

AVALIAÇÃO DE OPÇÕES EXÓTICAS POR SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Bruno Vasques Maletta

Instituto COPPEAD de Administração/UFRJ

bmaletta@coppead.ufrj.br

Eduardo Saliby

Instituto COPPEAD de Administração/UFRJ

saliby@coppead.ufrj.br

Fábio Henrique de Sousa Coelho

Instituto COPPEAD de Administração/UFRJ

fabiocoelho@coppead.ufrj.br

Resumo

A simulação de Monte Carlo, desenvolvida durante a segunda guerra mundial, encontrou um enorme campo de aplicação na área de finanças. Especificamente para os contratos de opções, a simulação de Monte Carlo tem sido aplicada na análise e precificação dos contratos. O presente trabalho aplica a simulação de Monte Carlo com técnicas de redução de variância na precificação de alguns contratos exóticos, com o intuito de se avaliar os ganhos de redução de variância nas estimativas de prêmios das opções, variando-se alguns parâmetros de cálculo das opções. Os resultados revelam que para opções dentro do dinheiro, o erro-padrão das estimativas obtidas por diferentes técnicas de redução de variância não apresentaram ganhos em relação à técnica de amostragem aleatória simples (AAS). A redução do erro padrão das estimativas de prêmio só foi observada para opções fora do dinheiro.

Palavras-Chaves: Simulação de Monte Carlo; Opções Exóticas; Técnicas de Redução de Variância;

Abstract

The Monte Carlo Simulation, developed during the World War II, found a great field of application in finance. Specially for the options contracts, the Monte Carlo Simulation has been applied for analysis and pricing of the contracts. The present work applies the Monte Carlo Simulation with some variance reduction techniques for pricing some exotic contracts, with the goal of evaluate the variance reduction gain for the estimates of options premium, varying some calculus parameters of the options. The results show that for in-the-money options, the standard error of the different estimates obtained by the techniques do not present comparatively gain for the simple random sampling. The reduction of the standard error for the premium estimates were only observed for out of the money options.

Keywords: Monte Carlo Simulation; Exotic Options; Variance Reduction Techniques;

1. INTRODUÇÃO

A simulação de Monte Carlo, desenvolvida durante a segunda guerra mundial, encontrou um enorme campo de aplicação na área de finanças. Especificamente para os contratos de opções, a simulação de Monte Carlo tem sido aplicada na precificação e análise destes contratos. Com a evolução e difusão do mercado de derivativos mundial, as opções tradicionais – vanilla – sofreram modificações e adaptações de forma a atender às necessidades específicas dos traders. Assim surgiram os chamados contratos exóticos, que embora ainda não tenham um grande volume de negociação nas bolsas de valores internacionais, podem ser realizados no mercado de balcão.

Hoje, em contratos mais complexos, muitas vezes sem solução analítica fechada, a técnica de simulação de Monte Carlo tem sido empregada para precificar estes contratos.

Como as opções vanilla, a simulação de Monte Carlo também evoluiu, no sentido em que novas técnicas de amostragem foram desenvolvidas de maneira a reduzir o tempo de processamento e aumentar a precisão das estimativas. Essas novas técnicas de amostragem, também chamadas de técnicas de redução de variância, são discutidas neste trabalho em um contexto de precificação de contratos de opções exóticas.

2. CONTRATOS EXÓTICOS

O Mercado de opções nos EUA se desenvolveu ainda na década de 1970, quando da inauguração da CBOE (Chicago Board of Options Exchange) e da publicação de “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” por Black & Scholes. Neste sentido, Zhang (1995) argumenta que o crescimento do entendimento sobre as opções gerou os primeiros conceitos sobre os contratos exóticos. Nas décadas de 1980 e 1990 os contratos exóticos ganharam importância e nesta época alguns contratos já eram relativamente populares no mercado americano.

Conceitualmente, as opções são ditas exóticas quando fogem dos padrões dos contratos Vanilla, discutidas no capítulo anterior, cujo payoff é do tipo $\text{Max}[S_t - K; 0]$. Existem diversos tipos de opções exóticas, mas suas construções, em geral, são variações dos payoffs das opções Vanilla.

Ong (1996) indica que as opções barreiras já eram disponíveis no mercado de balcão americano no final da década de 1960 e, que embora muitos trabalhos sobre precificação de contratos exóticos já haviam aparecido na década de 1970 e 1980, o termo exótico é atribuído a Mark Rubinstein quando da publicação, em 1990, de uma série de artigos que apresentavam, em sua maioria, soluções fechadas para alguns contratos.

A flexibilidade obtida com os contratos exóticos, juntamente com a vantagem gerada pela economia na construção de payoffs, atraiu a atenção dos investidores. Entretanto, hoje, poucas opções exóticas são negociadas em bolsas, tornando o mercado de balcão o palco de transação desses contratos.

