TESTE DE VIDA ACELERADO APLICADO A PRODUTOS METALÚRGICOS COM UM MODELO DE AMOSTRAGEM WEIBULL INVERTIDO DE TRÊS PARÂMETROS

Prof. Daniel I. De Souza Jr., Ph.D.
Uni. Fed. Fluminense, Niterói, RJ & Uni. Estadual do Norte Fluminense, Campos RJ
Rua Passos da Pátria 156, Niterói, RJ & Avenida Alberto Lamego 2000, Campos, RJ
daniel.desouza@hotmail.com

Patrícia Duarte
Universidade Estadual do Norte Fluminense
Avenida Alberto Lamego 2000, Campos, RJ
patricia.duarte@accenture.com

Resumo

O principal objetivo de um teste de vida é o de se obter informação acerca de falhas. Essa informação deverá então ser utilizada para se quantificar a confiabilidade, melhorar a confiabilidade de produtos, e para se determinar se objetivos relacionados com a segurança e com a confiabilidade estão sendo alcançados. O tempo disponível para se testar um componente poderá ser bem menor do que o tempo de vida esperado para esse componente. Para superarmos esse problema, existe um teste de vida alternativo direcionado a forçar os componentes a falharem, submetendo-os a condições de teste muito mais severas do que as encontradas em uso normal por esses componentes. Através desse procedimento, obteremos dados provenientes de falhas, os quais poderão então ser empregados em modelos de teste de vida. Para passarmos de uma taxa de falhas obtida em condições severas de uso para uma taxa obtida em condições bem mais próximas das que o produto deverá encontrar quando em uso normal, necessitaremos desenvolver uma modelagem adicional. Esses modelos são conhecidos como modelos acelerados. O conceito de um teste de vida acelerado é aquele no qual um componente, trabalhando sob níveis pré-determinados (corretos) de tensão aumentada, deverá apresentar exatamente o mesmo mecanismo de falhas do obtido quando esse componente estiver sendo utilizado em condições normais de uso. Nesse trabalho desenvolveremos um modelo de teste de vida acelerado no qual a distribuição de amostragem é o modelo Weibull Invertido de três parâmetros. O modelo Weibull Invertido foi desenvolvido por Erto [1]. Nesse nosso estudo, existe muito pouca informação disponível acerca dos valores que os parâmetros do modelo Weibull Invertido possam ter. Para estimarmos os valores dos parâmetros de forma e de escala do modelo Weibull Invertido de três parâmetros, usaremos o método do “Maximum Likelihood” para truncagem por número de falhas. Para estimarmos o parâmetro de localização ou vida mínima, utilizaremos a função densidade para o primeiro tempo de falhas. Estaremos assumindo uma condição de aceleração linear. Um exemplo irá ilustrar a aplicação do modelo de teste de vida acelerado proposto, aplicado a produtos metalúrgicos.

Palavras-Chaves: Teste de Vida Acelerado; Estimador Maximum Likelihood, Modelo Weibull Invertido de Três Parâmetros; Aceleração Linear; Produtos Metalúrgicos.

Abstract

The main objective of life testing is to obtain information concerning failure. This information should then be used in order to quantify reliability, improve product reliability, and to determine whether safety and reliability goals are being met. The amount of time available for testing could be considerably less than the expected lifetime of the component. To overcome such a problem, there is the life-testing alternative aimed at forcing components to fail by testing them at much higher-than-intended application conditions. By doing this, we will get failure data that can be fitted to life distribution models. To go from the failure rate obtained at high stress to what a product or service is likely to experience at much lower stress, under use conditions, we will need additional modeling. These models are known as acceleration models. The accelerated life testing concept is such that a component, operating under predetermined (correct) levels of increased stress, will have exactly the same failure mechanism as observed when used at normal stress levels. For example, if the time of testing is measured in cycles, then the time squeezing may only require increasing the number of cycles per unit of time. In this study, we will develop an accelerated life-testing model in which the underlying sampling distribution is the three-parameter Inverse Weibull model. The Inverse Weibull model was developed by Erto [1]. There is little information available about the possible values the parameters of the corresponding Inverse Weibull underlying sampling distribution could have. To estimate the shape and the scale parameters of the three-parameter Inverse Weibull model we will use a maximum likelihood approach for censored failure data. We will be assuming a linear acceleration condition. An example will illustrate the application of the proposed accelerated life-testing model applied to metallurgical products.

