

## UMA PESQUISA SOBRE ÍNDICES DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAIS NA ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

**Patrícia Oliveira de Souza**

Universidade Federal Fluminense  
Av. dos Trabalhadores 420, Volta Redonda, RJ  
patuff@click21.com.br

**Lidia Angulo Meza**

Universidade Federal Fluminense  
Av. dos Trabalhadores 420, Volta Redonda, RJ  
lidia@metal.eeimvr.uff.br

### Resumo

Os modelos clássicos de DEA determinam a eficiência segundo redução dos inputs ou aumento dos outputs equiproporcionalmente. Trabalhos posteriores propõem índices de eficiência DEA baseados em projeções na fronteira eficiente que são obtidas através de projeções não proporcionais de inputs e outputs, principalmente para incluir as folgas nos índices de eficiência. Índices obtidos desta forma são chamados de não radiais. Neste trabalho é apresentada uma pesquisa bibliográfica dos índices de eficiência não radiais propostos na literatura até a atualidade. É feita uma comparação entre eles para estabelecer características e diferenças entre elas através da aplicação a um mesmo conjunto de dados observando as suas diferenças.

**Palavras chave:** Análise Envoltória de Dados, Medidas de eficiência, Eficiência não radiais.

### Abstract

The DEA classic models determine efficiency indexes considering an equiproportional inputs reduction or outputs increase. Subsequent works propose efficiency indexes based on projections in the efficient border that are obtained through non-proportional projections of inputs and outputs, mainly to include the slacks in the efficiency indexes. Indexes obtained this way are called non-radial. In this paper we present a bibliographical research of non-radial efficiency indexes proposed in the literature. A comparison is made among them to establish characteristics and differences using the same database observing their differences.

**Keywords:** Data Envelopment Analysis, Measure of Efficiency, Non Radial Efficiency.

Este trabalho teve o apoio do CNPq processo 306924/2004-8 e a bolsa de iniciação científica PIBIC-UFF.

## 1. INTRODUÇÃO

Segundo Pastor et al (1999) o início da Data Envelopment Analysis (Análise Envoltória de Dados) significou um novo modo de medir a eficiência de unidades. Da interpretação de eficiência de Debreu (1951) e posteriormente Farrel (1957) proporcionou-se a primeira medida de eficiência como sendo a máxima redução equiproporcional de todos os inputs enquanto são mantidos os outputs constantes, considerando uma eficiência do ponto de vista dos inputs; e o máximo aumento dos outputs enquanto se mantém os inputs constantes, para os outputs. Estas primeiras medidas são chamadas de radiais.

Baseado nesta interpretação Data Envelopment Analysis (Charnes et al, 1978) é uma técnica ou enfoque que determina a eficiência de unidades tomadoras de decisão chamadas de DMUs (decision making units). Esta definição tenta expressar a eficiência de Pareto-Koopmans, definida por Koopmans (1951b), onde uma DMU é Pareto-Koopmans eficiente se e somente se é tecnologicamente impossível aumentar qualquer output (e/ou reduzir

qualquer input) sem simultaneamente reduzir outro output (e/ou aumentar qualquer outro input), Charnes e Cooper (1985).

No entanto, como já havia sido notado por Färe e Lovell (1978), folgas podem acontecer em inputs e/ou outputs, ou seja, uma DMU podia ser classificada como eficiente, quando na verdade ela não cumpria as condições de eficiência de Pareto-Koopmans. O fato é que a medida de Farrell só é capaz de medir a eficiência radial.

Para resolver esse problema, índices que expressem corretamente a eficiência Pareto-Koopmans tem sido propostos por vários pesquisadores ao longo dos anos. Para isso foi deixada de lado a idéia de equiproporcionalidade, surgindo desta forma os índices de eficiência não radiais.

Este trabalho apresenta uma pesquisa dos índices não radiais propostos em DEA. Detalhamos os mais representativos e eles são caracterizados, comparados e aplicados a uma mesma base de dados para determinar quais, afinal, são as diferenças entre eles.

O presente artigo está dividido da seguinte forma. Na seção 2 é feita uma revisão dos índices de eficiência dos modelos DEA clássicos. Na seção 3 apresentamos um exemplo onde se pode notar as diferenças causadas pela projeção radial na fronteira e a definição de eficiência de Pareto-Koopmans. As propriedades desejáveis para uma medida de eficiência são relacionadas na seção 4. Ademais, na seção 5, é apresentado o estudo dos índices de eficiência não radiais. As aplicações destas medidas são apresentadas na seção 6. Finalmente, na seção 7 aparecem os comentários finais e conclusões.