2.1 – OPÇÕES BARREIRA

A opção barreira é o tipo mais antigo de opção exótica, sendo que sua existência remonta ao final da década de 1960 no mercado americano. O payoff deste tipo de opção é idêntico ao payoff das opções vanilla, mas existem restrições ao exercício das opções. Sabe-se, ainda, que as opções barreira são mais baratas que as opções vanilla, o que estimula ainda mais o seu uso.

As opções barreiras podem ser do tipo *Knock-in* ou *Knock-out*, quanto à forma de validação do exercício da opção e Down ou Up, quanto à localização da barreira em

relação ao preço inicial do ativo objeto. Uma opção de compra *Up-and-out Call* (UOC) apresenta o preço da barreira acima do valor inicial do ativo objeto, com a especificidade de que se em algum momento da vida da opção o preço do ativo objeto ultrapassar o valor da barreira, a opção terá um payoff nulo. Assim, para que a opção seja exercida, o preço do ativo objeto deve ser superior ao preço de exercício na data de vencimento – como uma opção vanilla - mas o preço do ativo objeto nunca pode ter sido superior à barreira durante a vida da opção.

Levando-se em consideração as opções de compra e venda, têm-se 8 tipos diferentes de opções com barreira. No entanto, muitas variações das opções barreiras podem ser encontradas.

Douady (1998) apresenta algumas expressões para precificação das opções com barreiras e argumenta que embora existam soluções fechadas para algumas opções com barreiras, payoffs mais complicados ainda não tiveram soluções estabelecidas.

Grandes contribuições à Precificação destas opções foram feitas por Merton (1973), Goldman, Sosin & Shepp (1979) e Rubinstein & Reiner (1991).

2.2 – OPÇÕES ASIÁTICAS

As opções asiáticas são uma espécie de path dependents options cujo payoff é obtido por uma média de preços do ativo objeto ou do strike. A média pode ainda ser obtida de forma aritmética, que não possui uma solução analítica, e de forma geométrica. Menos comum, as médias podem ainda ser ponderadas, tanto na forma aritmética como na forma geométrica. Neste trabalho, considerou-se as opções asiáticas com média geométrica sem ponderação. Assim, os payoffs são:

$$C_{Asian} = \text{Max}[0, \bar{S} - K] \quad (1)$$

Sendo:

\bar{S} = média geométrica dos preços do ativo-objeto da opção entre a data inicial e a data de vencimento da opção;

K = preço de exercício da opção.

Segundo Riskglossary (2004), o termo asiático refere-se tão somente ao fato de ter sido Tokyo a localidade onde foram desenvolvidas as primeiras fórmulas de uso comercial para a precificação de opções sobre o preço de derivados do petróleo. Vorst (1996), entretanto, apresenta a origem do nome a transações feitas pelo *Bankers Trust* para com firmas japonesas. Vorst (1996) ainda apresenta as opções asiáticas como uma das opções exóticas mais populares desde a metade da década de 1980 e, mesmo no final da década de 1970, estas opções já se apresentavam como títulos ligados a commodities como os petrobonds.

Kemna & Vorst (1990), neste artigo clássico, precificam as opções asiáticas com média geométrica e ainda utilizam esta solução como um controle utilizado na simulação de monte Carlo com Variáveis controles, de forma a se obter um valor aproximado para as opções asiáticas do tipo média aritmética.

2.3 – OPÇÕES BINÁRIAS

As opções binárias, ou digitais, são opções que apresentam uma forte descontinuidade em seus payoffs. O tipo mais comum destas opções são as chamadas cash-or-nothing, que pagam uma quantia fixa de dinheiro se as opções terminam dentro

do dinheiro ou não pagam nada caso terminem for a do dinheiro. As fórmulas de precificação destas opções são facilmente obtidas a partir das opções vanilla e foram, primeiramente, apresentadas por Reiner & Rubinstein (1991).

Hull (2003) chama atenção para o fato de que em um mundo neutro ao risco, a probabilidade do ativo objeto permanecer acima do strike na data de vencimento da opção é $N(d_2)$, que é a probabilidade usada por Black & Scholes em sua expressão para as opções vanilla. Assim, considerando-se Q como a quantia a ser obtida em caso de exercício da opção, tem-se:

$$C_{bin} = Qe^{-\mu T} N(d_2) \quad (2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r_f + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

sendo:

C_{bin} = prêmio da opção binária do tipo cash-or-nothing;

S_0 = preço do ativo-objeto da opção no instante zero;

r_f = taxa anual de juros livre de risco;

σ = volatilidade anual do ativo-objeto;

T = prazo de vencimento da opção em anos (252 dias úteis);

K = preço de exercício da opção;

$N(d_2)$ = valor da função de distribuição acumulada Normal Padrão no ponto d_2 .