Keywords: Accelerated Life Testing; Maximum Likelihood Estimator; Three-Parameter Inverse Weibull Model; Linear Acceleration; Metallurgical Products.

1. INTRODUÇÃO

O modelo mais simples de teste acelerado assume uma aceleração linear (constante) durante um período de tempo. Desse modo, se definirmos o fator de aceleração linear por AF, teremos:

$$t_n = AF \times t_a \tag{1}$$

Aqui , t_n representa o tempo de falha sob um nível normal (padrão) de tensão, e t_a representa o tempo de falha sob um nível elevado de tensão.

A função cumulativa em uma condição normal de teste $F_n(t_n)$ relativa a um determinado tempo normal (padrão) de teste $t = t_n$ será dada por:

$$P(T_n < t_n) = F_n(t_n) = P(T_a < t_a) = F_a\left(\frac{t_n}{AF}\right) = F_a\left(\frac{t_n}{AF}\right) \tag{2}$$

A função densidade cumulativa em uma condição normal de teste $f_n(t)$ relativa a um determinado tempo normal (padrão) de teste t será dada por:

$$f_n(t) = \frac{d}{dt} F_a\left(\frac{t}{AF}\right) = \frac{1}{FA}\ f_a\left(\frac{t}{AF}\right) \tag{3}$$

A função falha instantânea em uma condição normal de teste $h_n(t)$ relativa a um determinado tempo normal (padrão) de teste t será dada por:

$$h_n(t) = \frac{f_n(t)}{R_n(t)} = \frac{\frac{1}{AF} f_a\left(\frac{t}{AF}\right)}{1 - F_a\left(\frac{t}{AF}\right)} = \frac{1}{AF} h_a\left(\frac{t}{AF}\right) \tag{4}$$

2. ACELERAÇÃO PARA O MODELO WEIBULL INVERTIDO DE TRÊS PARÂMETROS

Uma metodologia de teste de vida acelerado no qual a distribuição de amostragem é o modelo Weibull de dois parâmetros já foi estudado anteriormente por De Souza [2], [3]. Iremos agora desenvolver um modelo de teste de vida acelerado no qual a distribuição de amostragem é o modelo Weibull Invertido de três parâmetros. Então, vamos definir os seguintes parâmetros da distribuição de amostragem Weibull Invertida:

β_n = parâmetro de forma sob condição de teste (aceleração) normal; β_a = parâmetro de forma sob condição de teste acelerado; θ_n = parâmetro de escala sob condição de teste normal; θ_a = parâmetro de escala sob condição de teste acelerado; φ_n = vida mínima sob condição de teste normal; φ_a = vida mínima sob condição de teste acelerado. Logo, a função cumulativa sob condição acelerada de teste, $F_a(t)$, do modelo Weibull Invertido de três parâmetros será dada por:

$$F_a(t) = \exp\left[-\left(\frac{\theta_a}{t - \varphi_a}\right)^{\beta_a}\right] \tag{5}$$

De um modo geral, o parâmetro de escala e a vida mínima podem ser estimados em dois níveis diferentes de tensão (temperatura, ciclos, quilômetros, etc.) e seus raios irão fornecer o valor desejado para os fatores de aceleração AF_θ e AF_φ. Desse modo, teremos:

$$AF_\theta = \frac{\theta_n}{\theta_a} \tag{6}$$

$$AF_\varphi = \frac{\varphi_n}{\varphi_a} \tag{7}$$

Além disso, $AF_\theta = AF_\varphi = AF$.

