Otimização de Abastecimento para Veículos Movidos a Dois Combustíveis

Otávio Simões Barbosa Filho

SEI – Secretaria Especial de Informática do Senado Federal - Prodasen
Praça dos Três Poderes, Anexo "C" do Senado Federal
70165-900 Brasília-DF
otaviosb@senado.gov.br

Resumo:
Apresentam-se dois modelos de programação matemática para efeito de determinação de estratégias ótimas de abastecimento de veículos capazes de receberem uma mistura de dois combustíveis distintos. O primeiro, não-linear, maximiza a autonomia do veículo; o segundo, linear, minimiza o custo de abastecimento

Palavras-chave: Programação Linear. Programação Não-linear. Otimização. Pesquisa Operacional.

Abstract:
This paper presents two mathematical programming models aimed to set an optimal fuel supply policy for vehicles that support a two-combustible mix. Range maximization is described by a non-linear programming model, while cost minimization modelling gives rise to a linear one .

Keywords: Linear Programming. Nonlinear Programming. Optimization. Operations Research.

1. O Rendimento Composto

Nesta seção, determinaremos uma expressão para o rendimento composto (km/l) resultante da mistura de dois combustíveis.

Suponhamos que, após o abastecimento, o tanque do veículo apresente uma mistura dos combustíveis *1* e *2* (álcool e gasolina, por exemplo) nas proporções α e $1 - \alpha$, respectivamente. Sejam:

ΔV: Volume de mistura combustível injetado numa câmara de combustão.

ΔV_i: Volume de combustível i na mistura injetada numa câmara de combustão; $i = 1, 2$.

ΔV_i^*: Volume de combustível i, quando exclusivamente utilizado, injetado numa câmara de combustão; $i = 1, 2$.

x_i: Número de mols do combustível i, contido no volume ΔV_i; $i = 1, 2$.

n_i: Número de mols de CO_2 produzidos por x_i mols do combustível i; $i = 1, 2$.

x_i^*: Número de mols do combustível i, quando exclusivamente utilizado, contido no volume ΔV_i^*; $i = 1, 2$.

n_i^*: Número de mols de CO_2 produzidos por x_i^* mols do combustível i; $i = 1, 2$.

n: Número de mols de CO_2 produzidos na combustão da mistura de dois combustíveis.

r_i: Rendimento (km/l) do veículo quando abastecido exclusivamente com combustível i; $i = 1, 2$.

r: Rendimento (km/l) do veículo quando abastecido com uma mistura dos combustíveis *1* e *2*.

μ_i: Massa específica do combustível i; $i = 1, 2$.

M_i: Massa molecular do combustível i; $i = 1, 2$.

Então,

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

$$\Delta V_1 = \alpha \Delta V$$

$$\Delta V_2 = (1 - \alpha) \Delta V$$

O número de mols n contido num volume V de massa m de uma substância simples de massa específica μ e massa molecular M é dado por

$$n = \frac{\mu}{M} V$$

pois, por definição, $n = m / M$ e $\mu = m / V$.

Numa primeira aproximação, consideraremos a gasolina como uma composição de isooctano (C_8H_{18}) e heptano (C_7H_{16}) tão-somente, experimentando combustão total. Nesse caso, o CO_2 é o único gás produzido. ([Tito], por exemplo).

$$C_8H_{18} + C_7H_{16} + {}^{47}/_2\, O_2 \longrightarrow 15CO_2 + 17H_2O$$

Da mesma forma, a combustão do álcool (etanol) será representada pela reação,

$$C_2H_6O + 3O_2 \longrightarrow 2CO_2 + 3H_2O$$

Designemos, agora,

V_I: Volume inicial da câmara de combustão antes da explosão.

V_F: Volume final da câmara de combustão após a expansão total do CO_2.

h: Amplitude do curso do êmbolo da câmara de combustão.

T_i^*: Temperatura no interior da câmara quando i é o único combustível utilizado; $i = 1, 2$.

T : Temperatura no interior da câmara quando da combustão da mistura de combustíveis.

τ_i^*: Trabalho mecânico realizado na câmara de combustão quando i é o único combustível utilizado; $i = 1, 2$.