## 2. ÍNDICES DE EFICIÊNCIA EM MODELOS DEA CLÁSSICOS

A Análise de Envoltória de Dados (do inglês Data Envelopment Analysis – DEA) é uma ferramenta matemática já que utiliza problemas de programação de linear para determinar a eficiência de unidades de tomada de decisão. Ela determina uma fronteira linear por partes separando as DMUs eficientes (que se encontram na fronteira) a as ineficientes cuja distancia à fronteira determina seu índice de eficiência. Embora várias formas da fronteira possam ser determinadas, existem dois modelos que são considerados clássicos: CCR e BCC.

### 2.1. MODELO CCR

O modelo CCR, apresentado originalmente por Charnes et al. (1978), trabalha com retornos constantes de escala (Constant Returns to Scale - CRS), isto é, qualquer variação nos recursos (inputs) produz variação proporcional nos produtos (outputs).

#### 2.1.1. Modelo CCR Orientado a Inputs

Este modelo determina a eficiência pela otimização da divisão entre a soma ponderada dos produtos (output virtual) e a soma ponderada dos recursos (input virtual) que generaliza a definição de Farrell (1957) <sup>[17]</sup>. O modelo permite que cada DMU escolha os pesos para cada variável (entrada ou saída) da forma que lhe for mais benevolente, desde que esses pesos aplicados às outras DMU's não gerem uma razão superior a 1.

Estas condições são formalizadas nas equações (1), onde  $h_0$  é a eficiência da DMU  $o$  em análise;  $v_i$  e  $u_r$  são os pesos de inputs  $i$ , e outputs  $r$ , respectivamente;  $x_{ij}$  e  $y_{rj}$  são os inputs  $i$  e outputs  $r$  da DMU  $j$ .

$$\begin{aligned} \text{Max } h_0 &= \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1 \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n, \\ & u_r \geq 0, r = 1, \dots, s, \end{aligned} \tag{1}$$

$$v_i \geq 0, i = 1, \dots, m.$$

O PPL usado até aqui é chamado modelo dos multiplicadores para uma DMU  $o$ , ele é chamado dessa forma pois determina os pesos ou multiplicadores das variáveis de uma DMU. Este PPL tem associado o seguinte modelo dual, conhecido como modelo do envelope orientado aos inputs:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \text{s.a.} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \theta \text{ irrestrita.} \end{aligned} \tag{2}$$

Neste modelo  $\theta$  é a eficiência, que é multiplicada por todos os inputs de forma a obter valores que coloquem a DMU na fronteira eficiente, através da redução dos inputs e  $\lambda_j$  representa a contribuição da DMU  $j$  na formação do alvo da DMU em avaliação.

## 2.2. MODELO BCC

O modelo BCC, devido a Banker et al. (1984), considera retornos variáveis de escala, isto é, substitui o axioma da proporcionalidade entre inputs e outputs pelo axioma da convexidade. Ele também é conhecido como VRS – Variable Returns to Scale. Ao obrigar que a fronteira seja convexa, o modelo BCC permite que DMUs que operam com baixos valores de inputs tenham retornos crescentes de escala e as que operam com altos valores tenham retornos decrescentes de escala. Matematicamente, a convexidade da fronteira equivale a uma restrição adicional ao Modelo do Envelope, que passa a ser o indicado em (3) para orientação a inputs.

$$\begin{aligned} & \text{Min } h_0 \\ & \text{s.a.} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{3}$$

O dual do PPL (3) gera o modelo BCC dos Multiplicadores orientados a inputs.

## 3. COMPARAÇÃO ENTRE A MEDIDA DE FARRELL E A EFICIÊNCIA PARETO – KOOPMANS

Da definição eficiência de Pareto-Koopmans, uma DMU é eficiente se e somente se é tecnologicamente impossível aumentar qualquer output (e/ou reduzir qualquer input) sem simultaneamente reduzir outro output (e/ou aumentar qualquer outro input). Porém, o índice obtido a partir dos modelos DEA clássicos, chamado de radial, nem sempre identifica as DMUs Pareto-Koopmans eficientes.

A partir do exemplo extraído de Ruggiero (2000), vamos ilustrar na figura 1 este conceito comparando as DMUs eficientes segundo os modelos DEA clássico, também chamado de medida de Farrell, com o conceito de eficiência de Pareto-Koopmans.

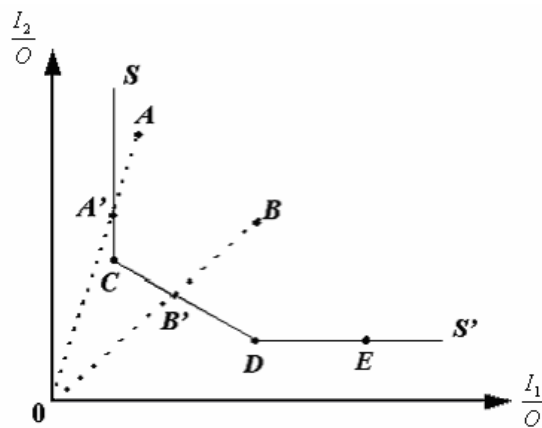


Figura 1- Medida de Farrell e Koopmans Eficiência

A Figura 1 apresenta o exemplo de uma fronteira DEA CCR, na qual as DMUs eficientes C e D definem a fronteira.

