"INTERVAL OBJECTIVE FUNCTION" E ANÁLISE DE INTERVALOS EM MOLP

Solange Maria Fortuna Lucas
Faculdades IBMEC, Av. Rio Branco, 108 – 5º Andar – Centro – Rio de Janeiro – RJ e
IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
slucas@ibmecrj.br

Resumo:

Neste trabalho apresentamos o desenvolvimento de uma técnica para modelos de programação linear com múltiplas funções objetivo, cujos coeficientes das funções objetivo são intervalos de números reais (Interval Objective Function). Nesta técnica encontramos o intervalo ótimo de solução do modelo multiobjetivo com os coeficientes das funções objetivo em intervalos, que pode, a partir daí, ser melhorado de acordo com a opinião do decisor, sem ser necessária a definição "a priori" de um conjunto de pesos para as funções objetivo. Utilizamos a teoria conhecida como 'Interval Analysis' para encontrar a solução de cada variável do problema em intervalos.

Inicialmente, descrevemos os métodos de apoio à decisão multiobjetivo. A seguir, introduzimos a teoria conhecida como Análise de Intervalos (Interval Analysis). Na quarta seção apresentamos a metodologia desenvolvida para a solução do problema linear multiobjetivo com os coeficientes da função objetivo em números reais. Na quinta seção estendemos a metodologia para o Problemas de Programação Linear Multiobjetivo com os Coeficientes em Intervalos.

Palavras Chave: Análise de Intervalos, Programação Linear Multiobjetivo, Funções Objetivo em Intervalos.

Abstract:

In this paper, we present the development of a technique to solve Multiobjective Linear Programming Models. Using this methodology, we find the optimal solution interval to the Multiobjective Model, which can be bettered according to decision maker opinion, without necessity of "priori" set of weights for the objective functions. We use the Interval Analysis theory to find the solution interval to all variables which compose together optimal solution.

Initially, we describe the Multi-criteria Decision Making Methods, after which we introduce the Interval Analysis Theory. In the next section, we present the methodology developed to obtain the solution to Multiobjective Linear Problem with the real numbers coefficients of the objective function. Finally, we extend the methodology to Multiobjetive Linear Problem with Interval Objetive Function.

Key words: Interval Analysis, Multiobjective Linear Programming and Interval Objective Function.

1. Introdução

Modelos matemáticos têm sido utilizados como uma valiosa ferramenta de apoio a gestão, mas retratar a realidade através deles já se mostrou ser uma tarefa bastante difícil. Na tradicional programação matemática (com objetivo único), nós precisamos fixar um objetivo, como, por exemplo, minimizar custo ou maximizar lucros. Entretanto, se nós pensarmos longe o bastante em um determinado problema, muitas vezes seríamos capazes de identificar múltiplos objetivos [Steuer, R. e Gardiner, L., 1990].

Na busca de aperfeiçoar o entendimento dos problemas em estudo e apresentar soluções eficientes que possam espelhar melhor a realidade, tem se enfatizado o estudo dos problemas com múltiplos objetivos. O problema da formação de um singular critério de otimização a partir de critérios não comparáveis primeiro apareceu em Pareto (1896) [Zeleny,1974].

Problemas com múltiplos objetivos e critérios são geralmente conhecidos como Problemas de Otimização Múlti-critérios (Multiple Critéria Optimization) ou de Tomada de Decisão Multi-critérios (Multiple Critério Decision Making - MCDM) [Miettinen, 1999]. Nas últimas décadas MCDM tem ganho muita importância e profissionais de todo o mundo estão atualmente envolvidos em pesquisa e programas de ensino de diferentes tamanhos, além disso, MCDM tem, cada vez mais, recebido a atenção de profissionais dos setores público e privado [Spronk, J. e Fandel, G., 1983].

Sob a designação comum de métodos com critérios múltiplos, aparecem na literatura especializada dois ramos distintos[Clímaco, Antunes e Alves, 1996]:

- Métodos de apoio à decisão com atributos múltiplos - A teoria da utilidade nasceu no século XVIII com o primeiro trabalho de Bernouilli cujo assunto era a modelagem da preferência de um indivíduo que precisava escolher entre alternativas de risco. Atualmente estes desenvolvimentos são denominados de Teoria da utilidade Multi-atributo (Multi-Attribute Utility Theory-MAUT)[Spronk, J. e Fandel, G., 1983]. De um modo geral os métodos multi-atributos referem-se a métodos de seleção, ordenação ou categorização entre um número finito de alternativas, explicitamente conhecidas [Clímaco, Antunes e Alves, 1996].

- Métodos de apoio à decisão com objetivos múltiplos - Tratam de problemas cujas alternativas são implicitamente definidas por um conjunto de restrições. Este ramo é conhecido como Programação Linear Multiobjetivo (Multiple Objective Linear Programming - MOLP).

Tradicionalmente os métodos de programação linear multicritério classificam-se em três categorias, de acordo com o processo utilizado para agregar as preferências do decisor, com vista a selecionar a "melhor" solução de compromisso[Clímaco, Antunes e Alves, 1996]:

a) Métodos em que é feita uma agregação a priori de preferências - Neste caso, apesar dos vários critérios serem modelados explicitamente, a agregação de preferências é feita antes de qualquer fase de cálculo (o problema é transformado a priori num problema monocritério, por exemplo através da construção de uma função utilidade).

b) Métodos geradores das soluções eficientes - Neste caso se destacam os que correspondem a extensões do método simplex, por forma a determinar todos os vértices eficientes do poliedro viável, havendo a possibilidade de em seguida determinar quais as faces e arestas eficientes. Os primeiros algoritmos geradores foram desenvolvidos na década de 70, sendo de destacar as aproximações de Yu e Zeleny e de Evans e Steur.

c) Métodos de "articulação progressiva de preferências" (interativos) -Há um consenso entre os especialistas que o espectro dos métodos interativos é necessário porque a escolha do método para uso em uma determinada aplicação é problemática e dependente do usuário [Steuer, R., Gardiner, L., 1990].

2. Problema Linear Multiobjetivo

O problema de programação linear com objetivos múltiplos consiste na otimização de p funções objetivo lineares sujeitas a um conjunto de restrições lineares.

