes	0	2,48	15,6	100,000	15,2	99,996
Petrópolis	33	27,01	53,6	100,000	46,1	99,999
Pirai	0	1,57	21,2	100,000	24,0	99,997
Quissamã	2	10,25	11,8	99,977	7,4	99,997
Resende	9	8,72	33,3	100,000	39,0	99,998
Rio Bonito	15	17,78	22,5	100,000	31,8	100,000
Rio Claro	0	3,97	13,2	100,000	9,5	99,997
Rio das Flores	0	8,52	8,4	100,000	4,4	99,998
Rio de Janeiro	1494	100,00	702,2	100,000	564,0	100,000
Santa Maria Madalena	0	5,07	10,9	99,977	7,5	99,998
Santo Antônio de Pádua	37	49,65	24,1	100,000	28,1	99,998
Sapucaia	0	3,52	13,1	100,000	10,7	99,997
Saquarema	1	1,37	44,6	100,000	27,6	99,994
Silva Jardim	0	2,96	14,3	100,000	12,7	99,997
São Fidélis	9	14,20	22,1	100,000	23,9	99,998
São Gonçalo	281	35,42	268,0	100,000	299,5	99,998
São João da Barra	0	0,90	28,6	100,000	42,0	100,000
São João de Meriti	30	6,78	146,7	100,000	167,0	99,998
São José Vale Rio Preto	0	3,41	13,3	100,000	11,1	99,997
São Pedro da Aldeia	16	16,90	28,6	99,992	35,7	99,998
São Sebastião do Alto	0	6,78	9,7	100,000	5,6	99,998
Sumidouro	1	4,13	12,1	100,000	9,1	99,999
Teresópolis	11	10,77	37,1	100,000	38,6	99,998
Trajano de Morais	1	5,10	10,9	100,000	7,4	99,997
Três Rios	6	6,31	29,0	100,000	35,9	99,998
Valença	2	2,03	27,0	100,000	37,2	99,998
Vassouras	1	1,89	18,4	100,000	20,0	100,000
Volta Redonda	64	43,89	57,9	100,000	55,0	99,998
Total	3454	-	3454	-	3454	-

Verifica-se na Tabela 2 que o valor do *output* após a redistribuição para todas as DMUs em ambos os modelos não é um número inteiro. Isto ocorre porque os resultados obtidos são uma primeira aproximação para a solução do problema. Nota-se ainda que nas Tabelas 1 e 2 em ambos os modelos, alguns erros de aproximação, introduzidos pelo

algoritmo utilizado no programa computacional SIAD (Angulo Meza *et al.*, 2004) para calcular os PPLs de DEA, conduzem a valores das eficiências, após a redistribuição, ligeiramente abaixo de 100% (99, 997%, por exemplo).

5. CONCLUSÕES

Este artigo propôs a utilização de modelos DEA CCR de soma constante para a redistribuição de *outputs*, de modo a gerar um cenário em que todas as DMUs fossem DEA eficientes. Os modelos comparados, MFH e DEA-GSZ, mostraram-se adequados aos objetivos propostos.

Diferentemente do modelo MFH, que até o momento só considera a fronteira DEA CCR, modelos DEA-GSZ gerais abrangem tanto o modelo DEA CCR quanto o BCC, com ou sem restrições aos pesos dos multiplicadores. Além disso, no modelo DEA-GSZ, a fronteira DEA não é substituída por outra fronteira para o desenvolvimento do modelo. Entretanto, os desenvolvimentos do modelo MFH permitem contemplar múltiplos *outputs* de soma constante, o que não ocorre, até então, com os modelos DEA-GSZ, que só permitem a modelagem de *output* ou *input* único de soma constante. Aprimoramentos devem ser conduzidos no modelo DEA-GSZ no sentido de permitir a modelagem conjunta de múltiplos *outputs* e *inputs* de soma constante. No caso das olimpíadas, por exemplo, um desenvolvimento interessante é considerar como *output* não pontos olímpicos”, mas sim o número de cada tipo de medalha cuja soma individual deve ser constante. Nesse caso, a incorporação de restrições aos pesos ao modelo seria igualmente desejável.