Observa-se que a DMU E, apesar de eficiente, tem um comportamento diferente das demais. Enquanto para as DMUs C e D só é possível reduzir um input e permanecer na região viável de produção aumentando o outro (ou diminuindo o output), a DMU E pode diminuir o Input 1 mantendo constante o Input 2 e mesmo assim permanecer na região viável de produção. Essa quantidade que ainda é possível ser reduzida é conhecida como folga. Observamos, assim, que apesar de ser 100% eficiente pela medida de Farrell, a DMU E não é, tão eficiente quanto às outras unidades eficientes.

Logo podemos dizer que as DMUs A e B são Farrell ineficientes, as DMUs C, D e E são Farrell eficientes já que não é possível equiproporcionalmente reduzir ambos os inputs enquanto simultaneamente são mantidos os outputs. Além disso, somente as DMUs C e D são eficientes do ponto de vista Pareto-Koopmans.

Da mesma forma avaliando se as projeções radiais na fronteira eficiente das DMUs A e B, se observa que a medida de eficiência técnica para A e B é dada, respectivamente, por  $OA'/OA$  e  $OB'/OB$ . Entretanto, é questionável se o ponto A' é um ponto eficiente, já que é possível reduzir a quantidade  $CA'$  do *input*<sub>2</sub> e ainda produzir a mesma quantidade de *output*. Novamente se encontra uma quantidade que ainda é possível ser reduzida, conhecida como folga. Assim, os pontos A' e E não cumprem as condições de eficiência de Pareto-Koopmans, pois pode ser verificada a presença de folgas, o que proporciona que seja reduzido algum input ou aumentado algum output, sem piorar nenhum outro input ou output.

#### 4. PROPRIEDADES DESEJÁVEIS DAS MEDIDAS DE EFICIÊNCIA

Dada a situação observada anteriormente, alguns pesquisadores procuraram formas de determinar medidas de eficiências segundo a definição Pareto-Koopmans. Färe e Lovell (1978) foram os primeiros que propuseram um conjunto de propriedades que uma medida de eficiência deveria satisfazer, embora este enunciado foi para o caso particular de uma medida orientada aos inputs, elas podem ser também utilizadas de forma análoga para o caso dos outputs. As propriedades sugeridas são as seguintes:

- 1- A eficiência só deve ser atribuída as DMUs Pareto-Koopmans eficientes;
- 2- Ao calcular a eficiência de uma unidade ineficiente a DMU é comparada com DMUs Pareto-Koopmans eficientes;
- 3- Homogeneidade de grau  $-1$ , isto é, decresce equiproporcionalmente por qualquer incremento proporcional nos inputs ou qualquer decréscimo proporcional nos outputs.
- 4- Decresce monotonicamente por qualquer incremento nos inputs.

Também foi mostrado por Färe e Lovell que a medida de eficiência de DEA clássico (medida de Farrell) só satisfaz a propriedade de homogeneidade de grau  $-1$ .

Mais tarde, Cooper e Pastor (1995) listaram propriedades similares e sugeriram algumas outras:

1. O índice de eficiência deve ser maior que zero e menor ou igual a um;
2. A eficiência igual a um só deve ser atribuída a DMU Pareto-Koopmans eficiente;
3. Unidades invariantes: A medida de eficiência deve ser invariável em relação às unidades de medida dos inputs e outputs.
4. Fortemente monotônico nos inputs e nos outputs: Um incremento nos inputs ou uma redução nos outputs, deve reduzir a eficiência da DMU em análise.

As duas primeiras significam que a medida de eficiência é limitada por 0 e 1, atingindo o topo, no valor 1 se, e somente se, a DMU em análise é Pareto-Koopmans eficiente. A propriedade (3) garante que os valores da eficiência são independentes das unidades de medida dos inputs e outputs considerados. A propriedade (4) requer sensibilidade do incremento de inputs e redução de outputs em uma única direção, ou seja, um incremento em algum input ou uma redução em algum output, mantendo todos os demais fatores constantes, deve reduzir o valor do índice de eficiência.

Ambas as propriedades (2) e uma versão de orientação aos inputs de (4) foram previamente propostas por Färe e Lovell (1978).

Cooper e Pastor (1995) notaram que a monotonicidade no índice de eficiência não é uma propriedade usual e é muito difícil de alcançá-la. Isto leva alguns autores a considerar outras propriedades, tais como, fracamente monotônica ou decrescente nos valores relativos das folgas.