Para facilitar a notação, considera-se que as funções objetivo são todas a maximizar:

$$
\begin{aligned}
&\max\ f_1(\underline{x}) = \underline{c}_1 \underline{x}\\
&\max\ f_2(\underline{x}) = \underline{c}_2\ \underline{x}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\max\ f_p(\underline{x}) = \underline{c}_p\ \underline{x}\\
&sujeito\ \ a\ \underline{x} \in X\ \left\{\underline{x} \in \Re^n \ \middle|\ \underline{x} \ge 0\ ,\ \mathrm{A}\underline{x} \ge \underline{b}\ ,\ \underline{b} \in \Re^m \right\}\\
&ou\\
&"Max"\ \underline{f}(\underline{x}) = C\ \underline{x}\\
&s.a\ \ x \in X
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

onde $\boldsymbol{p}$ é o número de funções objetivos, $\boldsymbol{n}$ o número de variáveis, $\boldsymbol{m}$ o número de restrições, $\underline{\boldsymbol{x}}$ o vetor das variáveis de e decisão, **C** é a matriz dos objetivos (dimensão $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n}$), cujas linhas são os vetores $\underline{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{p}}$ (coeficientes da função objetivo $\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}$), **A** é a matriz dos coeficientes tecnológicos ($\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$), $\underline{\boldsymbol{b}}$ é o vetor dos termos independentes, $\boldsymbol{X}$ é a região viável no espaço das variáveis.

2.1 Solução Eficiente

Nos problemas de Otimização, o objetivo é encontrar a solução ótima, já em problemas multiobjetivo a busca pela solução ótima dá lugar a busca pela solução que satisfaça as restrições e melhor atenda aos objetivos especificados, de acordo com as preferências do decisor.

O conceito de Ótimo de Pareto (solução eficiente) foi introduzido em Pesquisa Operacional no pioneiro trabalho de [Koopmans,1951].

Uma solução é dita eficiente para um problema multiobjetivo se e somente se não existir outra solução viável que melhore o valor de uma função objetivo, sem piorar o valor de, pelo menos, outra função objetivo [Clímaco, Antunes e Alves, 1996].

$$X_E = \left\{\underline{x} \in X \;\middle|\; \underline{x}' \in X : \underline{f}\left(\underline{x}'\right) \geq \underline{f}\left(\underline{x}\right)\right\}$$
$$onde\ \underline{f}\left(\underline{x}'\right) \geq \underline{f}\left(\underline{x}\right) sse\, \underline{f}\left(\underline{x}'\right) \geq \underline{f}\left(\underline{x}\right) e\ \underline{f}\left(\underline{x}'\right) \neq \underline{f}\left(\underline{x}\right)$$

(2.2)

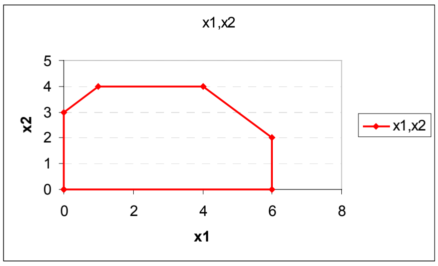


Figura 2.1 - Espaço de Decisão

2.2 Espaço dos Objetivos e Solução Não Dominada

Em programação monobjetivo o Espaço dos Objetivos resume-se a soluções pontuais, em $\Re$, já o Espaço dos Objetivos multiobjetivo é ***p***-dimensional ($\Re_p$).

No Espaço dos Objetivos, cada alternativa potencial de $\underline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$ no Espaço de Decisão tem como representação um vetor $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}),..., f_p(\underline{x}))$ cujos componentes são os valores de cada função objetivo para esse ponto da região viável (fig. 2.1 e 2.2).

Em problemas de programação matemática multiobjetivo (otimização vetorial), os conjuntos de soluções eficientes e da respectiva imagem no espaço dos objetivos são geralmente infinitos [Clímaco, Antunes e Alves, 1996] (figura 2.1 e 2.2)

3. Análise de Intervalos

Em matemática, existem os números reais, uma aritmética real para combiná-los e a análise real para o estudo das propriedades dos números e da aritmética. Matemática de Intervalos é a generalização no qual os números intervalos substituem os números reais, aritmética de intervalos substitui aritmética dos reais, e análise de intervalos substitui análise real [Hansen, E., 1992].

Podemos afirmar que a matemática de intervalos teve início com o aparecimento do livro de R. E. Moore “Interval Analysis” em 1966. Este trabalho transformou esta simples idéia numa ferramenta viável para análise do erro. Ao invés de meramente tratamento de arredondamento de erro, Moore estendeu o uso de análise de intervalos para limitar o efeito do erro de todas as origens, inclusive erro de aproximação e erro em dados.

Desde o aparecimento do livro do Moore, várias publicações sobre análise de intervalos têm ocorrido[Hansen, E., 1992].

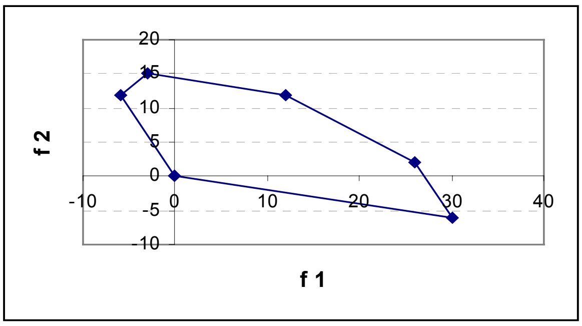


Figura 2.2 – Espaço dos Objetivos

3.1 Principais definições

Um número intervalo é definido como um conjunto fechado de números reais [K,R., B, S., 1996]. Consideremos um intervalo real $X = [a, b]$, o número intervalo X é tal como um intervalo fechado. Este consiste no conjunto $\{x$: $a \leq x \leq b\}$ de números reais incluindo os pontos a e b.

Um número real x é equivalente a um intervalo $[x, x]$. Tal intervalo é denominado **intervalo degenerado**. Quando nós expressamos um número real como um intervalo, nós usualmente manteremos a notação simples. Por exemplo, nós podemos escrever 2 no lugar de [2, 2] ou x no lugar de $[x, x]$.

As regras para aritmética de intervalos são simples quando um ou ambos os termos intervalos são degenerados. Portanto, neste caso é melhor deixar um intervalo degenerado como uma quantidade real.

