

TESTE DE VIDA SEQUENCIAL COM UM MECANISMO DE TRUNCAGEM APLICADO A PRODUTOS METALÚRGICOS QUANDO A VIDA MÍNIMA DO MODELO DE AMOSTRAGEM WEIBULL É DIFERENTE DE ZERO

Prof. Daniel I. De Souza Jr., Ph.D.

Universidade Fed. Fluminense, Niterói, RJ & Uni. Estadual do Norte Fluminense, Campos RJ
Rua Passos da Pátria 156, Niterói, RJ & Avenida Alberto Lamego 2000, Campos, RJ
daniel.desouza@hotmail.com

Simone V. Silva

Universidade Estadual do Norte Fluminense
Avenida Alberto Lamego 2000, Campos, RJ
simonevs@cefetcampos.br

Resumo

A vida mínima é considerada uma característica muito importante para as indústrias elétricas e eletrônicas. A estimação de seu valor é um objetivo permanente desses tipos de indústrias. Quando estamos trabalhando com produtos metalúrgicos, uma prática comum é a de considerar esse valor da vida mínima igual a zero. Isso significa que uma falha poderá ocorrer a qualquer momento após o tempo zero ($t > 0$). Entretanto, existem vários produtos metalúrgicos possuindo uma vida mínima bem diferente de zero. Esse é o caso, por exemplo, de vigas de aço, utilizadas na construção de pontes, viadutos e edifícios. Nesse trabalho, aplicaremos um teste de vida seqüencial com um mecanismo de truncagem desenvolvido por De Souza [1] em vigas de aço feitas com um tipo de aço de alta resistência e baixa liga, visando determinar a resistência à fadiga (ciclos) apresentada por esse tipo de aço. A vida mínima é considerada ser diferente de zero. A distribuição de amostragem é o modelo Weibull de três parâmetros. Um mecanismo de truncagem desenvolvido por De Souza [1] será aplicado na análise dos dados de amostragem. O objetivo de um mecanismo de truncagem é o de manter o tamanho da amostra pequeno, proporcionando assim uma redução nos custos de teste. Um teste de vida preliminar será realizado com o objetivo de determinar um valor estimado para a vida mínima φ do modelo Weibull. O menor tempo de falhas encontrado nesse teste preliminar será utilizado como um estimador do valor de x_1 . Um exemplo irá ilustrar o procedimento proposto.

Palavras-Chaves: Modelo Weibull de Três Parâmetros; Teste de Hipótese; Mecanismo de Truncagem; Teste de Vida Seqüencial; Produtos Metalúrgicos.

Abstract

The minimum life parameter is considered to be a very important characteristic to the electronic and electrical industries. The estimation of its value is a constant objective pursued by those types of organizations. It is a common practice to consider the minimum life value equal to zero when dealing with metallurgical products. This means that a failure can occur at any time after time zero ($t > 0$). However, there are several metallurgical products having a minimum life quite different from zero. It is the case, for example, of steel beams, used in the construction of bridges, overpasses and buildings. In this work we will apply a sequential life testing approach with a truncation mechanism developed by De Souza [1] to steel beams made with a type of a low-alloy, high strength steel, to determine the resistance to fatigue (cycles) presented by this type of steel. The minimum life is considered to be different from

zero. The underlying sampling distribution will be the three-parameter Weibull model. A truncation mechanism developed by De Souza [1] will be applied in the analysis of the sample data. The objective of such a truncation mechanism is to keep the sample size small, with a resulting savings in cost. Some preliminary life testing will be performed in order to determine an estimated value for the minimum life ϕ of the Weibull sampling distribution. The earlier failure time to be observed in this preliminary testing will be taken as the estimator of the x_1 value. An example will illustrate the proposed procedure.

Keywords: Three-Parameter Weibull Model, Hypothesis Testing, Truncation Mechanism, Sequential Testing; Metallurgical Products.

1. INTRODUÇÃO

Testes de vida seqüencial truncado envolvendo o modelo Weibull de dois parâmetros no qual o produto analisado era composto de vigas de aço do tipo de alta resistência e baixa liga, já foram analisados anteriormente por De Souza [2]. O objetivo do mecanismo de truncagem é o de manter pequeno o tamanho da amostra, resultando em uma diminuição do custo de teste. Essa é a maior vantagem de um teste de vida seqüencial em relação a testes de vida com tamanho de amostras pré-fixados.