Da equação (7), temos que $\varphi_a = \varphi_n / AF$ e da equação (6) obtemos $\theta_a = \theta_n/AF$. Então, a equação (5) ficará:

$$F_a(t) = \exp\left[-\left(\frac{\frac{\theta_n}{AF}}{t - \frac{\varphi_n}{AF}}\right)^{\beta_a}\right] \tag{8}$$

Dado que $\beta_a = \beta_n = \beta$, utilizando-se agora a equação (2), obteremos a função cumulativa sob condição normal de teste $F_n(t_n)$ para um determinado período de tempo $t = t_n$.

Logo, a equação (8) se transformará em:

$$F_n(t) = F_a\left(\frac{t}{AF}\right) = \exp\left[-\left(\frac{\frac{\theta_n}{AF}}{AF\left(t-\frac{\varphi_n}{AF}\right)}\right)^{\beta_n}\right] \tag{9}$$

A equação (9) nos diz que, sob uma situação de aceleração linear, se a distribuição de vida em um nível de tensão é representada pelo modelo Weibull Invertido, a distribuição de vida em qualquer outro nível de tensão será também representada pelo modelo Weibull Invertido. O parâmetro de forma permanece o mesmo, enquanto o parâmetro de escala acelerado e a vida mínima acelerada serão multiplicados pelo fator de aceleração. Um mesmo parâmetro de forma é uma conseqüência matemática necessária para as duas outras condições; assumir-se um modelo de aceleração linear e uma distribuição de amostragem Weibull Invertido.

Agora, se diferentes níveis de tensão resultar em dados com parâmetros de forma muito diferentes entre si, então ou a distribuição Weibull Invertida é o modelo errado para representar os dados analisados, ou então não se tem uma condição de aceleração linear. A função falha instantânea do modelo Weibull Invertido varia sob o efeito da aceleração. Para uma taxa de falha de tensão qualquer, a função falha instantânea $h_a(t)$ será dada por:

$$h_a(t) = \frac{f_a(t)}{R_a(t)} = \frac{\frac{\beta}{\theta_a}\left(\frac{\theta_a}{t-\varphi_a}\right)^{\beta+1}\exp\left[-\left(\frac{\theta_a}{t-\varphi_a}\right)^{\beta}\right]}{1-\exp\left[-\left(\frac{\theta_a}{t-\varphi_a}\right)^{\beta}\right]} \tag{10}$$

Como sabemos, $\beta_a = \beta_n = \beta$. Novamente, como $\varphi_a = \varphi_n /AF$ e também $\theta_a = \theta_n/AF$, a equação (10) se transformará em:

$$h_a(t) = \frac{\frac{\beta\times AF}{\theta_n}\left(\frac{\frac{\theta_n}{AF}}{t-\frac{\varphi_n}{AF}}\right)^{\beta+1}\exp\left[-\left(\frac{\frac{\theta_n}{AF}}{t-\frac{\varphi_n}{AF}}\right)^{\beta}\right]}{1-\exp\left[-\left(\frac{\frac{\theta_n}{AF}}{t-\frac{\varphi_n}{AF}}\right)^{\beta}\right]}$$

Então, a função falha instantânea sob condição normal de teste $h_n(t)$ será dada por:

$$h_n(t) = \frac{h_a(t)}{(AF)^{\beta}} = \frac{\dfrac{\beta \times AF}{\theta_n \times (AF)^{\beta}} \left(\dfrac{\dfrac{\theta_n}{AF}}{t - \dfrac{\varphi_n}{AF}}\right)^{\beta+1} \exp\left[-\left(\dfrac{\dfrac{\theta_n}{AF}}{t - \dfrac{\varphi_n}{AF}}\right)^{\beta}\right]}{1 - \exp\left[-\left(\dfrac{\dfrac{\theta_n}{AF}}{t - \dfrac{\varphi_n}{AF}}\right)^{\beta}\right]} \tag{11}$$

Como podemos ver na equação (11), aconteceu uma mudança linear na função falha instantânea sob uma condição acelerada de teste $h_a(t)$. Quando $h_a(t)$ for multiplicada pelo fator $1/(AF)^{\beta}$, teremos como resultado a função falha instantânea sob condição normal de aceleração $h_n(t)$. Apenas quando a população de amostragem for exponencial (o parâmetro de forma β é igual a 1), o fator de multiplicação será igual a 1/AF.