3 – SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

A simulação de Monte Carlo tem grandes aplicações na solução de uma variedade de problemas matemáticos através de experimentos computacionais em diversas áreas do conhecimento, como é o caso da simulação de filas, precificação de opções, análise de risco, etc. O método é aplicado tanto em problemas determinísticos quanto àqueles com caráter probabilístico. Sua estrutura é muito simples e flexível para ser aplicado em problemas de qualquer nível de complexidade. Entretanto, a maior inconveniência do método recai sobre o número de simulações necessárias para se reduzir o erro da estimativa da solução procurada, o que tende, na prática, a tornar o método muito lento.

Na literatura, existem relatos de aplicações do método de MC em estudos de jogos de azar, dentre outros, realizados por matemáticos dos séculos XVI e XVII. No final de século XIX e início do século XX, o método também foi aplicado como forma de avaliação de médias de funções com variáveis aleatórias contínuas através da aproximação por integrais. Entretanto, o caso mais conhecido de aplicação do método de MC é o da construção da bomba atômica durante a II Guerra Mundial, no famoso projeto Manhattan, quando da publicação de “The Monte Carlo Method” por Ulam & Metropolis (1949). Estes autores decidiram usar o nome Monte Carlo como alusão à cidade de Monte Carlo, no principado de Mônaco, famosa pelos seus cassinos e jogos de roleta, que são dispositivos que produzem números aleatórios.

A base do método de monte Carlo reside na amostragem de números aleatórios, que pode ser realizada de diferentes maneiras, fazendo-se uso das chamadas técnicas de redução de variância que são aplicadas de forma a se reduzir o tempo de processamento da simulação bem como a precisão das estimativas. Nesse contexto, Boyle (1997) afirma que a simulação de monte Carlo torna-se preferível a outros métodos numéricos na medida em que o número de dimensões do problema cresce.

No mundo financeiro, a simulação de monte Carlo tem se mostrado bastante eficiente como ferramenta de avaliação de problemas associados à análise de risco, precificação de contratos, testes de cenários e outros. Especificamente, a precificação de contratos derivativos via simulação de monte Carlo iniciou-se com o trabalho de Boyle (1977), que utilizou a abordagem estocástica dos preços dos ativos como forma de simular um contrato derivativo.

Em escala comercial, Davidson (2002), em uma reportagem para a revista RISK, afirma que muitos bancos já utilizam esta ferramenta como forma de avaliar os problemas financeiros de alta complexidade, com muitos fatores de risco e que não são facilmente tratados através de soluções analíticas. Assim, a simulação de monte Carlo aparece como uma maneira de se encontrar respostas aproximadas ou distribuições mais prováveis para os resultados de um problema. Outras aplicações são citadas nesta reportagem como o caso dos bancos americanos que utilizam a simulação de monte Carlo como forma de se validar as soluções obtidas pelos modelos de árvores binomiais e algumas soluções analíticas de difícil comprovação.

As chamadas técnicas de redução de variância dizem respeito a diferentes metodologias de amostragem dos números aleatórios com o intuito de se reduzir o tempo de processamento das simulações e aumentar a eficiência das simulações geradas pela amostragem aleatória simples. Assim, para determinado nível de precisão, é necessário um número menor de simulações e conseqüentemente um menor esforço computacional.

A chamada redução de variância é medida, geralmente, através do erro padrão das estimativas. Dessa forma, quanto menor o erro padrão obtido, maior a precisão e qualidade das simulações. Entretanto, o aumento de precisão não deve ser obtido às custas de um aumento do tempo de processamento, uma vez que sabemos que um simples ganho de precisão poderia ser obtido com o aumento do número de simulações de um problema.

3.1 – VARIÁVEIS ANTITÉTICAS

A técnica de variáveis antitéticas é a mais simples e mais utilizada em problemas de precificação. A redução de variância obtida por esta técnica é obtida através de uma indução de correlação negativa na amostra aleatória simples. Charnes (2000) apresenta a técnica partindo do princípio que se um conjunto de números aleatórios representado por Z_i apresenta uma distribuição normal, então, $-Z_i$ também apresentará a mesma distribuição. Dessa forma, obtém-se duas estimativas, θ_1 e θ_2 , geradas, respectivamente, pela seqüência de números aleatórios Z_i e $-Z_i$. Assim, uma estimativa com menor erro padrão é obtida pela média das estimativas θ_1 e θ_2 . Então:

$$\theta_{VA} = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \quad (3)$$

Boyle (1997) descreve, de maneira mais formal, como ocorre a redução da variância nas estimativas.