Um intervalo $X = [a, b]$ é dito ser positivo (ou não negativo) se $a \geq 0$, estritamente positivo se $a > 0$, negativo (ou não positivo) se $b \leq 0$, e estritamente negativo se $b < 0$.

Dois intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$ são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$.

Os números intervalos são parcialmente ordenados. Nós temos $[a, b] < [c, d]$ se e somente se $b < c$. [Hansen, E., 1992].

3.2 - *Aritmética de Intervalos*

As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são indicadas pelos sinais $+$, $-$, $*$, $/$, respectivamente. Se **op** significa uma destas operações para a aritmética dos números reais x e y, assim a correspondente operação para a aritmética dos números intervalos X e Y [Hansen, E., 1992]é :

$$X \mathbf{\ op\ } Y = \{x \mathbf{\ op\ } y : x \in X, y \in Y\} \tag{3.1}$$

Assim, o intervalo X **op** Y resultante desta operação contém todos os números que podem ser formados como x **op** y para cada $x \in X$ e cada $y \in Y$.

Esta definição produz as seguintes regras para geração dos pontos extremos de X **op** Y de dois intervalos $X = [\ a, b]$ e $Y = [\ c, d]$.

$$X + Y = [a + c, b + d] \tag{3.2}$$

$$X - Y = [a - d, b - c] \tag{3.3}$$

$$X * Y = \begin{cases} [ac, bd] & se \quad a \geq 0 \ e \ c \geq 0 \\ [bc, bd] & se \quad a \geq 0 \ e \ c < 0 < d \\ [bc, ad] & se \quad a \geq 0 \ e \ d \leq 0 \\ [ad, bc] & se \quad a < 0 < b \ e \ c \geq 0 \\ [bd, ad] & se \quad a < 0 < b \ e \ d \leq 0 \\ [ad, bc] & se \quad b \leq 0 \ e \ c \geq 0 \\ [ad, ac] & se \quad b \leq 0 \ e \ c < 0 < d \\ [bd, ac] & se \quad b \leq 0 \ e \ d \leq 0 \\ [\min(ad, bc), \max(ac, bd)] & se \quad a < 0 < b \ e \ c < 0 < d \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{Y} = \left[\frac{1}{d}, \frac{1}{c}\right] \quad (0 \notin Y) \tag{3.5}$$

$$\frac{X}{Y} = X * \left(\frac{1}{Y}\right) \quad (0 \notin Y) \tag{3.6}$$

3.3 - *Funções de intervalos*

Uma função de intervalos é uma função cujos argumentos são intervalos. Considere a função de valores reais ***f***, de variáveis reais $\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ e uma função de intervalo ***F***, de variáveis intervalos $\mathbf{X_1}, \ldots, \mathbf{X_n}$. A função de intervalo ***F*** é dita uma extensão de intervalo de ***f*** se

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.7}$$

para todo x_i (i = 1, ..., n). Isto é, se os argumentos de $\boldsymbol{F}$ são intervalos (i.e., $x_i = x_i$), então $F(X_1, \ldots, X_n)$ é um intervalo degenerado igual a $\boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_n)$.

Essa definição pressupõe o uso de aritmética do intervalo exato. Na prática, quando ocorre erro de arredondamento, nós teremos

$$f(x_1, \ldots, x_n) \in F(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.8}$$

quando $\boldsymbol{F}$ é uma extensão do intervalo de $\boldsymbol{f}$.

Uma função de intervalo $\boldsymbol{F}$ é dita ser uma inclusão monótona se $X_i \subset Y_i$ (i = 1, ..., n) implica

$$F(X_1, \ldots, X_n) \subset F(Y_1, \ldots, Y_n) \tag{3.9}$$

Isto segue da relação definida (3.1) que aritmética de intervalos é inclusão monótona. Isto é, se **op** designa +, −, ∗, ou / , então $X_i \subset Y_i$ (i = 1, 2) implica

$$(X_1 \ \mathbf{op}\ X_2) \subset (Y_1 \ \mathbf{op}\ Y_2) \tag{3.10}$$

Do fato que os operadores de aritmética de intervalos são inclusão monótona, segue que as funções com intervalos racionais são inclusões monótonas. Entretanto, nós temos que restringir uma dada função racional para uma forma singular. Um exemplo de Caprani e Madsen (1980) mostra que uma dada função racional é calculada em diferentes modos para diferentes intervalos, o resultado pode não exibir monotonicidade da inclusão[Hansen, E., 1992].

TEOREMA 3.1. Seja $F(X_1, \ldots, X_n)$ uma função de intervalos racionais. Suponhamos que F seja calculada usando uma forma fixada com uma seqüência fixada de operações envolvendo apenas adição, subtração, multiplicação e divisão de intervalos. Então F é inclusão monótona.

A *Prova* do Teorema 3.1 será omitida. Isto segue naturalmente da monotonicidade da inclusão das quatro operações básicas.

As funções monótonas são tratadas da seguinte forma. Seja f uma função real irracional de um vetor real $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Assumimos que uma aproximação racional $r(x)$ seja tal que

$$\left| f(x) - r(x) \right| < \varepsilon \tag{3.11}$$

para todo x tal que $a_i \le x_i \le b_i$ (i=1, ..., n), onde a_i e b_i são constantes. Então

$$f(X_i, \cdots, X_n) \subset r(X_i, \cdots, X_n) + [-\varepsilon, \varepsilon] \tag{3.12}$$

para qualquer intervalo $X_i \subset [a_i, b_i]$ (i=1, ..., n). Assim a variação de f sobre a região com $x_i \in X_i$ (i = 1, ... , n) pode ser limitada pelo cálculo $r(x_1, \ldots, x_n)$ usando aritmética de intervalos e adicionando o limite do erro $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Este cálculo de intervalo de uma função irracional f é uma inclusão monótona se o cálculo do intervalo de r for uma inclusão monótona. O resultado é uma extensão do intervalo de f.

Funções racionais de tais funções irracionais são extensões para intervalos de inclusões monótonas provenientes de operações racionais são como descrito no Teorema 3.1.

O seguinte teorema é o mais importante em análise de intervalos. Rall (1969) o chama de teorema fundamental da análise de intervalos. Uma de suas conseqüências de grande alcance é que isto feito é possível resolver problemas de otimização global[Hansen, E., 1992].