3. DETERMINANDO UM ESTIMADOR INICIAL PARA A VIDA MÍNIMA φ

A função densidade (pdf) de x_1 será dada por:

$$f(x_1) = n[1 - F(x_1)]^{n-1} f(x_1), \text{ ou, como } F(x_1) = 1 - R(x_1), \text{ teremos:}$$

$$f(x_1) = n[R(x_1)]^{n-1} f(x_1)$$

Para a distribuição de amostragem Weibull Invertida de três parâmetros, teremos:

$$f(x_1) = \frac{n\beta}{\theta}\left(\frac{\theta}{t-\varphi}\right)^{\beta+1}\left\{1 - \exp - \left[\left(\frac{\theta}{t-\varphi}\right)^{\beta}\right]\right\}^{n}$$

O valor esperado de x_1 será dado por:

$$E(x_1) = \int_{\varphi}^{\infty} \frac{n\beta}{\theta} t \left(\frac{\theta}{t-\varphi}\right)^{\beta+1}\left\{1 - \exp - \left[\left(\frac{\theta}{t-\varphi}\right)^{\beta}\right]\right\}^{n} dt$$

Fazendo $U = \left(\dfrac{\theta}{t-\varphi}\right)^{\beta}$, teremos $du = \left(-\dfrac{\beta}{\theta}\right)\left(\dfrac{\theta}{t-\varphi}\right)^{\beta+1} dt$; $t = \dfrac{\theta}{U^{1/\beta}} + \varphi$. Quando

$t \to \infty$, $U \to 0$; Agora, quando $t \to \varphi$, $U \to \infty$. Logo:

$$E(x_1) = \int_{0}^{\infty} n\left(\theta U^{-1/\beta} + \varphi\right)\left[1 - e^{-U}\right]^{n} du$$

$$E(x_1) = n\theta\int_0^{\infty} U^{-1/\beta}\left[1-e^{-U}\right]^n du + n\varphi\int_0^{\infty}\left[1-e^{-U}\right]^n du$$

A integral acima necessita ser resolvida através de um método de integração numérica, como a regra de Simpson 1/3. Lembrando que a regra de Simpson 1/3 é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{g}{3}\left(f_1 + 4f_2 + 2f_3 + \cdots + 4f_n + f_{n+1}\right) - \text{erro}$$

Fazendo o erro = 0; e com $i = 1, 2,\ldots n + 1$, teremos:

$$n\theta\int_0^{\infty} U^{-1/\beta}\left[1-e^{-U}\right]^n du = n \times \theta \times \frac{g}{3} \times \left\{\sum_{i=1}^{k+1}\left[\left(U_i^{-1/\beta}\right)\left(1-e^{-U_i}\right)^n \times (1, 2 \text{ or } 4)\right]\right\} \quad (12)$$

$$U_i = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_j}\right)^{\beta}; \; j = 1, 2, \ldots, k$$

$$n\varphi\int_0^{\infty}\left[1-e^{-U}\right]^n du = n \times \varphi_j \times \frac{g}{3} \times \left\{\sum_{i=1}^{k+1}\left[\left(1-e^{-U_i}\right)^n \times (1, 2 \text{ or } 4)\right]\right\} \quad (13)$$