3.2 – MATCH DE MOMENTOS

A técnica do match de momentos foi proposta por Barraquand (1995) e foi primeiramente denominada de “Quadratic resampling”. A idéia desta técnica consiste na correção das amostras aleatórias geradas de maneira que elas apresentem as características das distribuições teóricas sobre as quais elas foram geradas. Assim, no caso dos números aleatórios gerados sobre uma distribuição normal padrão, força-se que a média da amostra apresente o valor zero, assim como o desvio padrão apresente o valor 1. Considerando \tilde{Z} o valor médio dos números aleatórios Z_i gerados sobre a distribuição normal padrão, tem-se:

$$\tilde{Z}_i = Z_i - \tilde{Z} \quad (4)$$

Assim, constrói-se uma variável \tilde{Z}_i que apresenta média igual a zero e que substitui a variável Z_i no cálculo das estimativas. Considerando a expressão do caminho aleatório dos preços, tem-se que os novos preços finais serão dados por:

$$\tilde{S}_T^{(i)} = S_0 e^{(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\tilde{Z}_i} \quad (5)$$

Então, os payoffs de uma opção podem ser computados para os novos preços finais $\tilde{S}_T^{(i)}$.

A expressão 4 representa o chamado match do primeiro momento, que é a média. Outros momentos podem ser corrigidos para que apresentem as mesmas características das distribuições teóricas. Boyle (1997) apresenta o match para o segundo momento, que faz a correção da média e do desvio padrão da amostra. Tem-se:

$$\tilde{Z}_i = (Z_i - \tilde{Z}) \frac{\sigma_Z}{S_Z} + \mu_Z \quad (6)$$

Sendo μ_Z e σ_Z , respectivamente, a média e o desvio padrão da distribuição teórica sobre a qual os números aleatórios foram gerados. S_Z representa o desvio amostral dos números aleatórios gerados. Então, para o caso da distribuição normal padrão a expressão 5.6 é apresentada como sendo:

$$\tilde{Z}_i = \frac{(Z_i - \tilde{Z})}{S_Z} \quad (7)$$

A expressão anterior representa o match do segundo momento para o caso da distribuição normal padrão. A nova variável \tilde{Z}_i é, então, utilizada na expressão 5.5 para a geração dos preços finais do ativo.

Boyle (1997) ressalta que a variável \tilde{Z}_i originalmente não apresentaria uma distribuição normal, o que introduz um viés na estimativa do prêmio de uma opção. Entretanto, este viés apresenta um valor muito pequeno para a maioria dos problemas financeiros de interesse prático. O autor também chama atenção para o fato de que

intervalos de confiança para a estimativa do prêmio da opção não podem ser computados devido ao viés introduzido na amostra.

3.3 – VARIÁVEL CONTROLE

Esta técnica de redução de variância é aplicada, usualmente, em situações em que o problema de estudo não apresenta uma solução analítica. Assim, utiliza-se a solução analítica de um problema semelhante como forma de controlar a variação das amostras geradas para o problema com solução desconhecida. Um exemplo comum de emprego desta técnica na precificação de opções é o caso das opções asiáticas. Sabe-se que a opção asiática com média aritmética não apresenta uma solução analítica conhecida mas a opção asiática com média geométrica apresenta uma solução fechada. Assim, utiliza-se a solução para o caso geométrico como controle para o caso aritmético.

Bratley, Fox & Schrage (1987) explicam que um ajuste no valor estimado por simulação do problema sem solução analítica é obtido ao se aplicar um coeficiente da diferença entre o valor analítico e o valor obtido por simulação. Essa diferença serve como controle para a estimação do por simulação do problema sem solução analítica.

Saliby, Marins & Santos (2003) aplicaram esta técnica de redução de variância para o caso das opções asiáticas obtidas com média aritmética e geométrica. Os autores consideraram:

$$PA_{VC} = PA + \beta(C - PG) \quad (8)$$

Onde:

PA_{VC} = prêmio aritmético estimado por Variável de Controle;

PA = prêmio aritmético estimado por simulação;

β = coeficiente angular da regressão entre PA e PG ;

C = prêmio obtido por solução analítica para a opção asiática com média geométrica;

PG = prêmio obtido por simulação para a opção asiática com média geométrica.

Assim, considera-se a realização de duas simulações. Uma simulação é aplicada à estimativa do problema sem solução analítica e a outra é aplicada ao problema com solução analítica. Utiliza-se a diferença entre o prêmio geométrico obtido analiticamente e o prêmio geométrico estimado por simulação ao prêmio aritmético também estimado por simulação.

3.4 – HIPERCUBO LATINO

A técnica de amostragem por hipercubo latino foi apresentada por McKay (1979). A idéia básica desta técnica consiste na divisão do espaço amostral em estratos de forma que um número aleatório seja obrigatoriamente sorteado em cada estrato. Assim, garante-se alguma regularidade da distribuição sobre a qual a simulação é feita. A aleatoriedade da geração é obtida pela permutação aleatória da ordem em que os números, gerados dentro de cada estrato, serão sorteados.

Considerando um problema de dimensão d , pode-se dividir cada dimensão em K estratos, totalizando K^D estratos no espaço amostral. Seja um problema bidimensional onde se deseja a geração de uma amostra com 10 números aleatórios em cada dimensão. Assim, tem-se 10^2 estratos, com um número aleatório gerado em cada estrato e para cada dimensão.