As seguintes propriedades encontradas em Tone (2001) são consideradas importantes ao se desenvolver medidas de eficiência:

- 1- Unidades invariantes: a medida deve ser invariante em relação às unidades em quais os inputs e outputs são medidos.
- 2- Monótona: a medida deve ser monotonicamente decrescente em cada folga nos inputs e nos outputs.
- 3- Translação invariante: a medida deve ser invariante sob translações paralelas do sistema de coordenadas aplicado;
- 4- Dependente do conjunto de referência: a medida deve ser determinada somente consultando o conjunto de referência da DMU, ou seja, não pode ser influenciada por valores extremos, como por exemplo, valores máximos ou mínimos do conjunto de dados observados.

Pode-se observar que dentre estas propriedades, somente a número 4 que diz sobre o conjunto de referência não havia sido citada anteriormente.

## 5. MEDIDAS DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAIS

Com o fim de evitar que DMUs não Pareto-Koopmans eficientes fossem classificadas como eficientes, problemas estes ocasionados pelas projeções radiais das DMUs na fronteira da função produção, foram desenvolvidos outros modelos em DEA que conseguissem classificar as DMUs segundo a definição de eficiência Pareto-Koopmans.

Os primeiros modelos desenvolvidos em DEA que procuraram resolver esta deficiência foram denominados Modelos Não Arquimedianos introduzindo Charnes *et al.* (1979) que são uma modificação da função objetivo dos modelos CCR e BCC, e os Modelos DEA Aditivos, Charnes *et al.* (1985).

A formulação da função objetivo do modelo não arquimediano orientado a inputs é apresentado em (4), no qual são introduzidas as folgas dos modelos (2) e (3), isto é as folgas nos inputs e outputs que não eram considerados no cálculo do índice de eficiência.

$$\text{Min } \theta - \varepsilon \left( \sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \right) \quad (4)$$

O modelo DEA aditivo, também introduzido por Charnes *et al.* (1985), tem a função objetivo apresentada em (5), observa-se que este modelo não fornece um índice de eficiência.

$$\text{Min} - \sum_{r=1}^s s_{r0}^+ + \sum_{i=1}^m s_{i0}^- \quad (5)$$

Para resolver esse problema, outros índices foram propostos em DEA e são chamados de índices de eficiência não radiais.

Descrevemos a seguir uma pesquisa dos índices não radiais propostos em DEA., onde são apresentados os modelos e as propriedades mais importantes de cada medida.

Em cada índice de eficiência são assumidos,  $n$  DMUs,  $m$  inputs e  $s$  outputs.

## 5.1. ÍNDICES DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAIS ORIENTADOS A INPUTS OU OUTPUTS

### 5.1.1. Medida de Russell Orientada a Inputs

A medida de Russell proposta por Färe e Lovell (1978) minimiza a média aritmética não ponderada da redução proporcional de todos inputs individuais mantendo constante o nível de outputs.

Podemos calcular a eficiência de Russell orientada aos inputs para uma dada DMU<sub>0</sub> com o modelo de programação linear apresentado em (6) (Ruggiero e Bretschneider, 1998).

$$\text{Min} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \quad (6.0)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.1)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (6.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad (6.3)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

Observa-se que a cada input está associada uma redução, a função objetivo é a média aritmética simples das reduções em cada input. É importante notar que no artigo de Zhu (1996) a restrição (6.1) aparece como igualdade, pois a folga nesta restrição deverá ser igual a zero, isto é imposto pela projeção não-equiproporcional. No entanto folgas não zero nos outputs são possíveis.

Pode-se notar que as restrições da medida de Russell são muito parecidas às do modelo do envelope CCR, porém tem-se a introdução da variável  $\theta_i$ , ou seja, para cada input há uma redução. Assim ao invés da redução equiproporcional em todos os inputs determina-se a máxima soma das reduções nos inputs.

Como provaram Färe e Lovell (1978) e Russell (1985) a medida de Russell satisfaz todas as propriedades desejáveis a uma medida de eficiência exceto a propriedade da homogeneidade. A versão de outputs da medida de Russell foi definida analogamente por Färe et al (1985) <sup>[14]</sup>.

### 5.1.2. Medida Ponderada de Russell

Um problema na medida de Russell pode ser atribuído à suposição inválida de pesos iguais para os inputs, pois os recursos têm um impacto diferenciado nos outputs no processo de produção.

Para acomodar diferentes pesos no processo de produção Ruggiero e Bretschneider (1998) fizeram uma extensão da Medida de Russell. Considerando retornos variáveis de escala a medida ponderada de Russell para cada DMU  $o$  pode ser calculada como solução do modelo de programação linear apresentado em (7).