Observou-se que ambos os modelos distribuíram de forma eficiente tanto os pontos olímpicos para os 14 países, quanto as vagas/aprovados no caso do vestibular. Observou-se que nesse tipo de modelagem, em muitos casos, algumas unidades precisaram diminuir seus valores de *output* a fim de tornarem-se DEA eficientes, o que pode não ser desejável. Pesquisas são necessárias no sentido de desenvolver modelos que supram essa deficiência.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Allen, R.; Athanassopoulos, A.; Dyson, R.G.; Thanassoulis, E. Weights restrictions and value judgements in Data Envelopment Analysis. *Annals of Operations Research*, v. 73, p. 14-25, 1997.
- [2] Angulo Meza, L. 2002. *Um enfoque multiobjetivo para a determinação de alvos na Análise Envoltória de Dados (DEA)*. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- [3] Angulo Meza, L.; Biondi Neto, L.; Soares de Mello, J.C.C.B.; Gomes, E.G.; Coelho, P.H.G. FSDA – Free Software for Decision Analysis (SLAD – Software Livre de Apoio à Decisão): a software package for data envelopment analysis models. In: Congresso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa, 12., 2004, La Habana, Cuba. *Memorias...*, 2004.
- [4] Avellar, J.V.G. 2004. *Modelos DEA com soma constante de inputs/outputs*. Tese (Mestrado) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.
- [5] Avellar, J.V.G.; Milioni, A.Z.; Rabello, T.N. Modelos DEA com variáveis limitadas ou soma constante. *Pesquisa Operacional*, v. 25, n. 1, 2005 (no prelo).
- [6] Banker, R.D.; Charnes, A.; Cooper, W.W. Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, v. 30, p. 1078-1092, 1984.
- [7] Beasley, J.E. Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, v. 147, p. 198-216, 2003.

- [8] Charnes, A.; Cooper, W.W.; Rhodes, E. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, v. 2, p. 429-444, 1978.
- [9] Cook, W.D.; Kress, M. Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach. *European Journal of Operational Research*, v. 119, p. 652-661, 1999.
- [10] Cooper, W.W.; Seiford, L.M.; Tone, K. *Data Envelopment Analysis: A comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA - Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.
- [11] Estellita Lins, M.P.; Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B.; Soares de Mello, A.J.R. Olympic ranking based on a zero sum gains DEA model. *European Journal of Operational Research*, v. 148, p. 312-322, 2003.
- [12] Farrel, M.J.; Fieldhouse, M. Estimating efficient production functions under increasing returns to scale. *Journal of the Royal Statistical Society Series A*, p. 252-267, 1962.
- [13] Gomes, E.G. *Modelos de Análise de Envoltória de Dados com Ganhos de Soma Zero*. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- [14] Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B.; Estellita Lins, M.P. Busca sequencial de alvos intermediários em modelos DEA com soma de outputs constante. *Investigação Operacional*, v. 23, p. 163-178, 2003.
- [15] Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B.; Estellita Lins, M.P. Redistribuição de inputs e outputs em modelos de análise de envoltória de dados com ganhos de soma zero. *Pesquisa Operacional*, v. 24, n. 2, p. 269-284, 2004.
- [16] Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B.; Estellita Lins, M.P. Uniformização da fronteira eficiente em modelos de Análise de Envoltória de Dados com Ganhos de Soma Zero e Retornos Constantes de Escala. *Pesquisa Operacional*, v. 25, n. 2, 2005 (no prelo).
- [17] Koopmans, T.C. Analysis of Production as an efficient combination of activities. In: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium, on Mathematical Statistical and Probability*. John Wiley and Sons, New York, p. 33-97, 1951.
- [18] Lozano, S.A.; Villa, G. Centralized DEA models with the possibility of downsizing Source. *Journal of the Operational Research Society*, v. 56, n. 4, p. 357-364(8), 2005.
- [19] Soares de Mello, J.C.C.B. *Suavização da fronteira DEA com o uso de métodos variacionais*. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- [20] Soares de Mello, J.C.C.B.; Gomes, E.G.; Estellita Lins, M.P.; Vieira, L.A.M. Um caso de estudo de integração SIG-DEA-MCDA: a influência de uma instituição de ensino superior em vários municípios do Estado do Rio de Janeiro. *Investigação Operacional*, v. 21, n. 2, p. 171-190, 2001.
- [21] Villa, G.; Lozano, S.A. Constant Sum of Outputs DEA model for Olympic Games target setting. In: Emrouznejad, A.; Podinovski, V. (ed.) *Data envelopment analysis and performance measurement*, p. 9-15, 2004.