De maneira mais formal, a geração por hipercubo latino pode ser descrita como:

$$xh_i = F^{-1}\left(\frac{i-1 + Rand_i}{n}\right) = F^{-1}\left[\frac{(i - Rand_i)}{n}\right] \quad (9)$$

Sendo:

n = tamanho da amostra de números aleatórios a serem gerados,

i = 1,2,3, ..., n ;

xh_i = i -ésimo elemento do primeiro conjunto de valores da amostra;

F^{-1} = inversa da função de distribuição acumulada da variável X ;

$Rand_i$ = i -ésimo número aleatório entre 0 e 1.

Para a obtenção de números aleatórios gerados sobre uma distribuição específica, utiliza-se a função inversa correspondente à distribuição do problema a ser modelado. No caso das opções, utiliza-se a função inversa da distribuição normal para os parâmetros de média zero e desvio unitário.

3.5 – AMOSTRAGEM DESCRITIVA

A implementação da técnica de Amostragem Descritiva é muito semelhante à implementação da amostragem por hipercubo latino. Entretanto, conforme apresentado em Saliby (1980), a Amostragem descritiva propõem um controle sobre o processo de amostragem. Saliby (1990) argumenta que as distribuições dos fatores de risco do problema já são determinadas durante a modelagem do problema.

Enquanto o hipercubo latino seleciona um número aleatório dentro de casa estrato, a amostragem descritiva utiliza o ponto médio em cada estrato. Dessa forma, a amostragem descritiva faz uso de uma escolha determinística dos valores de entrada no modelo de simulação. A aleatoriedade do processo, como no hipercubo latino, é feita pela permutação aleatória da ordem em que os números gerados em cada estrato são apresentados.

A geração pela técnica de amostragem descritiva é feita pela expressão 5.10.

$$xd_i = F^{-1}\left(\frac{i-1 + 0.5}{n}\right) = F^{-1}\left[\frac{(i - 0.5)}{n}\right] \quad (10)$$

Sendo:

n = tamanho da amostra descritiva;

i = 1,2,3, ..., n ;

xd_i = i -ésimo elemento do conjunto de valores da amostra descritiva;

F^{-1} = inversa da função de distribuição acumulada da variável modelada pela simulação.

4 – EXPERIMENTOS E RESULTADOS

Os experimentos foram realizados com o intuito de se precificar e avaliar os efeitos da variação de alguns parâmetros de calculo sobre os prêmios das opções exóticas. As opções foram simuladas utilizando-se o movimento geométrico browniano, modelagem bastante conhecida nos trabalhos financeiros, e os resultados dos prêmios foram avaliados através da comparação dos resultados com os prêmios obtidos pelas respectivas soluções analíticas. Assim, os preços dos ativos foram dados pela expressão:

$$S_T = S_0 e^{(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z_i} \quad (11)$$

Sendo:

S_T = preço do ativo-objeto na data de vencimento;

S_0 = preço do ativo-objeto na data inicial do contrato;

r_f = taxa anual de juros livre de risco (Capitalização Contínua);

σ = volatilidade anual do ativo-objeto;

T = prazo de vencimento da opção em anos (252 dias úteis);

Z_i = Número aleatório gerado segundo uma distribuição Normal padrão;

As opções do tipo barreira, conforme discussão anterior, apresentam a característica de terem seus payoffs dependentes não só dos preços de exercício, mas também das barreiras impostas aos preços do ativo objeto. Os experimentos realizados foram feitos para as opções do tipo Up and Out Call, que foram precificadas por diferentes técnicas de redução de variância para diversos parâmetros de cálculo. Lembra-se do fato destas opções exóticas serem do tipo path dependents, assim, foram utilizados 42 dimensões no cálculo das estimativas de prêmio.

As opções binárias apresentam um prêmio que avalia a probabilidade de determinado ativo em superar ou não um preço de exercício estabelecido. Diferentemente das opções européias de compra que em caso de exercício pagam a diferença entre o preço final do ativo e o preço de exercício, as opções digitais pagam uma quantia fixa.

As opções asiáticas são aquelas que tem em seu payoff o preço do ativo objeto ou o preço de exercício computado como sendo a média de preços do ativo objeto durante a vida da opção. A média de preços pode ser obtida aritmeticamente ou geometricamente. As opções asiáticas com média aritmética ainda não possuem uma solução analítica, entretanto seus prêmios tem sido calculados por simulação com elevado grau de precisão. Neste experimento, entretanto, as simulações são feitas sobre as opções asiáticas com média geométrica dos preços do ativo objeto, que possui uma solução analítica que serviu de controle para as simulações realizadas.