τ_i: Trabalho mecânico realizado na câmara de combustão pelo combustível i, quando componente da mistura; $i = 1, 2$.

Então, segundo [Halliday], por exemplo, podemos escrever

$$\tau_i^* = \int_{V_I}^{V_F} p\,dV = \int_{V_I}^{V_F} \frac{n_i^* R T_i^*}{V}\, dV$$

$$= n_i^* R T_i^* \ln \frac{V_F}{V_I}$$

Analogamente,

$$\tau = nRT \ln \frac{V_F}{V_I}$$

$$= (n_1 + n_2) RT \ln \frac{V_F}{V_I}$$

$$= \tau_1 + \tau_2$$

Como a energia necessária para deslocar o êmbolo ao longo do seu curso h deve ser a mesma independentemente do combustível ou mistura utilizados,

$$\tau = \tau_1^* = \tau_2^*$$

Associando-se o índice *1* ao álcool e *2* à gasolina, e denotando-se

x_{21}: número de mols de isooctano na gasolina misturada com álcool.

n_{21}: número de mols de CO_2 produzidos pelo isooctano da gasolina misturada com álcool. Da reação de combustão do isooctano, tem-se $n_{21} = 8\,x_{21}$.

x_{22}: número de mols de heptano na gasolina misturada com álcool.

n_{22}: número de mols de CO_2 produzidos pelo heptano da gasolina misturada com álcool; $n_{22} = 7\,x_{22}$.

ΔV_{21}: Volume de isooctano na gasolina.

ΔV_{22}: Volume de heptano na gasolina.

μ_{21}: Massa específica do isooctano.

μ_{22}: Massa específica do heptano.

M_{21}: Massa molecular do isooctano.

M_{22}: Massa molecular do heptano.

Então, da igualdade $\tau = \tau_1^*$, podemos escrever,

$$(n_1 + n_2)\,T = n_1^*\,T_1^*$$

$$(n_1 + n_{21} + n_{22})\,T = n_1^*\,T_1^*$$

$$(2x_1 + 8x_{21} + 7x_{22})\,T = 2x_1^*\,T_1^*$$

$$\left(2\frac{\mu_1}{M_1}\Delta V_1 + 8\frac{\mu_{21}}{M_{21}}\Delta V_{21} + 7\frac{\mu_{22}}{M_{22}}\Delta V_{22}\right)T = 2\frac{\mu_1}{M_1}\Delta V_1^*\,T_1^* \qquad (I)$$

Considerando-se a octanagem β da gasolina, podemos escrever,

$$x_{21} = \beta x_2$$

$$x_{22} = (1-\beta)\,x_2$$

$$(1-\beta)\,x_{21} = \beta x_{22}$$

$$(1-\beta)\frac{\mu_{21}}{M_{21}}\Delta V_{21} = \beta\frac{\mu_{22}}{M_{22}}\Delta V_{22}$$

$$\Delta V_{22} = \frac{(1-\beta)\,\mu_{21}\,M_{22}}{\beta\,\mu_{22}\,M_{21}}\,\Delta V_{21}$$

Por outro lado,

$$\Delta V_2 = \Delta V_{21} + \Delta V_{22}$$

então,

$$\Delta V_{21} = \frac{\beta\,\mu_{22}\,M_{21}}{\beta\,\mu_{22}\,M_{21} + (1-\beta)\,\mu_{21}\,M_{22}}\,\Delta V_2$$

$$\Delta V_{22} = \frac{(1-\beta)\,\mu_{21}\,M_{22}}{\beta\,\mu_{22}\,M_{21} + (1-\beta)\,\mu_{21}\,M_{22}}\,\Delta V_2$$

Substituindo-se essas expressões de ΔV_{21} e ΔV_{22} em (I), tem-se

$$2\,\frac{\mu_1}{M_1}\Delta V_1 + (\beta + 7)\frac{\mu_{21}\mu_{22}}{\beta\mu_{22}M_{21} + (1-\beta)\,\mu_{21}M_{22}}\Delta V_2 = 2\frac{\mu_1\,T_1^*}{M_1\,T}\Delta V_1^*$$

$$\left[\alpha\frac{2\mu_1}{M_1} + (1 - \alpha)(\beta + 7)\frac{\mu_{21}\mu_{22}}{\beta\mu_{22}M_{21} + (1-\beta)\ \mu_{21}M_{22}}\right]\Delta V = 2\frac{\mu_1 T_1^*}{M_1 T}\Delta V_1^* \qquad (II)$$

Como ao deslocamento h do êmbolo corresponde, em média, um deslocamento Δy do veículo, o rendimento pode ser expresso, a menos de uma constante de proporcionalidade cancelável, como

$$r_i = \frac{h}{\Delta V_i^*}; \quad i = 1, 2.$$

ou

$$r = \frac{h}{\Delta V}$$, para o rendimento composto.