TEOREMA 3.2. Seja $F(X_1, \ldots, X_n)$ uma extensão para intervalos da inclusão monótona de uma função real $f(x_1, \ldots, x_n)$. Então $F(X_1, \ldots, X_n)$ contém a variação de valores de $f(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $x_i \in X_i$ (i = 1, ... , n).

Prova. Suponhamos que $x_i \in X_i$ (i = 1, ... , n). Pela monotonicidade da inclusão $F(X_1, \ldots, X_n)$ contém $F([x_1, x_1] \ldots, [x_n, x_n])$, o qual , por sua vez, contém $f(x_1, \ldots, x_n)$ porque F é uma extensão de intervalo de f. Desde que isto seja verdade para todo x tal que $x_i \in X_i$ (i = 1, ... , n), $F(X_1, \ldots, X_n)$ contém a variação de f sobre estes pontos[Hansen, E., 1992].

3.4 - Funções Monótonas

Se as funções são monótonas podemos obter limites precisos sobre o seu intervalo. Suponhamos f(x) monótona e não decrescente num intervalo $X = [a, b]$.

Então

$$f(X) = [f(a), f(b)] \tag{3.13}$$

Na prática em casos de arredondamento, nós podemos calcular f(a) e f(b) usando "outward rounding" e obter $[f^E(a), f^D(b)]$ e $[f^E(b), f^D(b)]$, respectivamente.

Então

$$F(X) \subset [f^E(a), f^D(b)] \tag{3.14}$$

Assim, nós obtemos limites corretos até mesmo na presença de arredondamento[Hansen, E., 1992].

3.5 - *Equações Lineares de Intervalos*

Um vetor intervalo é um vetor cujos componentes são intervalos. Uma matriz de intervalos é uma matriz cujos elementos são intervalos. Seja x um vetor real com componentes x_i (i= 1, ... , n), e seja X ser um vetor intervalo com componentes Xi (i=1, ... , n). Dizemos que "x pertence a X" (e escrito $x \in X$) se e somente se $x_i \in X_i$ para todo i = 1, ... , n.

Seja A uma matriz real com elementos a_{ij}, e seja A^I uma matriz intervalo com elementos a^I_{ij} para i= 1, ... , m e j= 1, ... , n. Nós dizemos que "A pertence a A^I" (e escrito $A \in A^I$) se e somente se $a_{ij} \in a^I_{ij}$ para todo i= 1, ... , m e j= 1, ... , n.

Similarmente, para os vetores intervalos X e Y escrevemos $X \subset Y$ se e somente se $Xi \subset Yi$ para todo i= 1, ... , n, onde Y_1, ... , Y_n são os componentes de Y. Também, escrevemos $A^I \subset B^I$ se e somente se $a^I_{ij} \subset b^I_{ij}$ para todo i= 1, ... , m e j= 1, ... , n onde os b^I_{ij} (i= 1, ... , m; j= 1, ... , n) são os elementos de B^I.

O conjunto de pontos reais (i. e., vetores) x em um vetor intervalo X forma um paralelepípedo n-dimensional com lados paralelos aos eixos coordenados. Nós freqüentemente nos referimos a um vetor intervalo como uma caixa (box) [Hansen, E., 1992]. (figura 3.1)

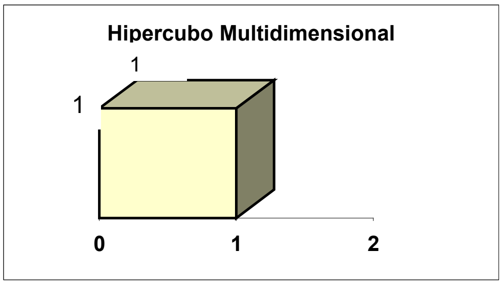


Figura 3.1 – Vetor Intervalo – *I* = {[0,1], [0,1], [0,1]}

Considere a equação real

$$Ax = b \tag{3.15}$$

Existem muitas aplicações em que os elementos da matriz A e/ou os componentes do vetor b não são precisamente conhecidos. Se nós conhecemos uma matriz intervalo A^I limitando A e um vetor intervalo b^I limitando b, nós podemos substituir (3.15) por

$$A^I x = b^I \tag{3.16}$$

O intervalo de solução para (3.16) irá conter a solução para (3.15).

Nós definimos a solução de (3.16) como o conjunto de todos os vetores x que são solução para (3.15) para algum $A \in A^I$ e $b \in b^I$.

$$S = \{ x : Ax = b, A \in A^I , b \in b^I\} \tag{3.17}$$

Este conjunto não é geralmente um vetor intervalo. Freqüentemente, é difícil descrever S, é mais comum procurar o vetor X contendo S que tenha componentes intervalos limitados. Nós dizemos que solucionamos o problema quando encontramos X. Atualmente nós não procuramos nem mesmo encontrar o vetor X, mas apenas o vetor mais largo que o contém. Existem vários métodos de encontrar um vetor intervalo limitando S, veja Alefeld e Herzberger (1983) e Neumaier (1986, 1990).

4. *Intervalo Ótimo em MOLP*

4.1 Introdução

Entre os métodos de "articulação progressiva de preferências" (interativos), temos os métodos STEM, TRIMAP, de Zionts e Wallenius, "Interval Criterion Weights" e Pareto Race. Cada um destes métodos tem uma contribuição particular ao estudo dos problemas de decisão com conflito, todos estes métodos podem ser utilizados no software TOMMIX, que proporciona ao decisor a oportunidade de analisar o problema em estudo através dos cinco métodos descritos. Para se unir a estes esforços desenvolvemos o método *Intervalo Ótimo em MOLP*.

4.1 – *Principais Definições do método Intervalo Ótimo em MOLP*

No método que desenvolvemos em [Lucas, S.F(2003)], utilizamos a teoria conhecida como Otimização de Intervalos para encontrar o hipercubo multidimensional que satisfaça as restrições do modelo, mais especificamente, utilizamos o Interval Solver, que é um Add-in para o Excel [Hyvönem,E.,1994]. Definimos como Intervalo Ótimo de Solução, o hipercubo multidimensional transformado para o espaço dos objetivos.

Definição 4.1 – Definimos função objetivo de intervalo (objective function of interval) a extensão da função objetivo real cujos argumentos são intervalos.