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m w_i \theta_i \tag{7.0}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{7.1}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \tag{7.2}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \tag{7.3}$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

Neste problema é assumido que os pesos  $w_i$  devem ser conhecidos a priori, devido a isto esta medida deve se considerada semiparamétrica. Assim, pode ser requerido um primeiro estágio de regressão ou uma programação linear para determinar esses pesos. Para que a solução deste problema sempre resulte em 1 como máxima eficiência, a soma desses pesos deve ser igual a 1 (um). A performance da medida ponderada de Russell depende da habilidade de definir corretamente os pesos dos fatores.

Como na medida de Russell, a medida ponderada de Russell satisfaz 3 das 4 propriedades desejáveis para uma medida de eficiência propostas por Färe e Lovell, assumindo todos os pesos dos fatores positivos, da mesma forma que a medida de Russell anterior.

### 5.1.3. Medida de Zieschang Orientada a Inputs

Ziezchang procurou evitar o cálculo da eficiência com as folgas usando elementos, primeiramente, da medida de Debreu-Farrell (Debreu, 1951, Farrell, 1957), que vale a pena lembrar é uma medida radial, com um índice não radial, a Medida de Russell (Färe e Lovell, 1978).

A medida de Zieschang (Zieschang, 1984) é calculada em duas etapas. Na primeira, os inputs são reduzidos equiproporcionalmente até atingir a fronteira eficiente e, na segunda etapa, cada input é reduzido até atingir região Pareto-Koopmans eficiente. Nesta segunda etapa, busca se eliminar as folgas.

Na resolução da primeira etapa obtém-se a proporção  $\theta^*$ , em que todos os inputs devem ser reduzidos. Para a segunda etapa são assumidos os valores dos inputs reduzidos na proporção  $\theta^*$ , ou seja, os inputs do modelo multiplicados pela eficiência  $\theta^*$ , aí então o problema deve ser resolvido o com a medida de Russell.

A formulação da medida de Zieschang orientada aos inputs, para a DMU<sub>0</sub>, é apresentada em (8).

$$\text{Min } \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \tag{8.0}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i (\theta^* x_{i0}), \quad i = 1, \dots, m, \tag{8.1}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \tag{8.2}$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

O índice de eficiência fornecido pela medida de Zieschang orientada aos inputs é calculado segundo a fórmula:

$$Z = \theta^* \times \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i^*. \tag{8.3}$$

Estes modelos podem ser facilmente deduzidos para os outputs.

#### 5.1.4. Medida Assimétrica de Färe Orientada a Inputs

A medida assimétrica de Färe (Färe, 1975; Färe et al., 1983) também é obtida com duas etapas, primeiro, cada input da DMU em análise é reduzido individualmente e os outros inputs são mantidos constantes, posteriormente, é selecionada a menor das reduções dos  $m$  inputs. O modelo da Medida assimétrica de Färe orientada aos inputs é apresentado em (9).

$$\text{Min } \theta_i \quad (9.0)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0}, \quad \forall i \neq i_a, \quad (9.1)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_i x_{i0}, \quad i = i_a, \quad (9.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (9.3)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

Desta forma, na análise de eficiência de uma dada DMU<sub>0</sub>, são resolvidos  $m$  modelos lineares e a medida assimétrica de Färe é definida como:

$$\text{Min } \{ \theta_i^* \}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (9.4)$$

Este modelo também pode ser reformulado para a maximização dos outputs.

## 5.2. ÍNDICES DE EFICIÊNCIA NÃO RADIAIS ORIENTADOS A INPUTS OU OUTPUTS

### 5.2.1. Medida de Russell Não Orientada

Proposta por Färe et al. (1985) a medida de Russell não orientada é definida como uma combinação de forma aditiva das medidas de Russell orientada aos inputs e aos outputs.

Para uma dada DMU<sub>0</sub> o valor desta medida pode ser obtido a partir da seguinte formulação DEA:

$$\text{Min } \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\phi_r} \right) \quad (10.0)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (10.1)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi_r y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (10.2)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Este modelo satisfaz as 4 propriedades básicas listadas por Cooper e Pastor (1995).

### 5.2.2. Medida De Russell Não Orientada Melhorada

Proposta por Pastor et al. (1999) como uma alternativa para evitar as dificuldades mencionadas da medida de Russell não orientada apresentada anteriormente. Ao invés de combinar as medidas de Russell orientada aos inputs e aos outputs de maneira aditiva, como na função objetivo (10.0), a medida de Russell não orientada melhorada, propõe um coeficiente entre estas duas medidas.

O resultado desta combinação é o modelo (11).



$$\text{Min } \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r} \tag{11.0}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{11.1}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi_r y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \tag{11.2}$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{11.3}$$

A função objetivo (11.0) é o quociente entre a eficiência média dos inputs e a eficiência média dos outputs (Pastor *et al.*, 1999), desta forma é mais de mais fácil interpretação que a medida da função objetivo (10.0).