Nesse trabalho utilizaremos um mecanismo de teste de vida seqüencial desenvolvido por De Souza [1] no teste de vigas de aço do tipo de alta resistência e baixa liga, visando determinar a resistência a fadiga (ciclos) apresentada por esse tipo de aço. A vida mínima é considerada ser diferente de zero. A distribuição de amostragem será o modelo Weibull de três parâmetros. Um mecanismo de truncagem desenvolvido por De Souza [1] será aplicado na análise dos dados de amostragem.

A distribuição Weibull de três parâmetros possui um parâmetro de vida mínima ϕ o qual representa a vida mínima da característica ou componente sendo analisado, um parâmetro de forma β o qual especifica a forma da distribuição, e um parâmetro de escala θ o qual representa a vida característica da distribuição. Todos esses três parâmetros são positivos. A função densidade da distribuição Weibull de três parâmetros é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t - \phi}{\theta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t - \phi}{\theta} \right)^{\beta} \right]; \quad t \geq 0$$

As situações de teste de hipóteses foram dadas por Kapur e Lamberson [3], e também por De Souza [4].

1. Para o parâmetro de escala θ : $H_0 : \theta \geq \theta_0$; $H_1 : \theta < \theta_0$

A probabilidade de se aceitar H_0 será dada por $(1-\alpha)$ se $\theta = \theta_0$. Agora, se $\theta = \theta_1$, onde $\theta_1 < \theta_0$, a probabilidade de se aceitar H_0 será ajustada para o nível inferior γ .

2. Para o parâmetro de forma β : $H_0 : \beta \geq \beta_0$; $H_1 : \beta < \beta_0$

A probabilidade de se aceitar H_0 será dada por $(1-\alpha)$ se $\beta = \beta_0$. Agora, se $\beta = \beta_1$ onde $\beta_1 < \beta_0$, a probabilidade de se aceitar H_0 será também ajustada para o nível inferior γ .

3. Para a vida mínima ϕ : $H_0 : \phi \geq \phi_0$; $H_1 : \phi < \phi_0$

Novamente, a probabilidade de se aceitar H_0 será dada por $(1-\alpha)$ se $\phi = \phi_0$. Agora, no caso de $\phi = \phi_1$, onde $\phi < \phi_0$, então a probabilidade de se aceitar H_0 será mais uma vez ajustada para o nível inferior γ .

De acordo com De Souza [1], para o modelo Weibull de três parâmetros, a relação seqüencial probabilística (SPR) será dada por:

$$\begin{aligned}
 \text{SPR} = & \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right)^n \prod_{i=1}^n \left[\frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1 - 1}}{(t_i - \phi_0)^{\beta_0 - 1}} \right] \times \exp \left[- \sum_{i=1}^n \left(\frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{(t_i - \phi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}} \right) \right], \text{ ou} \\
 & n \ln \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) - \ln \left[\frac{(1-\gamma)}{\alpha} \right] < X < n \ln \left(\frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} \right) \ln \left[\frac{(1-\alpha)}{\gamma} \right] \quad (1)
 \end{aligned}$$

Aqui, X é dado por:

$$X = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(t_i - \phi_1)^{\beta_1}}{\theta_1^{\beta_1}} - \frac{(t_i - \phi_0)^{\beta_0}}{\theta_0^{\beta_0}} \right) - (\beta_1 - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \phi_1) + (\beta_0 - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \phi_0) \quad (2)$$

Novamente de acordo com De Souza [1], para o modelo Weibull de três parâmetros, o tamanho esperado da amostra do teste de vida seqüencial para efeito de truncagem E(n), será dado por:

$$E(n) \approx \frac{P(\theta, \beta, \phi) \ln(A) + [1 - P(\theta, \beta, \phi)] \ln(B)}{E(w)}, \quad (3)$$

onde A = $\gamma / (1-\alpha)$; B = $(1-\gamma)/\alpha$. O valor estimador de E(w) será dado por:

$$\begin{aligned}
 E(w) = & \ln(C) + (\beta_1 - 1) E \left[\ln(t - \phi_1) \right] - (\beta_0 - 1) \times E \left[\ln(t - \phi_0) \right] - \frac{1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \\
 & \times E \left[(t - \phi_1)^{\beta_1} \right] + \frac{1}{\theta_0^{\beta_0}} \times E \left[(t - \phi_0)^{\beta_0} \right], \quad (4)
 \end{aligned}$$