Seja $F(X_1,...,X_n)$ uma extensão para intervalo de uma inclusão monótona da função objetivo real $f(x_1,...,x_n)$. Então $F(X_1,...,X_n)$ contém a variação de valores de $f(x_1,...,x_n)$ para todo $x_i \in X_i$ ($i = 1, ... , n$).

Esta afirmação é uma conclusão imediata da própria definição de função objetivo linear, que utiliza uma seqüência de operações básicas.

Definição 4.2 – Espaço dos objetivos em Intervalos e Intervalo Ótimo em MOLP

Em programação linear multiobjetivo o espaço dos objetivos é mapeado num espaço p-dimensional. Neste espaço cada alternativa potencial $\underline{x} \in X$ tem como representação um vetor $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}),..., f_p(\underline{x}))$ cujos componentes são os valores de cada função objetivo para esse ponto da região viável. Já no Espaço dos Objetivos em Intervalos o vetor intervalo X tem como representação um vetor intervalo $IO(X) = (f_1(X), f_2(X),..., f_p(X))$, cujos componentes são os valores (intervalo) de cada Função Objetivo em Intervalos e que denominamos de Intervalo Ótimo do modelo.

Considerando um Problema Multiobjetivo com o seu espaço das variáveis e dos objetivos bi-dimensional podemos considerar o seguinte:

Seja ABCD o retângulo formado pelo vetor intervalo de solução X no espaço das variáveis, onde

Para obtermos o intervalo ótimo (IO) aplicamos f_1 e f_2 aos intervalos $[x_A, x_B]$ e $[y_A, y_C]$.

Assim temos

$$IO = \{[f_1(x_A, y_A), f_1(x_B, y_C)], [f_2(x_A, y_A), f_2(x_B, y_C)]\}$$

Como (x_A, y_A) é o ponto A e (x_B, y_C) é o ponto D, concluímos que o vetor IO é a transformação do vetor X, representado pelos pontos A (localização do vetor) e D (extremidade do vetor) no espaço das variáveis, para o espaço dos objetivos.

A seguir descrevemos as etapas principais do método:

1ª Etapa

Inicialmente a técnica de otimização de intervalos escolhida é implementada para obtermos o vetor intervalo que satisfaça as restrições do modelo.

2ª Etapa

Considerando as funções objetivo como funções de intervalo, ou seja, funções cujos argumentos são intervalos (seção 3.5), encontramos no espaço dos objetivos o Intervalo Ótimo de Solução.

3ª Etapa

Dar ao decisor a possibilidade da escolha de um determinado intervalo que esteja contido no intervalo que foi obtido na 1ª Etapa.

4ª Etapa

A partir da escolha do decisor, apresentar o resultado como o Intervalo de Decisão.

Importante: O Intervalo Ótimo de Solução pode não satisfazer as necessidades do decisor uma vez que o espaço de decisão não estará totalmente incluído nesta solução. Visto isto, apresentamos este método como um método complementar de análise do problema em estudo.

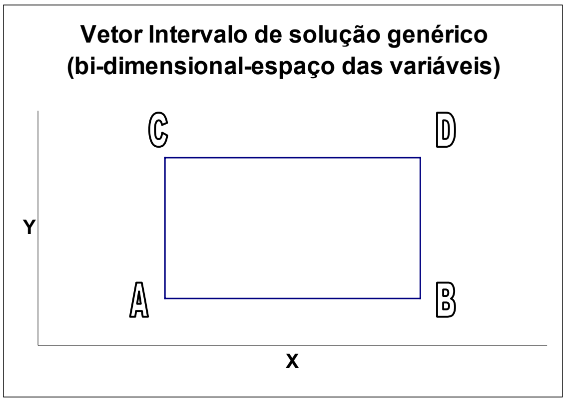


Figura 4-1 – Vetor Intervalo X de Solução

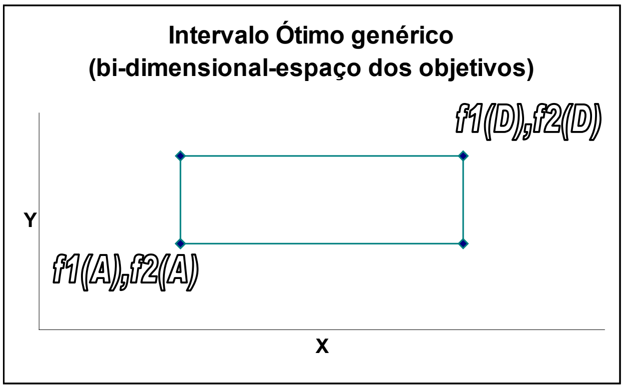


Figura 4,2 – Transformação do Vetor Intervalo X para o espaço dos objetivos (Vetor Intervalo Ótimo Multiobjetivo)

4.2 Exemplo Ilustrativo

Considere o problema

$$Max\ \underline{f}\ (\underline{x}) = [f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]$$
$$com\ f_1(x_1, x_2) = 5x_1 - 2x_2$$
$$e \quad f_2(x_1, x_2) = -x_1 + 4x_2$$

sujeito a

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

A tabela 4.1 nos mostra a solução do problema considerando as variáveis reais.

Vértices	F1	F2
A (0,0)	0	0
B (6,0)	30	-6
C (6,2)	26	2
D (4,4)	12	12
E (1,4)	-3	15
F (0,3)	-6	12

Tabela 4.1 – Solução Real do Problema Multiobjetivo

Supondo a utilização de uma técnica de otimização de intervalos, que nos dê a maior solução possível totalmente viável, obtemos o vetor intervalo *X*, como solução do modelo:

X = {[0,5], [0,3]}
Considerando as funções objetivo como funções objetivo de intervalo, ou seja, funções cujos argumentos são intervalos, temos o seguinte:

$$f_1 = 5x_1 - 2x_2 \Rightarrow f_1 = 5 \times [0,5] - 2 \times [0,3] \Rightarrow f_1 = [0,19]$$
$$f_2 = -1x_1 + 4x_2 \Rightarrow f_2 = -1 \times [0,5] + 4 \times [0,3] \Rightarrow f_2 = [0,7]$$

Transformando o vetor intervalo *X* para o espaço dos objetivos nós temos o Intervalo Ótimo de Solução: *IO*={[0,19],[0,7]}

Encontrar um vetor intervalo como solução das restrições não é um problema simples. A solução encontrada para o exemplo ilustrativo *X*={[0,5],[0,3]} utilizando o Interval Solver (*Add-in Excel 97*) foi obtida após interação com o solver. A primeira solução encontrada foi *X*= {[0,6],[0,4]}que apresentou o problema conhecido como excesso de largura no intervalo, pois este hipercubo inclui soluções que não são viáveis. Esta solução foi encontrada em tempo inferior a 1 segundo. A interação foi muito facilitada pois temos um caso bi-dimensional o que não vai acontecer num estudo de caso real. O *Interval Solver* utiliza o método *Tolerance Propagation Aproach* [Hyvönen,1992] para encontrar a solução admitindo, inclusive, restrições não lineares. Existe a necessidade do desenvolvimento de um método específico para modelos lineares pois teremos mais esta ferramenta de Apoio à Decisão para Problemas Multiobjetivo, além de contribuir também à Análise de Sensibilidade de Problemas Monobjetivo.