Como pode ser observado o modelo (11.0) não é um modelo de programação linear. Através das seguintes substituições de variáveis se inicia o procedimento para linearização do modelo:

$$\theta_i = \frac{x_{i0} - s_i^-}{x_{i0}} = 1 - \frac{s_i^-}{x_{i0}}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{11.4}$$

$$\phi_r = \frac{y_{r0} + s_r^+}{y_{r0}} = 1 + \frac{s_r^+}{y_{r0}}, \quad r = 1, \dots, s. \tag{11.5}$$

Reformulando o modelo (11.0) substituindo as equações (11.4) e (11.5) é obtido o modelo (11.6) – (11.8), onde a medida é expressa em termos das folgas totais (Pastor *et al.*, 1999).

$$\text{Min } \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{i0}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{y_{r0}}} \tag{11.6}$$

$$\text{s.a. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{11.7}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \tag{11.8}$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

O índice de eficiência formulado na equação (11.6) é idêntico ao índice formulado por Tone (2001), denominado de Medida de Eficiência Baseada nas Folgas ou SBM (*Slacks-Based Measure*), no qual  $s^-$  e  $s^+$  indicam o excesso de inputs e a redução de outputs, respectivamente, e representam as folgas.

Para transformar tanto SBM ou a medida de Russell não orientada em um modelo de programação linear é usada a transformação de variáveis proposta por Charnes e Cooper (1962). A substituição de variáveis gera as equações (11.9) – (11.12).

$$\beta = \left( 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{y_{r0}} \right)^{-1}, \tag{11.9}$$

$$t_{i0}^- = \beta s_{i0}^-, \quad i = 1, \dots, m, \tag{11.10}$$

$$t_{r0}^+ = \beta s_{r0}^+, \quad r = 1, \dots, s, \tag{11.11}$$

$$\mu_j = \beta \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{11.12}$$

Esta substituição de variáveis resulta no modelo linear (11.13) – (11.16).

$$\text{Min } \beta - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{t_i^-}{x_{i0}} \tag{11.13}$$

s.a.

$$\beta + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{t_r^+}{y_{r0}} = 1, \tag{11.14}$$

$$-\beta x_{i0} + \sum_{j=1}^n \mu_j x_{ij} + t_i^- = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{11.15}$$

$$-\beta y_{r0} + \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} - t_r^+ = 0, \quad r = 1, \dots, s, \tag{11.16}$$

$$t_i^-, t_r^+ \geq 0, \quad \forall i, r$$

$$\mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Uma das mais importantes características dos modelos DEA são os seus duais, onde se podem fazer avaliações da eficiência através de interpretações econômicas. Fazendo essa consideração Tone (2001) formulou o dual do seu modelo, SBM. Onde o dual pode ser interpretado como a maximização do lucro, ao contrário da maximização do coeficiente no modelo CCR. Isto tem grande contribuição no potencial de aplicação deste modelo.

Comparando a medida de Russell melhorada e a SBM (Tone, 2001) pode-se observar que elas são semelhantes no que diz respeito à forma de lidar com as folgas. Além disso, fornecem medidas de eficiência entre 0 e 1, também são monotonicamente decrescente em relação às folgas e utilizam as mesmas transformações de variáveis para linearizar suas funções objetivos.

Contudo elas diferem das seguintes maneiras:

- A medida de Russell é uma media aritmética e seu significado não é claro, enquanto a medida SBM pode ser interpretada como um produto das ineficiências do inputs pelas dos outputs, (Tone, 2001).
- A medida de Russell não tem um dual definido.
- Färe et al (1978,1994) introduziram a medida de Russell orientada aos inputs (outputs), que é equivalente a SBM orientada ao input (output) se somente tratarmos o numerador (denominador).

### 5.2.3. Medida de Escala Ajustada

A medida de escala ajustada, mais conhecida como RAM (*Range-Adjusted Measure*), foi desenvolvida por Cooper e Pastor (1995). A formulação desta medida é uma modificação do Modelo Aditivo proposto por Charnes *et al.* (1985), tendo-se o modelo (12.0) – (12.3).

$$\text{Max } \frac{1}{m + s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{R_r^+} \right) \tag{12.0}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{12.1}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s, \tag{12.2}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \tag{12.3}$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

As variáveis de escala  $R_i^-$  e  $R_r^+$  são obtidas através das fórmulas seguintes:

$$R_i^- = \hat{x}_i - \tilde{x}_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{12.4}$$

$$R_r^+ = \hat{y}_r - \check{y}_r, \quad r = 1, \dots, s. \tag{12.5}$$

Onde:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \text{Max}_{j=1, \dots, n} \{x_{ij}\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \check{x}_i = \text{Min}_{j=1, \dots, n} \{x_{ij}\}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \hat{y}_r &= \text{Max}_{j=1, \dots, n} \{y_{rj}\}, \quad r = 1, \dots, s, \quad \check{y}_r = \text{Min}_{j=1, \dots, n} \{y_{rj}\}, \quad r = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{12.6}$$