Finalmente, utilizando-se as equações (12) e (13), obteremos:

$$E(x_1) = n\theta\int_0^{\infty} U^{-1/\beta}\left[1-e^{-U}\right]^n du + n\varphi\int_0^{\infty}\left[1-e^{-U}\right]^n du \text{, ou ainda:}$$

$$E(x_1) = n \times \theta \times \frac{g}{3} \times \left\{\sum_{i=1}^{k+1}\left[\left(U_i^{-1/\beta}\right)\left(1-e^{-U_i}\right)^n \times (1, 2 \text{ or } 4)\right]\right\} + n \times \varphi_j \times \frac{g}{3} \times$$

$$\times \left\{\sum_{i=1}^{k+1}\left[\left(1-e^{-U_i}\right)^n \times (1, 2 \text{ or } 4)\right]\right\} \quad (14)$$

$$U_i = \left(\frac{\theta}{t_i - \varphi_j}\right)^{\beta}; \; j = 1, 2, \ldots, k$$

Sob uma condição acelerada de teste, $\varphi_j = \varphi_a$, e sob uma condição normal de teste, teremos $\varphi_j = \varphi_n$.

4. EXEMPLO

Estamos tentando verificar se, para uma distribuição de amostragem Weibull Invertida de três parâmetros, um componente, trabalhando sob um nível pré-determinado (correto) de tensão aumentada, apresentará exatamente o mesmo mecanismo de falhas (igual) ao observado quando o mesmo componente for utilizado sob um nível normal de tensão (condição normal de uso).

Para que pudéssemos realizar essa verificação, um determinado tipo de componente metalúrgico foi submetido a um teste de vida acelerado, onde 15 desses componentes foram testados até a ocorrência da falha de número nove, quando o teste foi então, truncado.

A Tabela (1) seguinte apresenta os tempos de falhas codificados (horas) obtidos do teste de vida realizado sob uma condição de aceleração.

Tabela 1. Tempo de falhas codificados (horas) de componentes metalúrgicos, testados sob uma condição acelerada de teste.

803,3	826,7	877,9
884,1	947,6	978,1
1009,4	1057,1	1134,8

A distribuição de amostragem é o modelo Weibull Invertido de três parâmetros. Utilizando-se o método "Maximum Likelihood" para estimarmos o parâmetro de forma β e o parâmetro de escala θ do modelo Weibull Invertido de três parâmetros, em uma situação de teste de vida do Tipo II (truncado por falhas), obteremos os seguintes valores para esses dois parâmetros sob uma condição de teste acelerado:

$\beta_a = \beta_n = \beta = 11{,}40$ $\theta_a = 886{,}3$ horas

Empregando-se agora a equação (14) obteremos o valor estimado para a vida mínima φ_j sob uma condição de teste de vida acelerado:

$\varphi_j = \varphi_a = 172.5$ horas

O Anexo (1) apresenta o desenvolvimento do estimador "Maximum Likelihood" em uma situação de teste de vida do Tipo II (truncado por falhas).

Uma segunda amostra é então obtida sob uma condição de teste de vida normal. Novamente, quinze componentes metalúrgicos foram testados com o teste sendo truncado por ocasião da ocorrência da nona falha. A Tabela (2) apresenta esses tempos de falhas codificados (horas).

Tabela 2. Tempo de falhas codificados (horas) de componentes metalúrgicos, testados sob uma condição normal de teste.

4177,1	4287,0	4597,5
4619,5	4910,8	5063,6
5318,2	5554,5	5788,0

Utilizando-se novamente o estimador "Maximum Likelihood" apresentado no Anexo (1), obteremos os seguintes valores para o parâmetro de forma β e o parâmetro de escala θ do modelo Weibull Invertido de três parâmetros sob uma condição normal de teste:

$$\beta_n = \beta_a = \beta = 11{,}46 \qquad \theta_n = 4607{,}4 \text{ horas}$$

Utilizando-se novamente a equação (14) obteremos o valor estimado para a vida mínima φ_j sob uma condição de teste de vida normal:

$$\varphi_j = \varphi_n = 875{,}7 \text{ horas}$$

Usando-se agora a equação (6), obteremos: $AF_\theta = \dfrac{\theta_n}{\theta_a} = \dfrac{4607{,}4}{886{,}3} = 5{,}19$