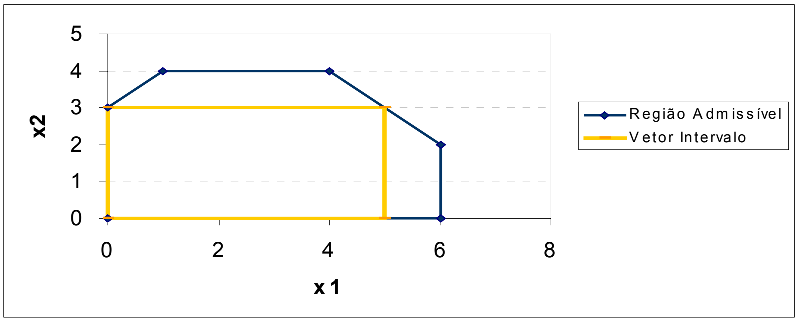


Figura 4.1 – Vetor Intervalo *X* de Solução

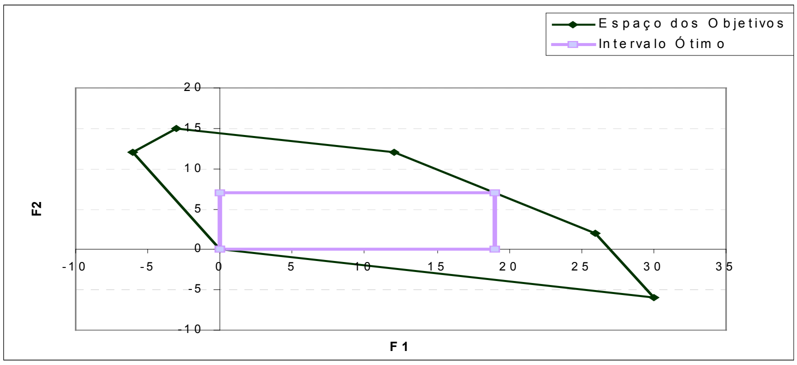


Figura 4.2 – Intervalo Ótimo de Solução para o Problema Multiobjetivo

5. Programação Linear Multiobjetivo com os coeficientes da função objetivo em Intervalos

A tomada de decisões num ambiente complexo, caracterizado pela existência de múltiplos critérios conflituosos é influenciada por fatores de incerteza associados aos dados de entrada. Os dados de entrada são muitas vezes imprecisos, incompletos, sujeitos a variações ou dependentes do tempo, refletindo a natureza complexa e mal estruturada dos problemas. Os modelos matemáticos, por muito elaborados que sejam, constituem sempre uma representação mais ou menos aproximada da realidade. Se, por um lado, a consideração explícita de critérios múltiplos consegue captar de forma mais realista os diversos aspectos conflituosos a ponderar na procura de uma solução satisfatória de compromisso, são, por outro lado, introduzidos fatores adicionais de incerteza ao requerer-se a incorporação no processo de resolução das preferências do decisor que são geralmente ambíguas e mal estruturadas [Antunes, C.H.,1999].

O método conhecido como "Interval Objective Fuction" (Funções Objetivo com coeficientes em Intervalos)[Bitran GR, 1980] tem sido utilizado em vários trabalhos [Antunes, C.H. et Al, 1999], [Chanas, S. e Kuchta, D., 1996], como tratamento da incerteza.

Nos problemas de "Interval Objective Function", os coeficientes de cada função objetivo passam a ser intervalos fechados de números reais, definidos por um par ordenado
$[c_{jE}, c_{jD}]$ onde c_{jE} e c_{jD} são os limites esquerdo e direito de c_j, respectivamente.

Bitran [Bitran, G.R, 1980] definiu o problema (P) da seguinte forma:

$$Max\{Cx : x \in F, C \in \Phi\} \tag{5.1}$$

onde F são as funções objetivo, previamente definidas e Φ o conjunto das matrizes p por m com os c_{ij} elementos em intervalos [c_{ijE} , c_{ijD}] , i = 1, 2,..., p e j = 1, 2, ..., m. Os limites inferiores e superios c_{ijE} e c_{ijD} são numeros reais. O conjunto solução de (P) é definido como o conjunto de pontos em F eficiente com respeito a todo C ε Φ e é denotado por EF (também referido como o conjunto de pontos eficientes em P). A definição de EF implica que

$$EF = \bigcap_{c \in \Phi} EF(C) \tag{5.2}$$

As propriedades de (P) e a existência de pontos eficientes também foram discutidos, a seguir um caso onde os limites inferiores são todos não negativos foi considerado e um algoritmo para determinar os EF (exteriores) foi obtido.

5.1 Análise do Intervalo Multiobjetivo para problemas com os coeficientes da função objetivo em intervalos.

Em Programação Linear Multiobjetivo o conflito das questões determina a importância das soluções eficientes em detrimento das soluções ótimas. Prosseguindo no estudo do tratamento da incerteza nos deparamos com a possibilidade de relacionar os problemas cuja imprecisão pudesse ser introduzida no modelo através dos coeficientes da função objetivo em intervalos e considerar que um vetor intervalo de solução no espaço das variáveis pudesse contribuir com o processo de tomada de decisão. De acordo com a metodologia desenvolvida no Capitulo 4 também podemos utilizar a otimização de intervalos para os problemas cujos coeficientes da função objetivo sejam intervalos de números reais (Interval Objective Function).