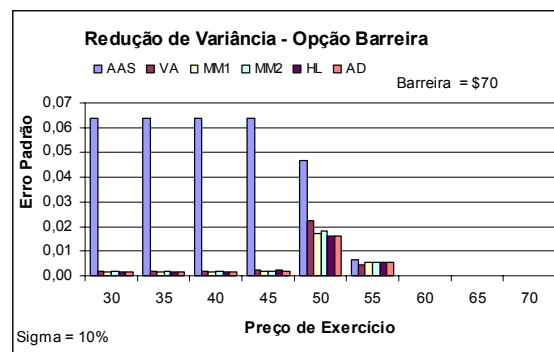
Efetuuou-se a precificação destas opções e a avaliação do erro padrão das estimativas para diferentes parâmetros de cálculos, conforme a tabela 6.2.1. Os payoffs de cada opção exótica foram computados segundo a particularidade de cada contrato, sendo que seus prêmios foram avaliados segundo cada uma das técnicas de amostragem abordadas neste trabalho.

Tabela 1 – Parâmetros utilizados para as simulações das opções exóticas.

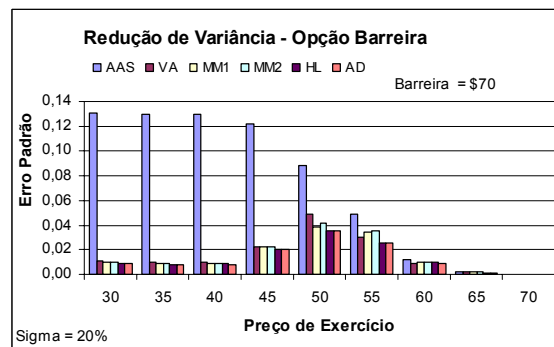
S_0	Preço Inicial do Ativo-objeto da opção em t=0	\$50
R_f	Taxa anual de juros livre de risco (Capitalização Discreta)	0,1
K	Preços de Exercícios	[\$30, \$35, \$40, \$45, \$50, \$55, \$60, \$65, \$70]

σ	Volatilidade Anual do ativo	[10%, 15%, 20%, 25%, 30%, 35%, 40%]
T	Pontos da Trajetória (Dimensões)	[42]
T	Prazo de vencimento das opções em dias	42
	Número de observações por corrida	1000
	Número de corridas	30
B	Barreiras (Opção Barreira Up and Out)	[\$60, \$70, \$80, \$90, \$100]
Q	Montante em caso de Exercício (Opção Binária)	\$50

Gráfico 1 – Erro padrão para as estimativas de prêmio das opções Barreiras obtidas por simulação para diversas técnicas de redução de variância, variando-se os preços de exercício e para os parâmetros apresentados na tabela 1, considerando a barreira como sendo \$70. a) Volatilidade de 10% a.a para o ativo-objeto e b) Volatilidade de 20% a.a para o ativo-objeto.

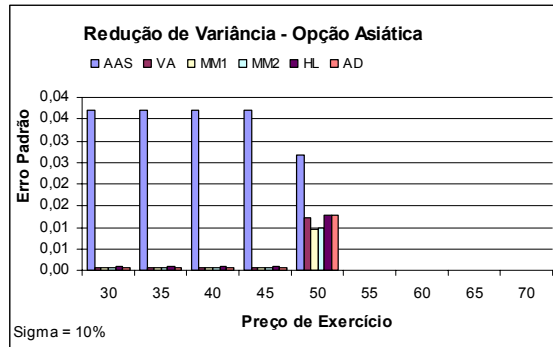


(a)

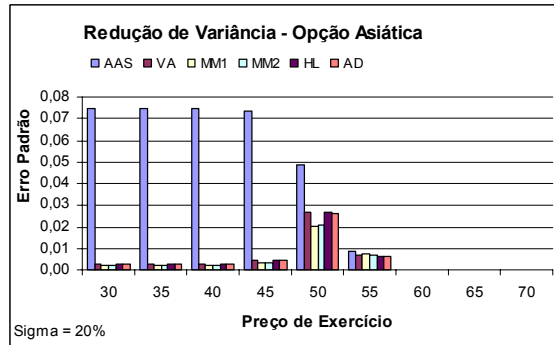


(b)

Gráfico 2 – Erro padrão para as estimativas de prêmio das opções Asiáticas obtidas por simulação para os parâmetros apresentados na tabela 1. a) Volatilidade de 10% a.a para o ativo-objeto e b) Volatilidade de 20% a.a para o ativo-objeto.