A função objetivo (12.0) mede as ineficiências dos inputs e dos outputs, logo uma nova medida de eficiência é dada por (12.7) (Cooper *et al*, 1999).

$$\Gamma = 1 - \frac{1}{m + s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{R_r^+} \right) \tag{12.7}$$

No qual a eficiência é igual a 1, se e somente se, as folgas  $s_i^-$  e  $s_r^+$  forem iguais a zero. As propriedades desta medida dadas por Pastor et al (1999) são as seguintes:

- $0 \leq \Gamma \leq 1$ ;
- É invariante em relação às unidades de medida;
- É fortemente monotônica;
- È invariante em relação à translação.

Entre as propriedades da medida RAM, foram citadas em Sueyoshi e Sekitani (2006), as propriedades unidades invariantes e translação invariante.

## 6. APLICAÇÃO E RESULTADOS

Para implementação dos modelos utilizam-se os dados de 5 DMUs, com 2 inputs e 1 output, cujos valores são apresentados na tabela 1. É procurado uma redução nos inputs nos modelos com orientação.

Tabela 1 – Valores dos inputs e output.

DMU	I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	O <sub>1</sub>
A	4	3	2
B	1	3	5
C	2	3	4
D	1	2	1
E	10	5	8

Primeiramente, avalia-se a eficiência das DMUs utilizando o modelo CCR orientado a inputs, exemplificado na equação (2). Na tabela 2 se encontram os valores das eficiências fornecidos por este modelo, bem como, a projeção radial na fronteira e suas folgas, até se tornarem Pareto-Koopmans eficiente.

Tabela 2 – Resultados do modelo CCR orientado a inputs.

DMU	Eficiência $\theta$	Alvos para I <sub>1</sub>			Alvos para I <sub>2</sub>			Output
		Radial	Folga	Alvo	Radial	Folga	Alvo	
A	40,0%	1,6	1,2	0,40	1,2	0,0	1,20	2,0
B	100,0%	1,0	0,0	1,00	3,0	0,0	3,00	5,0
C	80,0%	1,6	0,8	0,80	2,4	0,0	2,40	4,0
D	30,0%	0,3	0,1	0,20	0,6	0,0	0,60	1,0
E	96,0%	9,6	8,0	1,60	4,8	0,0	4,80	8,0

Os valores das eficiências encontrados com este modelo são calculados com a projeção radial. Porém ainda existem folgas, nas tabelas a seguir avaliam-se as mesmas DMUs com os modelos DEA não-radiais.

O primeiro modelo não-radial implementado é a Medida de Russell, cujos resultados se encontram na tabela 3, os da Medida de Fare na tabela 4 e os resultados da Medida Zieschang na tabela 5.

Tabela 3 – Resultados da Medida de Russell.

DMU	Eficiência			Alvos		
	$\theta$	$\theta_1$	$\theta_2$	Input 1	Input 2	Output
A	25,0%	10,0%	40,0%	0,40	1,20	2
B	100,0%	100,0%	100,0%	1,00	3,00	5
C	60,0%	40,0%	80,0%	0,80	2,40	4
D	25,0%	20,0%	30,0%	0,20	0,60	1
E	56,0%	16,0%	96,0%	1,60	4,80	8

Tabela 4 – Resultados da Medida Assimétrica de Färe.

DMU	Eficiência			Alvos		
	Min	$\theta_1$	$\theta_2$	Input 1	Input 2	Output
A	10,0%	10,0%	40,0%	0,40	1,20	2
B	100,0%	100,0%	100,0%	1,00	3,00	5
C	40,0%	40,0%	80,0%	0,80	2,40	4
D	20,0%	20,0%	30,0%	0,20	0,60	1
E	16,0%	16,0%	96,0%	1,60	4,80	8

Tabela 5 – Resultados da Medida Zieschang.

DMU	Eficiência				Alvos			
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta$	CCR	Zieschang	Input 1	Input 2	Output
A	25,0%	100,0%	62,5%	40,0%	25,0%	0,40	1,20	2
B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	1,00	3,00	5
C	50,0%	100,0%	75,0%	80,0%	60,0%	0,80	2,40	4
D	66,7%	100,0%	83,3%	30,0%	25,0%	0,20	0,60	1
E	16,7%	100,0%	58,3%	96,0%	56,0%	1,60	4,80	8

Já era esperado que a eficiência do input 2 ( $\theta_2$ ) fosse 100% eficiente para todas as DMUs, pois como se verifica na tabela 2 com os resultados do modelo CCR não existem possibilidades de redução deste input, ou seja, não existem folgas no input 2.