Definição 5.1 – Definimos a Função Objetivo de Intervalo (Objective Function of Interval) com os Coeficientes em Intervalos como sendo a função objetivo de um problema de programação linear cujo argumento é um intervalo de números reais e os coeficientes da função podem também ser intervalos de números reais.

A função objetivo num problema de programação linear é uma soma ponderada, assim sendo é uma sucessão de operações de produto e soma.

Proposição 5.1 – A função objetivo de intervalo terá sempre um intervalo [a,b] de números reais como resultado, mesmo quando os coeficientes são escritos como intervalo.

Prova:
Seja f a função objetivo cujos os argumentos e coeficientes são intervalos então

$$f = [a_{1e}, a_{1d}][x_{1e}, x_{1d}] + [a_{2e}, a_{2d}][x_{2e}, x_{2d}] + \cdots + [a_{ne}, a_{nd}][x_{ne}, x_{nd}] \tag{5.3}$$

Como

$$a_{ie}, a_{id}, x_{ie} \ \ e \ \ x_{id} \in \Re \ \ \forall i \ \ i = 1, \cdots, n \tag{5.4}$$

Pelas regras da multiplicação da aritmética de intervalos (3.4), temos que

$$[a_{ie}, a_{id}] \times [x_{ie}, x_{id}] = [a_i, b_i] \in \Re \ \forall i \tag{5.5}$$

então

$$f = [a_1, b_1] + [a_2, b_2] + \cdots + [a_n, b_n] \tag{5.6}$$

Pela regra da adição da aritmética de intervalos (3.2), temos que

$$f = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i , \sum_{i=1}^{n} b_i \right] \text{ onde } \sum_{i=1}^{n} a_i = a \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = b, \quad a \quad \text{e} \quad b \in \Re \tag{5.7}$$

Logo

$$f = [a, b] \tag{5.8}$$

Analogamente, no caso de um ou mais coeficientes da função objetivo ser ou originar um intervalo negativo, a regra da subtração da aritmética de intervalos (3.3) deve ser seguida.

5.2 O Intervalo Ótimo para problemas com Funções Objetivo de Intervalos com os Coeficientes em Intervalos.

No método descrito no capítulo 4, para encontrar o hipercubo multidimensional que satisfaça as restrições do modelo utilizamos a idéia inicial da Otimização de Intervalos e transformando este hipercubo para o espaço das funções objetivo encontramos o Intervalo Ótimo de Solução.

Já no caso em que os coeficientes da funções objetivo também são intervalos temos que utilizar a aritmética de intervalos para encontrar o Intervalo Ótimo de Solução.

Cada função objetivo terá como solução um intervalo, como vimos na proposição 5.1, e o Intervalo Ótimo de Solução será o vetor intervalo proveniente dos resultados das soluções objetivo. Olhando esta solução como vetor intervalo não existe necessidade de operarmos a interseção dos intervalos pois um vetor intervalo é um hipercubo multidimensional.

Encontramos na literatura vários trabalhos que tratam da interseção de conjuntos de soluções ou de intervalos: em Bitran [Bitran, G.R, 1980] vimos que, inicialmente o problema Multiobjetivo é aumentado pela introdução de uma incerteza controlada nos coeficientes das funções objetivo (ou a incerteza é de 5%, 10%). Os limites inferiores do intervalo de incerteza produzem uma nova função objetivo e os limites superiores dos mesmos intervalos produzem outra função objetivo, isto acontece para cada função objetivo aumentando o tamanho do problema. A seguir para cada função objetivo um conjunto de soluções eficientes é obtido e a interseção entre estas soluções eficientes determina a solução do problema; em Sengupta e Pal [Sengupta, A e Pal, T. K., 2000] foi apresentado uma revisão sobre os trabalhos existentes sobre comparação e ranquiamento de dois números intervalos sobre uma linha real. No nosso trabalho o vetor intervalo é multidimensional, onde o quantidade de intervalos define a dimensão do hipercubo.

5.3 Exemplo Ilustrativo

A partir do exemplo do capítulo 5 admitimos uma incerteza de 10% nos coeficientes da função objetivo, então

$$\begin{aligned}
&Max \quad \underline{f}\,(\underline{x}) = [f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)] \\
&com \\
&f_1 = [4.5, 5.4]\, x_1 + [-2.2, -1.8]\, x_2 \\
&f_2 = [-1.1, -0.9]\, x_1 + [3.6, 4.4]\, x_2 \\
&sujeito \quad a \\
&-x_1 + x_2 \le 3 \\
&x_1 \le 6 \\
&x_1 + x_2 \le 8 \\
&x_2 \le 4 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Da mesma forma que fizemos no capítulo anterior, supondo a utilização de uma técnica de otimização de intervalos, que nos dê a maior solução possível totalmente viável, obtemos o vetor intervalo *X*, como solução do modelo:

X = {[0,5], [0,3]}

(5.10)

Considerando as funções objetivo como funções objetivo de intervalo com os coeficientes em intervalos, por 5.4, temos:

$$f_1 = [4.5, 5.5]x_1 + [-2.2, -1.8]x_2 \Rightarrow f_1 = [4.5, 5.5] \times [0, 5] + [-2.2, -1.8] \times [0, 3]$$

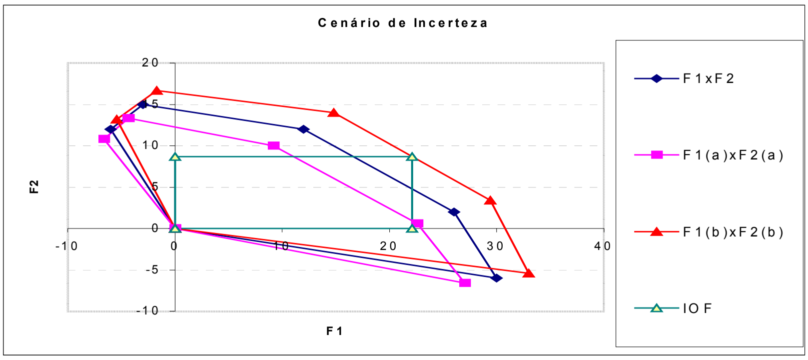
$$f_1 = [(4.5 \times 0) + (-2.2 \times 0), (5.5 \times 5) + (-1.8 \times 3)] = [0, 22.1]$$

$$f_2 = [-1.1, -0.9]x_1 + [3.6, 4.4]x_2 \Rightarrow f_2 = [-1.1, -0.9] \times [0, 5] + [3.6, 4.4] \times [0, 3]$$

$$f_2 = [(-1.1 \times 0) + (3.6 \times 0), (-0.9 \times 5) + (4.4 \times 3)] = [0, 8.7]$$