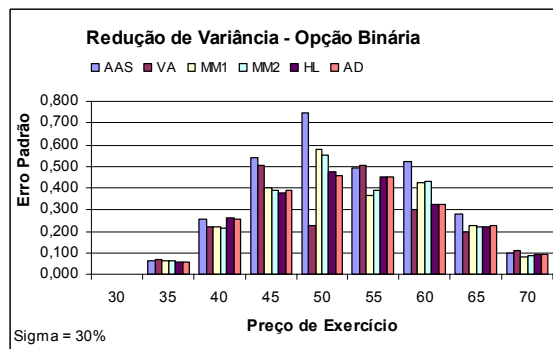


(a)

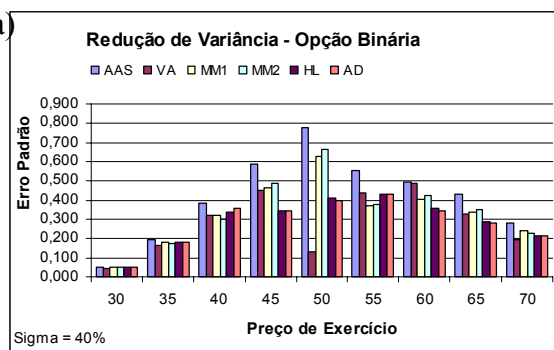


(b)

Gráfico 3 – Erro padrão para as estimativas de prêmio das opções binárias obtidas por simulação para diversas técnicas de redução de variância e com variação dos preços de exercícios, sendo os demais parâmetros apresentados na tabela 1. a) Volatilidade de 30% a.a para o ativo-objeto e b) Volatilidade de 40% a.a para o ativo-objeto.



(a)



(b)

O gráfico 1 apresenta o erro padrão das estimativas de prêmio para as opções barreiras. Pode-se perceber, claramente, que para opções dentro do dinheiro o erro padrão pela técnica de amostragem aleatória simples apresenta-se muito maior que para as demais técnicas. Entretanto, quando as opções ficam fora do dinheiro, esse ganho de erro padrão que as demais técnicas apresentavam, deixa de existir. O Gráfico 2, que apresenta o erro padrão para as estimativas de opção asiática, pode ser interpretado da mesma maneira que o gráfico 1. Mostrando, mais uma vez, que o preço de exercício é um fator determinante na obtenção da redução de variância das estimativas. Já o gráfico 3, que apresenta os resultados para as opções binárias, não se pode observar nenhum ganho relativo de variância, uma vez que tanto para opções dentro e fora do dinheiro, o erro padrão das estimativas apresentam patamares semelhantes.

5 – Conclusão

O presente trabalho examinou técnicas de redução de variância na obtenção de estimativas de prêmios por simulação de monte Carlo para algumas opções exóticas. Os resultados dessas estimativas foram analisados comparativamente aos resultados de prêmios obtidos pelas respectivas soluções analíticas das opções exóticas. O objetivo precípuo deste trabalho consistia na análise dos efeitos de alguns parâmetros de cálculo da precificação sobre os resultados das estimativas de prêmio, o que confere a este trabalho um caráter exploratório.

Os parâmetros utilizados para as simulações foram definidos de forma que se pudessem avaliar seus efeitos sobre as estimativas de prêmio em situações muito distintas. Entretanto, o custo computacional tornou-se, aqui, o fator limitante para variações dos parâmetros.

A técnica de simulação de monte Carlo mostrou-se, mais uma vez, bastante flexível para a modelagem financeira. Dessa forma, pôde-se construir modelos com certa facilidade, sobretudo porque estes são, geralmente, variações em maior ou menor grau do modelo de precificação de opções européias, o qual já foi extensivamente explorado em trabalhos de simulação.

Algumas técnicas de redução de variância utilizadas neste trabalho já haviam sido exploradas em outros trabalhos da área de finanças, como é o caso da técnica de variáveis antitéticas e mesmo a técnica de hipercubo latino. No entanto, as técnicas de match de momentos e a amostragem descritiva ainda não foram difundidas, sendo o seu uso restrito a poucos trabalhos.

Os resultados das simulações revelaram que o preço de exercício das opções estudadas, exceto para opção binária, foi o parâmetro de maior sensibilidade para as estimativas de prêmio. De uma maneira geral, considerando as opções européias, barreira e asiática, o erro-padrão das estimativas apresentou uma característica marcante. Para as opções muito dentro do dinheiro, o erro-padrão se apresentou muito pequeno em relação ao erro-padrão das estimativas obtidas pelas técnicas de amostragem aleatória simples (AAS). Na medida em que o preço de exercício aumentava de valor e deixava as opções de compra em cima do dinheiro, o erro-padrão das estimativas aumentava para as demais técnicas de redução de variância, o que deixava o erro-padrão dessas estimativas em um mesmo patamar das estimativas por AAS. Enfim, para opções muito dentro do dinheiro, as estimativas de todas as técnicas de amostragem, inclusive a AAS, convergia para zero com a elevação do preço de exercício das opções.