onde $C = \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0}$. Teremos também:

$$E \left[(t - \phi_1)^{\beta_1} \right] = \theta^{\beta_1} \Gamma \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta} \right) \quad (5)$$

$$E \left[(t - \phi_0)^{\beta_0} \right] = \theta^{\beta_0} \Gamma \left(1 + \frac{\beta_0}{\beta} \right) \quad (6)$$

$$E \left[\ln(t - \phi_1) \right] = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[\ln(U_i) e^{-U_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\}; U = \left(\frac{t - \phi_1}{\theta} \right)^\beta \quad (7)$$

$$E \left[\ln(t - \phi_0) \right] = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[\ln(Y_i) e^{-Y_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\}; Y = \left(\frac{t - \phi_0}{\theta} \right)^\beta \quad (8)$$

O Anexo (1) apresenta as soluções para as equações (5) e (6). O Anexo (2) mostra os cálculos para as equações (7) e (8).

2. DETERMINANDO UM ESTIMADOR INICIAL PARA A VIDA MÍNIMA φ

A função densidade (*pdf*) de x_1 será dada por:

$$f(x_1) = n \left[1 - F(x_1) \right]^{n-1} f(x_1), \text{ ou, como } F(x_1) = 1 - R(x_1), \text{ teremos:}$$

$$f(x_1) = n \left[R(x_1) \right]^{n-1} f(x_1)$$

Para a distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros, teremos:

$$f(x_1) = \frac{n\beta}{\theta} \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^{\beta-1} \left\{ \exp - \left[\left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^\beta \right] \right\}^n$$

O valor esperado de x_1 será dado por:

$$E(x_1) = \int_{\varphi}^{\infty} \frac{n\beta}{\theta} t \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^{\beta-1} \left\{ \exp - \left[\left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^\beta \right] \right\}^n dt$$

$$\text{Com } U = \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^\beta; du = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^{\beta-1} dt; dt = \frac{du}{\frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t-\varphi}{\theta} \right)^{\beta-1}}; t = \theta U^{1/\beta} + \varphi$$

Quando $t \rightarrow \infty$; $U \rightarrow \infty$; Agora, quando $t \rightarrow \varphi$; $U \rightarrow 0$. Logo:

$$E(x_1) = \int_0^{\infty} n \left(\theta U^{1/\beta} + \varphi \right) e^{-nU} du = \theta \int_0^{\infty} n U^{1/\beta} e^{-nU} du + \varphi \int_0^{\infty} n e^{-nU} du, \text{ onde}$$

$$\varphi \int_0^{\infty} n e^{-nU} du = -\varphi \left[e^{-nU} \right]_0^{\infty} = -\varphi [0 - 1] = \varphi$$

Na resolução da integral $\theta \int_0^{\infty} n U^{1/\beta} e^{-nU} du$, faça $Z = nU$; $du = \frac{dz}{n}$; $U = \frac{Z}{n}$

Quando $U \rightarrow \infty$; $Z \rightarrow \infty$; Agora, quando $U \rightarrow 0$; $Z \rightarrow 0$. Logo:

$$E(x_1) = \theta \int_0^{\infty} \left(\frac{Z}{n}\right)^{1/\beta} e^{-Z} dz + \varphi = \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \int_0^{\infty} Z^{1/\beta} e^{-Z} dz + \varphi. \text{ Finalmente:}$$

$$E(x_1) = \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) + \varphi$$

O valor esperado de x_1 será dado por:

$$E(x_1) = \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) + \varphi, \text{ o que significa que } \varphi \text{ poderá ser estimada por:}$$

$$E(\varphi) = \varphi_0 = x_1 - \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \tag{9}$$

Quando se decidir sobre os valores que deverão ter as quantidades $\theta_0, \theta_1, \beta_0, \beta_1, \varphi_0, \varphi_1, \alpha, \gamma$, e $P(\theta, \beta, \varphi)$, e depois que o valor do $E(n)$ for determinado, o teste de vida seqüencial estará totalmente definido. Empregando-se agora as equações de (1) a (9), um exemplo irá ilustrar a metodologia proposta.