Utilizando-se a equação (7), teremos: $AF_\varphi = \dfrac{\varphi_n}{\varphi_a} = \dfrac{875{,}7}{172{,}5} = 5{,}08$

Logo, como esperávamos, $AF_\theta = 5{,}19 \approx AF_\varphi = 5{,}08 = AF$. Além disso, temos também que $\beta_n = 11{,}46 \approx \beta_a = 11{,}40 = \beta$.

Como podemos observar nesse exemplo, assumindo-se uma condição de aceleração linear, o componente metalúrgico, operando sob níveis pré-determinados (corretos) de tensão aumentada, apresentará exatamente o mesmo mecanismo de falhas igual ao observado quando utilizado sob níveis normais de tensão. Isso significa que, como a distribuição de vida em um determinado nível de tensão é representada pelo modelo Weibull Invertido de três parâmetros, a distribuição de vida em qualquer outro nível de tensão será também representada pelo modelo Weibull Invertido de três parâmetros. Como vimos nesse exemplo, o valor do parâmetro de forma permaneceu o mesmo enquanto que o parâmetro de escala e a vida mínima foram multiplicados pelo fator de aceleração. Como recordamos, um mesmo parâmetro de forma é uma conseqüência matemática necessária para as duas outras condições; assumir-se um modelo de aceleração linear e uma distribuição de amostragem Weibull Invertido.

5. CONCLUSÕES

Modelos de testes de vida acelerados utilizam níveis de tensão mais elevados dos que os encontrados em condições normais de uso pelos produtos ou componentes, com o objetivo de diminuir o tempo necessário para se realizar um teste de vida. Para passarmos de uma taxa de falhas obtida em condições severas de uso para uma taxa obtida em condições bem mais próximas das que o produto deverá encontrar quando em uso normal, necessitaremos desenvolver uma modelagem adicional. O conceito de um teste de vida acelerado é aquele no qual um componente, trabalhando sob níveis pré-determinados (corretos) de tensão aumentada, deverá apresentar exatamente o mesmo mecanismo de falhas do obtido quando esse componente estiver sendo utilizado em condições normais de uso. Por exemplo, se o tempo de teste for medido em ciclos, como em testes de fadiga, então para se realizar o teste de vida em um tempo menor poderá ser necessário apenas aumentar o número de ciclos por unidade de tempo.

Nesse estudo desenvolvemos um modelo de teste de vida acelerado no qual a distribuição de amostragem é o modelo Weibull Invertido de três parâmetros. A vida mínima foi considerada diferente de zero. Assumimos uma condição de aceleração linear. Como podemos verificar no exemplo apresentado, o valor do parâmetro de forma permaneceu o mesmo enquanto que o parâmetro de escala e a vida mínima foram multiplicados pelo fator de aceleração. Como poderíamos esperar, o valor do fator de aceleração para o parâmetro de escala θ é igual ao valor do fator de aceleração para a vida mínima φ. Finalmente, apenas para enfatizar essa importante propriedade, um mesmo parâmetro de forma é uma conseqüência matemática necessária para as duas outras condições; assumir-se um modelo de aceleração linear e uma distribuição de amostragem Weibull Invertido.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Erto, Pasquale. 1982. “New Practical Bayes Estimators for the 2-Parameter Weibull Distribution”, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-31, Nº 2, June 1982, pp. 194-197, USA.

[2] De Souza, Daniel I. (1999) Accelerated Life Testing Models. In: ORSNZ99 Conference,1999, Hamilton. Proceedings of the ORSNZ99 Conference. Hamilton: University of Waikato, NZ, 1999. v.1, p. 245-254.