Estes resultados, não apresentados em outros trabalhos de simulação, indicam que os ganhos de redução de variância obtidos por outras técnicas de amostragem só podem ser obtidos em opções dentro do dinheiro. Assim, para opções fora do dinheiro, não haveria necessidade da utilização de técnicas de redução de variância nas simulações uma vez que a técnica AAS, a mais simples, apresenta os mesmos níveis de erro-padrão que as demais estimativas obtidas por técnicas mais robustas. Ressalta-se que esta análise é feita sob a ótica do ganho de eficiência em termos de erro-padrão, nada podendo ser dito sobre os ganhos em termos de tempo de processamento.

Atribui-se a este efeito do preço de exercício sobre as estimativas de prêmios o nome de efeito moneyness. Faz-se aqui uma alusão ao termo usado nas opções para medir o nível em que o preço do ativo objeto encontra-se próximo do exercício.

A análise exploratória da ocorrência do efeito moneyness revelou algumas explicações para esse comportamento. Para as opções dentro do dinheiro, o baixo erro-padrão das estimativas em relação à técnica de AAS pode ser explicado por um ganho no controle da amostra de números aleatórios. Assim, os preços do ativo objeto na data de exercício das opções apresentam um baixo desvio-padrão, o que se reflete nas estimativas de prêmio das opções e por consequência, no erro padrão dessas estimativas. Para as opções fora do dinheiro, isto é, as opções que raramente são exercidas, a falta de ativos com exercício faz com o que erro-padrão das estimativas de prêmio seja muito próximo de zero, sendo nulo caso não ocorra nenhum exercício.

Outros parâmetros, como a volatilidade e o retorno do ativo objeto, apresentam papel secundário no efeito moneyness. Isso ocorre porque um aumento destes parâmetros faz com que os preços do ativo objeto apresentem um intervalo maior de preços, tanto de valorização como de desvalorização. Isso faz com que probabilidade de exercício das opções se eleve uma vez que mais ativos simulados encontram-se superiores ao preço de exercício.

Diferentemente do exposto até aqui, as opções binárias apresentaram comportamento distinto, uma vez o efeito moneyness não se manifestou. Atribui-se este fato à peculiaridade do payoff desta opção, sendo que este é fixo e, portanto, não é do tipo $S - K$ como nas outras opções.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRAQUAND, J. **Numerical valuation of high dimensional multivariate European Securities.** Management Science, 41, 1995.

BOYLE, P. **Options: A Monte Carlo Approach.** Journal of Financial Economics, 4, 1977.

_____; BROADIE, M.; GLASSERMAN, P. **Monte Carlo Methods for Security Pricing.** Journal of Economic Dynamics and Control, 21, 1997.

BRATLEY, P.; FOX, B.; SCHRAGE, L. **A Guide to Simulation.** New York: Springer-Verlag, 2 Ed., 1987.

CHARNES, J.M. **Using simulation for option pricing.** Winter Simulation Conference, 2000.

Conze, A.; Viswanathan, R. **Path dependent options: the case of lookback options.** Journal of Finance, 46, 1991.

DAVIDSON, C. **Turbo-charged models.** RISK magazine, Feb 2002.

DOUADY, R. **Closed Form Formulas for Exotic Options and Their Lifetime Distribution.** International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol. 2, No. 1, 1998.

GOLDMAN, M.B.; SOSIN, H.; SHEPP, L. **On contingent claims that insure ex-post optimal stock market timing.** Journal of Finance, 34, 1979.

HULL, J. C. **Options, Futures and Other Derivatives.** Prentice Hall, 5 ed, 2002.

KEMNA, A.G.Z; VORST, A.C.F. **A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values.** Journal of Banking and Finance, 14, 1990.

MCKAY, M.D.; BECKMAN, R.J.; CONOVER, W.J. **A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code.** Technometrics, v. 21, n. 2, 1979.

MERTON, R.C. **Theory of Rational Option Pricing.** Bell Journal of Economics and Management Science, 1973.

ONG, M. **Exotic Options: The Market and their taxonomy.** The Handbook of exotic options, Irwing, 1996.

REINER, E.; RUBINSTEIN, M. **Unscrambling the binary code.** Risk, 4 (9), 1991.

RISKGLOSSARY. Disponível em: [http:// www.riskglossary.com](http://www.riskglossary.com) Acesso em: Janeiro, 2004.

SALIBY, E. **A reappraisal of some simulation fundamentals.** Tese (Doutorado) - University of Lancaster, 1980.

_____. **Descriptive Sampling: A better approach to Monte Carlo simulation.** Journal Operational Research Society, v. 41, n. 12, p.1133-1142, 1990.

_____.; MARINS, J. T.M; SANTOS, J. F. **Precificação de Opções de Compra do Tipo Asiática Usando Simulação de Monte Carlo: uma Comparação entre Diferentes Métodos Amostrais.** EnAnpad, 2003.

VORST, A.C.F. **Averaging Options.** The Handbook of exotic options, Irwing, 1996.

ZHANG, P.G. **An Introduciton to exotic options.** European Financial management, Vol 1, No 1, 1995.