3. EXEMPLO

Vigas de aço feitas com um certo tipo de aço de alta resistência e baixa liga, serão submetidas a um teste de vida. Como esse é um produto bem conhecido, sabe-se que o mesmo poderá ser representado por uma distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros possuindo um parâmetro de escala θ de 2.700.000 ciclos e tendo um parâmetro de forma β igual a 2,8. Um teste de vida preliminar é realizado para se determinar um estimador para o valor do parâmetro de vida mínima φ da distribuição de amostragem. Nesse teste preliminar, um grupo de nove vigas foi submetido a um teste de vida, com todas as vigas testadas (cicladas) até que todas tivessem falhado. A Tabela (1) seguinte apresenta os tempos de falhas (ciclos) para esse teste de vida preliminar.

Tabela1. Tempos de falhas dos 9 itens do teste de vida preliminar

2.872.005.	4.234.076.	3.249.297.
3.766.358.	4.836.859.	1.936.952.
3.495.599.	2.780.212.	2.611.054.

O menor tempo de falhas (1.936.952 ciclos) foi considerado como o estimador do valor de x_1 . Então, utilizando-se a equação (9), teremos:

$$E(\varphi) = \varphi_0 = x_1 - \frac{\theta}{n^{1/\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = 1.936.952. - \frac{2.700.000.}{(9)^{1/2,8}} \Gamma\left(\frac{1}{2,8} + 1\right)$$

$$E(\varphi) = \varphi_0 = 1.936.952 - 1.231.864,3 \times 0,89046448 = 840.020,6$$

Logo: $E(\varphi) = \varphi_0 \approx 840.000$ ciclos

Foi então decidido que o valor de α seria de 0,05 e o valor de γ seria de 0,10. Escolheram-se os seguintes valores para os parâmetros da hipótese nula H_0 e da hipótese alternativa H_1 : parâmetro de escala alternativo $\theta_1 = 2.500.000$ ciclos, parâmetro de forma alternativo $\beta_1 = 2,5$ e parâmetro de vida mínima alternativo $\varphi_1 = 750.000$ ciclos; parâmetro de escala nulo $\theta_0 = 2.700.000$ ciclos, parâmetro de forma nulo $\beta_0 = 2,8$ e parâmetro de vida mínima nulo $\varphi_0 = 840.000$ ciclos. Nesse exemplo, a decisão de se aceitar a hipótese nula H_0 foi obtida com a análise de 15 vigas ou observações. Isso significa que para o produto metalúrgico (vigas de aço) sendo submetido a um teste de vida, tendo um parâmetro de escala de 2.700.000 ciclos e tendo um parâmetro de forma de 2,5, uma vida mínima de 840.000 ciclos é uma boa estimativa para ser considerada em futuras análises de testes de vida. Os tempos de falhas (ciclos) obtidos foram os seguintes:

5.093.421; 3.845.063; 2.231.875; 4.600.637; 5.387.530; 2.898.563; 4.100.843; 3.440.821; 4.398.712; 2.751.078; 3.275.109; 3.006.419; 2.502.474; 3.190.574 e 4.417.309.

Os resultados do teste de vida seqüencial para o modelo Weibull de três parâmetros foram os seguintes:

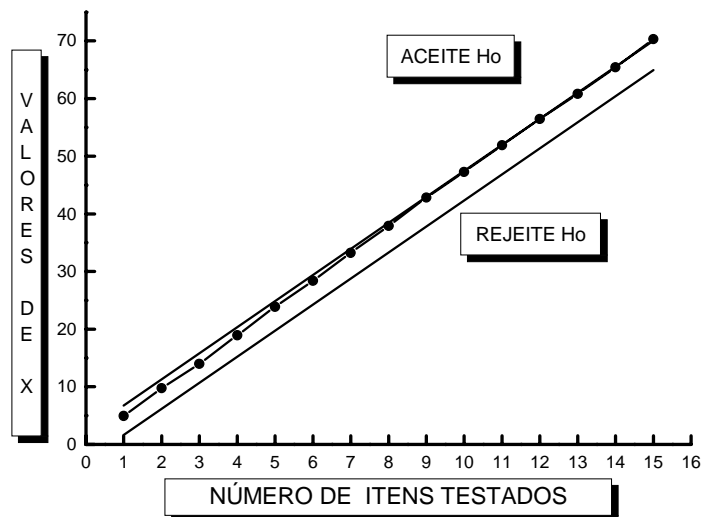


Figura 1. Resultados do teste de vida seqüencial para o modelo Weibull de três Parâmetros.