Assim, dividindo-se, membro a membro a equação (II) por h, e explicitando-a em termos de r, tem-se,

$$r^{-1} = \frac{2\frac{\mu_1 T_1^*}{M_1 T}}{\alpha\frac{2\mu_1}{M_1} + (1 - \alpha)(\beta + 7)\frac{\mu_{21}\mu_{22}}{\beta\mu_{22}M_{21} + (1-\beta)\ \mu_{21}M_{22}}}\, r_1^{-1}$$

Na expressão acima podemos substituir

$$a_1 = 2\frac{\mu_1}{M_1}$$

$$a_2 = (\beta + 7)\frac{\mu_{21}\mu_{22}}{\beta\mu_{22}M_{21} + (1-\beta)\ \mu_{21}M_{22}}$$

$$\alpha = \frac{v_1 + V_1}{V}$$

em que

v_i: Volume a abastecer do combustível i; $i = 1, 2$ (variáveis de decisão).

V_i: Volume residual do combustível i; $i = 1, 2$.

V: Volume do tanque imediatamente após o abastecimento;

$V = v_1 + V_1 + v_2 + V_2$

Para obter,

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_1 V_1 + a_2 V_2}{(a_1 T_1^* / T) V} \, r_1 \\[2em] &= \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_1 V_1 + a_2 V_2}{(a_2 T_2^* / T) V} \, r_2 \end{aligned}}$$

Em que a segunda expressão, em termos de r_2, é obtida de forma análoga à primeira, igualando-se as expressões de τ e τ_2.

2. Maximização do Rendimento

Em não havendo restrição orçamentária, o abastecimento completará a capacidade (K) do tanque. Assim, $V = K$, e o problema pode ser descrito na forma,

maximizar $\quad r = \dfrac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_1 V_1 + a_2 V_2}{K a_1 T_1^* / T} \, r_1$

sujeita a:

$v_1 + v_2 = L$

$v_1, v_2 \geqslant 0$

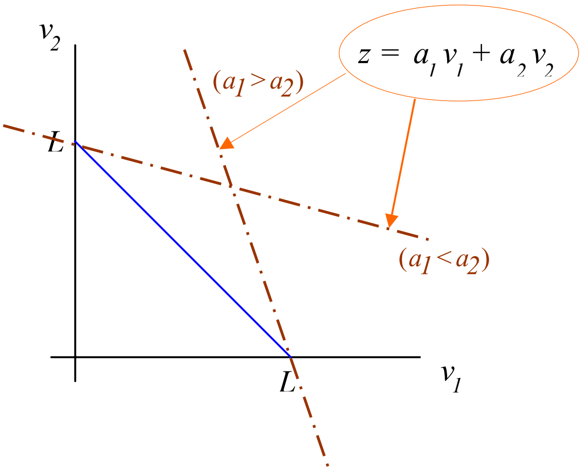
em que $L = K - (V_1 + V_2)$ é o volume do tanque disponível para abastecimento.

Nesse caso, o problema de maximizar r é equivalente ao de maximizar

$z = a_1 v_1 + a_2 v_2$

Sujeita às mesmas restrições.

Então, pode-se ver imediatamente, por inspeção do gráfico a seguir, que a solução ótima é representada pelo ponto $(v_1, v_2) = (L, 0)$, caso $a_1 > a_2$, ou pelo ponto $(0, L)$, caso $a_1 < a_2$.



Isto é, nesse caso a solução ótima, como seria de se esperar, implica sempre no abastecimento com um único combustível. A escolha dependerá da razão a_1 / a_2 , ou seja, das características físico-químicas que implicam no rendimento específico dos combustíveis.