[3] De Souza, Daniel I. (1999). Physical Acceleration Life Models. In: XIII Congreso Chilenode Ingenieria Electrica, 1999, Santiago. Anais del XIII Congreso Chileno de Ingenieria Electrica. Santiago: Universidad de Santiago de Chile, 1999. v.1, p. 09-14.

ANEXO 1

ESTIMADOR “MAXIMUM LIKELIHOOD” PARA O MODELO WEIBULL INVERTIDO, EM UMA SITUAÇÃO DE TESTE DE VIDA DO TIPO II (TRUNCADO POR FALHAS)

O estimador “Maximum Likelihood” para os parâmetros de forma β e de escala θ de uma distribuição de amostragem Weibull Invertida em uma situação de teste de vida do Tipo II (truncado por falhas) será dado por:

$$L(\beta;\theta) = k! \left[\prod_{i=1}^{r} f(t_i)\right]\left[1-F(t_r)\right]^{n-r} = k! \left[\prod_{i=1}^{r} f(t_i)\right]\left[R(t_r)\right]^{n-r} \quad ; t > 0$$

Com $f(t_i) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{\theta}{t_i}\right)^{\beta+1} \exp\left[-\left(\frac{\theta}{t_i}\right)^{\beta}\right]$ e $R(t_r) = \exp\left[-\left(\frac{\theta}{t_r}\right)^{\beta}\right]$, obteremos:

$$L(\beta;\theta) = k!\; \beta^{r}\,\theta^{\beta r}\left[\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{t_i}\right]^{\beta+1} \times e^{-\sum_{i=1}^{r}(\theta/t_i)^{\beta}}\left[e^{-(\theta/t_r)^{\beta}}\right]^{n-r}$$

A função “Log-Likelihood” será dada por:

$$L = \ln\left[L(\beta;\theta)\right] = \ln(k) + r\ln(\beta) + r\beta\ln(\theta) - (\beta+1)\sum_{i=1}^{r}\ln(t_i) - \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\theta}{t_i}\right)^{\beta} - $$
$$- (n-r)\left(\frac{\theta}{t_r}\right)^{\beta}$$

Para encontrarmos o valor de θ e o valor de β que maximize a função “Log-Likelihood”, obtemos as derivadas de θ e de β e as fazemos iguais a zero. Logo, teremos:

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{r\beta}{\theta} - \beta\theta^{\beta-1}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{t_i}\right)^{\beta} - (n-r)\beta\theta^{\beta-1}\left(\frac{1}{t_r}\right)^{\beta} = 0 \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{dL}{d\beta} = \frac{r}{\beta} + r\ln(\theta) - \sum_{i=1}^{r}\ln(t_i) - \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\theta}{t_i}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{\theta}{t_i}\right) - (n-r)\left(\frac{\theta}{t_r}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{\theta}{t_r}\right) = 0 \quad \text{(B)}$$

Da equação (A) obteremos:

$$\theta = \left(\frac{r}{\sum_{i=i}^{r} \left(\frac{1}{t_i}\right)^{\beta} + (n-r)\left(\frac{1}{t_r}\right)^{\beta}} \right)^{1/\beta} \qquad \text{(C)}$$

Note que quando β = 1, a equação (C) se reduzirá ao estimador "Maximum Likelihood" para a distribuição Exponencial Invertida. Empregando-se a equação (C) para θ na equação (B) e aplicando alguma álgebra, a equação (B) se transformará em:

$$\frac{r}{\beta} - \sum_{i=1}^{r} \ln(t_i) + \frac{r \times \left[\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{t_i}\right)^{\beta} \ln(t_i) + (n-r)\left(\frac{1}{t_r}\right)^{\beta} \ln(t_r) \right]}{\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{t_i}\right)^{\beta} + (n-r)\left(\frac{1}{t_r}\right)^{\beta}} = 0 \qquad \text{(D)}$$

A equação (D) necessitará ser resolvida interativamente.