Utilizando-se agora as equações de (3) até (8), com os valores de $\theta_1 = 2.500.000$ ciclos; $\theta = \theta_0 = 2.700.000$ ciclos; $\varphi = \varphi_0 = 840.000$ ciclos; $\varphi_1 = 750.000$ ciclos; $\beta_1 = 2,5$; $\beta = \beta_0 = 2,8$, $\alpha = 0,05$; $\gamma = 0,10$ e fazendo $P(\theta, \beta, \varphi)$ ser igual a 0,01, poderemos então calcular o tamanho esperado da amostra para efeito de truncagem $E(n)$ desse teste de vida seqüencial sendo analisado. Desse modo, teremos:

$$C = \frac{\beta_1}{\theta_1^{\beta_1}} \times \frac{\theta_0^{\beta_0}}{\beta_0} = 91,992; \quad \ln(C) = 4,5217$$

$$\frac{1}{\theta_1^{\beta_1}} = \frac{1}{9,8821 \times 10^{15}}; \quad \frac{1}{\theta_0^{\beta_0}} = \frac{1}{1,0182 \times 10^{18}}$$

$$E\left[(t - \phi_1)^{\beta_1}\right] = 1,19787 \times 10^{16} \times 0,9593197; \quad \frac{1}{\theta_1^{\beta_1}} E\left[(t - \phi_1)^{\beta_1}\right] = 1,16285$$

$$E\left[(t - \phi_0)^{\beta_0}\right] = 1,0182 \times 10^{18}; \quad \frac{1}{\theta_0^{\beta_0}} E\left[(t - \phi_0)^{\beta_0}\right] = 1,0$$

$$E\left[\ln(t - \phi_1)\right] = 14,80876 + 0,0138 \times \sum_{i=1}^{16} \left[\ln\left(\frac{t_i - 750.000}{2.700.000}\right)^{2,8} \exp\left[-\left(\frac{t_i - 750.000}{2.700.000}\right)^{2,8}\right] \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \text{ou} \\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$E\left[\ln(t - \phi_1)\right] = 13,58567, \text{ onde } \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} = 0,0138$$

t = tempos de falhas no intervalo (750.000 ciclos ≤ t ≤ 6.000.000 ciclos)

$$\text{Usando o mesmo raciocínio, teremos: } E\left[\ln(t - \phi_0)\right] = 13,33937$$

O valor esperado de w, E(w), será igual à:

$$E(w) = 4,5217 + 1,5 \times 13,58567 - 1,8 \times 13,33937 - 1,16285 + 1,0 = 0,726489$$

$$\text{Agora, com } \ln(A) = \ln\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right) = -2,2513, \text{ e com } \ln(B) = \ln\left(\frac{1-\gamma}{\alpha}\right) = 2,8904;$$

P(θ, β, φ) = 0,01, obteremos:

$$E(n) \approx \frac{2,8390}{0,726489} \approx 3,9087 \approx 4 \text{ itens}$$

Logo, poderemos tomar uma decisão a respeito de se aceitar ou se rejeitar a hipótese nula H₀ após a análise da observação de número 4.

4. UM PROCEDIMENTO PARA SE APLICAR O MECANISMO DE TRUNCAGEM

De acordo com Kapur e Lamberson [3], quando o ponto de truncagem é alcançado, é traçada uma linha dividindo ao meio o gráfico seqüencial, como mostrado na Figura (2). Essa linha é traçada iniciando-se na origem do gráfico, paralela às linhas de aceitação e de rejeição. A decisão de se aceitar ou se rejeitar a hipótese nula H₀ irá depender simplesmente de que lado a observação final se encontra. Obviamente esse procedimento de truncagem altera os

níveis ou valores de α e de γ do teste de vida original; entretanto, de acordo com Kapur e Lamberson [3], essa mudança será muito pequena se o ponto de truncagem não for muito pequeno menor do que 3 unidades). Como podemos observar na Figura (2), a hipótese nula H_0 deverá ser aceita pois a observação final (observação de número 4) se encontra no lado da linha relacionado com a aceitação de H_0 .