Caso haja restrição orçamentária, não se terá necessariamente $v_1 + V_1 + v_2 + V_2 = K$. Assim, a função-objetivo,

$$r = \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_1 V_1 + a_2 V_2}{(v_1 + v_2 + V_1 + V_2)\; a_1 T_1^* / T}\, r_1$$

não comporta equivalência a uma forma linear. Sem embargo, maximizar r equivale a

$$\text{maximizar } z = \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_1 V_1 + a_2 V_2}{v_1 + v_2 + V_1 + V_2}$$

sujeita à restrição de disponibilidade orçamentária:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 \leqslant d$$

Em que

c_i: Custo do combustível por unidade de volume (R$/$l$).

d: Disponibilidade orçamentária (R$).

Há que se considerar ainda, na prática, uma restrição que garanta uma autonomia operacional mínima (A):

$$r\,(v_1 + V_1 + v_2 + V_2) \geqslant A \quad \Rightarrow \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 \geqslant B; \qquad B = A\, a_1 T_1^* / r_1 T \; - a_1 V_1 + a_2 V_2$$

Outra restrição de ordem prática reflete o fato de que não é usual abaster-se um veículo com uma quantidade de combustível muito pequena. Arbitrou-se “muito pequeno”, um volume inferior a 1/8 da capacidade do tanque. Evidentemente, tal como no caso da autonomia mínima A, essa percepção é subjetiva e passível de reformulação, sem prejuízo do modelo.

Assim, o problema pode ser descrito na forma

$$\text{maximizar } z = \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_1 V_1 + a_2 V_2}{v_1 + v_2 + V_1 + V_2}$$

sujeita a

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 \geqslant B$$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 \leqslant d$$

$$v_1 + v_2 \leqslant L$$

$$v_1 + v_2 \geqslant K/8$$

$$v_1 , v_2 \geqslant 0$$

Esse é um problema não-linear cuja solução pode ser encontrada, por exemplo, em [Taha].

3. Minimização do Custo de Abastecimento

Nesse caso, o objetivo é minimizar o custo de abastecimento, considerando-se, também nesse caso, as restrições de ordem prática estabelecidas anteriormente.
Assim, o problema pode ser descrito na forma

minimizar $z = c_1 v_1 + c_2 v_2$

sujeita a:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 \geqslant B$$

$$v_1 + v_2 \leqslant L$$

$$v_1 + v_2 \geqslant K/8$$

$$v_1 , v_2 \geqslant 0$$

Nesse caso, trata-se de um problema linear cuja solução também pode ser encontrada, por exemplo, em [Taha].

4. Conclusão

Os modelos apresentados podem satisfazer estratégias de abastecimento que demandem tanto maximização de rendimento quanto minimização de custo. No primeiro caso o modelo é não-linear, embora possa, para o caso particular de inexistência de restrição orçamentaria, ser reduzido a uma forma linear simples. A solução dos modelos em situações práticas, dependerá de parâmetros determinados palas características dos combustíveis empregados (octanagem da gasolina, massa específica, massa molecular, quantidade de mols de CO_2 produzidos na combustão, temperatura da câmara de combustão) e da conjuntura específica de cada instância (disponibilidade orçamentária, autonomia mínima, capacidade do tanque, volume disponível para abastecimento). Definidos esses parâmetros, as soluções podem ser determinadas pelos métodos clássicos de otimização encontrados em [Taha]. Em havendo fundamento na especulação a respeito do lançamento de veículos movidos a três combustíveis (álcool, gasolina e gás), os modelos apresentados podem ser facilmente estendidos para essa situação.

A tecnologia hoje disponível viabiliza a implementação dos modelos apresentados em computadores de mão, passíveis de serem transportados em veículos particulares ou de frotas de empresas ou instituições públicas.

5. Referências

Halliday D., Resnick R., Walker J., *Fundamentals of Physics, Part 2*, 7th ed., Wiley, 2003.

Taha H. A., *Operations Research, an Introduction*, 3rd ed., Macmillan, 1982.

Tito (Peruzzo F. M.), Canto E. L., *Química na Abordagem do Cotidiano*, 3^{a} ed., Moderna, 2003.