Transformando o vetor intervalo *X* para o espaço dos objetivos nós temos o Intervalo Ótimo do modelo com os coeficientes da função objetivo em intervalos:

IO={[0, 22.1],[0, 8.7]}



F1 x F2 – Funções Objetivo Original

F1(a) x F2(a) – Funções Objetivo com os coeficientes no limite inferior do intervalo

F1(b) x F2(b) – Funções Objetivo com os coeficientes no limite superior do intervalo

IOF – Funções Objetivo de Intervalo com os coeficientes em intervalo

6. Conclusão

Transformando o Vetor Intervalo de solução para o Espaço dos Objetivos com as funções objetivo com os coeficientes em intervalos o resultado encontrado foi o Intervalo Ótimo IO={[0, 22.1],[0, 8.7]. Comparando as áreas do Exemplo Ilustrativo com coeficientes inteiros, seção 4,2,e com a introdução de 10% de incerteza nos coeficientes da Função Objetivo, na seção 5.3, constatamos que, com esta técnica acrescemos, 44,5 % na área dos Intervalo Ótimo após a introdução da incerteza. Ressaltamos a relevância da aplicação da Teoria de Analise de Intervalos, uma vez que a transformação do hipercubo do espaço das variáveis para o espaço dos objetivos mesmo com as funções objetivo com os coeficientes em intervalos também nos fornece um hipercubo, ou seja temos um Intervalo Ótimo como solução.
Toda a decisão deve ser o resultado de um processo que envolve estudos de causas e conseqüências, atreladas a objetivos [Gomes, L. F. A. et Al,2002]. A técnica desenvolvida neste trabalho apresenta mais uma ferramenta de Apoio à Tomada de Decisão, tendo ainda maior relevância para análise do problema em ambiente de incerteza, uma vez que a solução de cada variável é um intervalo real que dará origem ao vetor intervalo de solução. Destacamos que esta técnica não requer a determinação de pesos para os objetivos, o que pode ser vantajoso pois nem sempre existe um juízo de valor sobre qual peso atribuir para cada objetivo. Cabe ressaltar que nem todos os vértices eficientes poderão estar incluídos no vetor intervalo de solução, o que pode ser visto como desvantagem em relação a outras técnicas, todavia em problemas complexos, soluções convenientes podem ter mais utilidade do que soluções ótimas (ou eficientes).
Como Leibniz lembrou a Jacob Bernoulli, a natureza é tão variada e complexa que temos dificuldade em extrair generalizações válidas do que observamos. Usamos atalhos que nos levam a percepções errôneas ou interpretamos amostras pequenas como representativas do que amostras maiores relevariam [Bernstein, P.L.(1997)]. Assim o processo de aprendizagem do problema deve ser continuado, principalmente em cenários complexos.

Referências

Antunes, C.H. – Tratamento da Imprecisão e da Incerteza em Programação Linear Multiobjectivo, Projecto Praxis /2/2.1/MAT/465/94

Antunes, C.H. et Al (1999) “An Interactive Multiple Objective Approach to the optimization of the interval objective function”

Bernstein, P.L. (1997) – Desafio aos Deuses – A Fascinante História do Risco, 3ª Edição, Editora Campus, Rio de Janeiro.

Bitran GR (1980) - Linear multiple objective problems with the coefficients, *Mgmt Sci* 26: 694-706

Chanas, S. e Kuchta, D. (1996) " Multiobjective programming in optimization of interval objective functions - A generalized approach", *European Journal of Operational Research* 94, 594-598
Chinneck, J. W. e Ramadan, K. (2000) Linear Programming with interval coefficients, Journal of the Operational Research Society, 51, 209-220.
Clímaco, J., Antunes, C.H., Alves, M. J. (1996) - *Programação Linear Multiobjectivo - Métodos Interactivos, "Software"e Aplicações*, Impresso na secção de textos da FEUC, Coimbra.
Gomes, L.F.A. et Al (2002) – *Tomada de Decisão Gerencial – Enfoque Multicritério*, Ed. Atlas, São Paulo.
Hansen, E. (1992) *Global Optimization Using Interval Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York.
Hyvönen, E. (1992) – Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic. The Tolerance Propagation Approach. Artificial Intelligence 58, 1992, pp.71-112.
Hyvönen, E. (1994) – Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic, In: Freuder, E., Mackworth, A, (Eds.) *Constraint-Based Reasoning*, MIT Press, Cambridge, USA,1994.
Hyvönen, E. (1994) – Spreadsheets Based in Interval Constraint Satisfaction. *Artificial intelligence for Engineering Design*, Analysis and Manufacturing 8, No.1 , 1994, pp. 27-34.
Inuiguchi, H., e Sakawa, M., (1997) "An achievement rate approach to linear programming with an interval objective function", *Jornal of the Operational Society* 48, 25-33
Koopmans, T.C., (1951) *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph No. 13, John Wiley & Sons, New York.
Lucas, S. F. (2003) – Análise de Intervalos em Problemas de Programação Linear Multiobjetivo – XXXV SBPO, Natal, Anais em CD.
Lucas, S. F. (2003) – Intervalo Ótimo em Problemas e Programação Linear Multiobjetivo – VII Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha, Anais em CD
Miettinen, K. (1999) - http://www.mit.jyu.fi/~miettine/book/index.html
Pareto, V. (1896) - *Course d'Economic Politique*, Lausane, Rouge
Sengupta, A e Pal, T. K. (2000) On comparing interval numbers, *European Journal of Operational Research*, 127, 28-43.
Spronk, J., Fandel, G. (1983) - *Multiple Criteria Decision Methods and Applications*, Springer-Verlag
Steur, R., Gardiner, L. (1990) - Interactive Multiple Objective Programming: Concepts, Current Status, and Future Directions, Cap. IV, *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, C. Bana e Costa (ed.), Springer-Verlag, Berlin, 413-444.
Zeleny, M. (1974) - Linear Multiobjective Programming, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systens,* Managing Eds: M. Beckmann, Providence and H. P. Künzi, Zürich, Vol.95, Sring-Verlag, New York