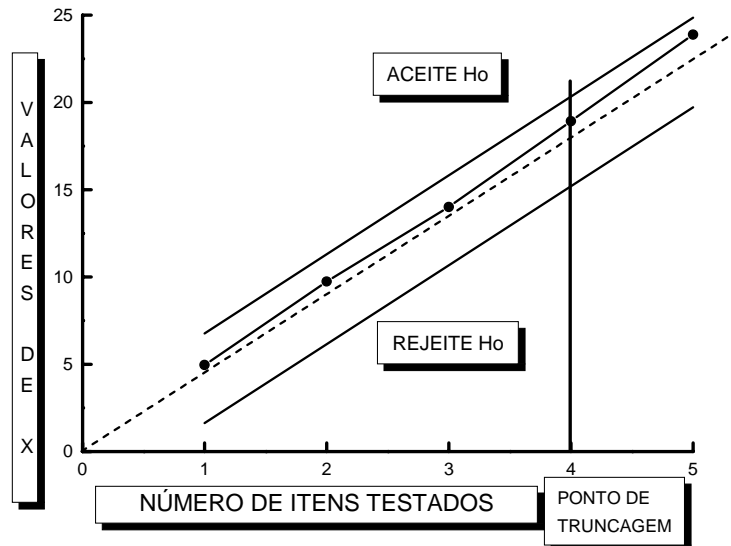


Figura 2. Um procedimento para se aplicar o mecanismo de truncagem

5. CONCLUSÃO

O parâmetro da vida mínima é considerado muito importante para as indústrias eletrônica e elétrica. A estimação de seu valor é um objetivo permanente desses tipos de indústrias. Quando estamos trabalhando com produtos metalúrgicos, uma prática comum é a de considerar esse valor da vida mínima igual à zero. Isso significa que uma falha poderá ocorrer a qualquer momento após o tempo zero ($t > 0$). Entretanto, como pudemos ver no exemplo apresentado nesse trabalho, vigas de aço utilizadas na construção de pontes, viadutos e edifícios, feitas com um tipo de aço de alta resistência e baixa liga, quando submetidas a esforços de fadiga, apresentaram uma vida mínima de aproximadamente 840.000 ciclos. Um teste de vida preliminar foi realizado para se determinar um valor estimado para a vida mínima ϕ da distribuição de amostragem Weibull de três parâmetros. O menor tempo de falhas observado nesse teste preliminar foi utilizado como o valor estimado de x_1 , o primeiro tempo de falhas.

Um mecanismo de teste de vida sequencial desenvolvido por De Souza [1] foi então aplicado para verificar se a hipótese nula H_0 (uma vida mínima de cerca de 840.000 ciclos) poderia ser aceita ou rejeitada. No exemplo apresentado nesse trabalho, foi necessário se analisar 15 unidades do produto metalúrgico (vigas metálicas) para se obter a decisão de se aceitar a hipótese nula H_0 . Esse número de itens necessário para se obter a decisão de se aceitar a hipótese nula pode ser considerado muito grande, e o mecanismo de truncagem desenvolvido por De Souza [1] foi então aplicado. Com esse mecanismo de truncagem, trabalhando com um modelo Weibull de três parâmetros, a decisão de se aceitar a hipótese nula (vida mínima de cerca de 840.000 ciclos) foi alcançada com a análise de apenas 4 vigas de aço. Esse fato mostra a vantagem de se usar esse tipo de mecanismo de truncagem em uma situação de teste de vida sequencial.

Como um resultado do teste de vida realizado, podemos ver que para o produto

metalúrgico (vigas de aço) sendo submetidas a um teste de vida, possuindo um parâmetro de escala de 2.700.000 ciclos e um parâmetro de forma de 2,8, uma vida mínima de cerca de 840.000 ciclos é uma estimativa adequada para ser considerada na realização de futuros testes de vida seqüencial.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] De Souza, Daniel I. 2003. Sequential life testing with a truncation mechanism for an underlying Three-parameter Weibull model, *ICheap-6, Chemical Engineering Transactions*, Vol. 3 p. 557-562, Sauro Pierucci (ed), Pisa, Italy.
- [2] De Souza, Daniel I. 2001. Sequential life testing with a truncation mechanism for an underlying Weibull model, *Towards a Safer World, ESREL 2001 Conference*, Zio, Demichela & Piccinini (eds), Torino, Italy, 16 – 20 September 2001; 3: 1539 – 1546, Politecnico Di Torino.
- [3] Kapur, Kailash & Lamberson, Leonard R. 197. *Reliability in Engineering Design*. New York: John Willey & Sons, Inc .
- [4] De Souza, Daniel I. (2000). Further thoughts on a sequential life testing approach using a Weibull model, *Foresight and Precaution, ESREL 2000 Congress*, Cottam, Harvey, Pape & Tait (eds), Edinburgh; Scotland; 14–17 May 2000; 2: 1641 – 1647, Rotterdam,: Balkema.

ANEXO 1

$$\text{CALCULANDO O } E \left[(t - \varphi_1)^{\beta_1} \right] \text{ E O } E \left[(t - \varphi_0)^{\beta_0} \right]$$

Esses valores esperados serão dados por:

$$E \left[(t - \varphi_1)^{\beta_1} \right] = \int_{\varphi_1}^{\infty} (t - \varphi_1)^{\beta_1} \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t - \varphi_1}{\theta} \right)^{\beta-1} \times \exp \left[- \left(\frac{t - \varphi_1}{\theta} \right)^{\beta} \right] dt \quad (A1)$$

Fazendo $U = \left(\frac{t - \varphi_1}{\theta} \right)^{\beta}$, teremos: $du = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t - \varphi_1}{\theta} \right)^{\beta-1} dt$; $t = \varphi_1 + \theta U^{1/\beta}$

Quando $t \rightarrow \infty$, $U \rightarrow \infty$; Quando $t \rightarrow \varphi_1$, $U \rightarrow 0$. Então, a equação (A1) ficará:

$$E \left[(t - \varphi_1)^{\beta_1} \right] = \theta^{\beta_1} \int_0^{\infty} U^{\beta_1/\beta} e^{-U} du$$

Mas essa integral é a função gamma $\Gamma \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta} \right)$.

$$\text{Então: } E \left[(t - \varphi_1)^{\beta_1} \right] = \theta^{\beta_1} \Gamma \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta} \right) \quad (A2)$$

Utilizando-se as mesmas transformações usadas para se resolver a equação (A1), o $E \left[(t - \varphi_0)^{\beta_0} \right]$ será dado por:

$$E \left[(t - \varphi_0)^{\beta_0} \right] = \theta^{\beta_0} \Gamma \left(1 + \frac{\beta_0}{\beta} \right) \quad (A3)$$

ANEXO 2

$$\text{CALCULANDO O } E \left[\ln(t - \phi_1) \right] \text{ E O } E \left[\ln(t - \phi_0) \right]$$

Esses valores esperados serão dados por:

$$E \left[\ln(t - \phi_1) \right] = \int_{\phi_1}^{\infty} \ln(t - \phi_1) \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t - \phi_1}{\theta} \right)^{\beta-1} \times \exp \left[- \left(\frac{t - \phi_1}{\theta} \right)^{\beta} \right] dt \quad (A4)$$

Novamente fazendo $U = \left(\frac{t - \phi_1}{\theta} \right)^{\beta}$, a equação (A4) ficará:

$$E \left[\ln(t - \phi_1) \right] = \int_0^{\infty} \ln(\theta U^{1/\beta}) e^{-U} du = \ln(\theta) \int_0^{\infty} e^{-U} du + \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \ln(U) e^{-U} du$$

$$\text{Então: } E \left[\ln(t - \phi_1) \right] = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} \ln(U) e^{-U} du$$

A integral acima necessita ser resolvida através do uso de um método de integração numérica, como a regra de Simpson 1/3. Recordando que a regra de Simpson 1/3 é dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{g}{3} (f_1 + 4f_2 + 2f_3 + \dots + 4f_n + f_{n+1}) - \text{erro}$$

Fazendo o erro = 0; e com $i = 1, 2, \dots, n+1$, teremos:

$$\int_0^{\infty} \ln(U) e^{-U} du = \frac{g}{3} \times \left(\ln(U_1)e^{-U_1} + 4\ln(U_2)e^{-U_2} + \dots + \ln(U_{n+1})e^{-U_{n+1}} \right)$$

$$\text{Logo: } E \left[\ln(t - \phi_1) \right] = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \times \frac{g}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[\ln(U_i) e^{-U_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} \quad (A5)$$

$$U = \left(\frac{t - \phi_1}{\theta} \right)^{\beta}$$

Utilizando-se as mesmas transformações usadas para resolver a equação (A5), o

$E \left[\ln(t - \phi_0) \right]$ será dado por:

$$E \left[\ln(t - \phi_0) \right] = \ln(\theta) + \frac{1}{\beta} \times \frac{gg}{3} \times \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left[\ln(Y_i) e^{-Y_i} \times (1, 2 \text{ or } 4) \right] \right\} \quad (A6)$$

$$Y = \left(\frac{t - \phi_0}{\theta} \right)^\beta$$