As medidas de eficiência para a Medida de Russell Melhorada estão na tabela 6.

Tabela 6 – Resultados da Medida de Russell não orientada melhorada.

DMU	Eficiência					Alvos		
	Russell Melhorada	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta$	$\phi$	Input 1	Input 2	Output
A	25,0%	10,0%	40,0%	25,0%	100,0%	0,40	1,20	2,0
B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	1,00	3,00	5,0
C	60,0%	40,0%	80,0%	60,0%	100,0%	0,80	2,40	4,0
D	25,1%	67,0%	100,0%	83,5%	333,0%	0,67	2,00	3,3
E	56,1%	16,7%	100,0%	58,4%	104,1%	1,67	5,00	8,3

A decomposição do modelo (9.0) para a DMU D indica que existe uma DMU eficiente que produz, em média, 333% mais outputs que a DMU D usando, em média, 83,5% dos inputs usados pela DMU D.

Os resultados usando a Medida de escala Ajustada – RAM, encontram-se na tabela 7, que pode-se ver que os alvos dos inputs e output são obtidos pela diminuição das folgas fornecidas pelo modelo, nos valores atuais das variáveis.

Tabela 7 – Resultados da Medida de Escala Ajustada.

DMU	Eficiência		Alvos		
	$\Gamma$	Input 1	Input 2	Output	
A	65,8%	0,40	1,20	2	
B	100,0%	1,00	3,00	5	
C	88,6%	0,80	2,40	4	
D	81,4%	0,20	0,60	1	
E	64,2%	1,60	4,80	8	

Uma comparação entre as medidas de eficiências obtidas em todos os modelos implementados é realizada na tabela 8.

Tabela 8 – Comparação entre as medidas de eficiência.

DMU	CCR	Russell	Färe	Zieschang	Russell melhorada	RAM
A	40,0%	25,0%	10,0%	25,0%	24,9%	65,8%
B	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
C	80,0%	60,0%	40,0%	60,0%	59,9%	88,6%
D	30,0%	25,0%	20,0%	25,0%	25,0%	81,4%
E	96,0%	56,0%	16,0%	56,0%	56,0%	64,2%

Dos resultados obtidos para este exemplo pode-se verificar que:  $CCR > Russell = Zieschang = Medida de Russell não orientada melhorada > Färe$ . Logo, as medidas não radiais e a medida radial de Debreu-Farrell não fornecem necessariamente o mesmo conjunto de DMUs eficientes. Pois conforme discursamos ao longo deste trabalho os modelos de DEA clássico, aqui representados por CCR, são bem mais benevolentes ao desconsiderarem as folgas presentes para se cumprir às condições de eficiência de Pareto-Koopmans ao medirem a eficiência das DMUs em análise. A medida de Färe é a mais restritiva.

É importante, também, notar que nem sempre as DMUs classificadas como eficientes pelos modelos clássicos de DEA, nem sempre serão eficientes pelas medidas não-radiais.

## 7. COMENTÁRIOS FINAIS

Desde que Farrell (1957) implementou a primeira medida de eficiência técnica, várias pesquisas desenvolveram novas medidas ou aprimoraram as medidas já existentes. Vários são os índices desenvolvidos que buscam não só classificar as DMUs segundo a eficiência de Pareto-Koopmans, mas também aplica-los a casos mais diversos.

Em González Araya, (2003), é desenvolvido um algoritmo que busca projetar todas as DMUs nas regiões Pareto-Koopmans eficientes, ou fortemente eficientes, da fronteira DEA, caso elas existam. Se não existirem regiões fortemente eficientes, o algoritmo projetará as DMUs nas *facets* eficientes de maior dimensão. Em Kordrostami et al (2005) se propõe um método para a projeção das DMUs na superfície eficiente de face de dimensão completa (faces formadas por hiperplanos que englobam todas as variáveis). Este tipo de índices não foi contemplado neste artigo.

Quando se deseja trabalhar com supereficiência, Chen e Sherman (2004) desenvolveram um modelo não-radial de supereficiência, onde apresenta um número menor de DMUs eficientes que um modelo DEA clássico de supereficiência. Este índice foi obtido baseado na medida de Russell ou Zhu. A idéia básica de um modelo de supereficiência é excluir a unidade que está sendo avaliada, assim a modelagem será uma combinação linear de todas as outras unidades da amostra. Dado que a unidade em avaliação é retirada do conjunto das unidades de comparação, a eficiência obtida pode ser maior que 100%, Andersen e Petersen (1993).

Sueyoshi e Sekitani (2006) exploram como medir retornos de escala, usando um modelo não-radial. Neste estudo ele explora a existência de três tipos de solução (a) múltiplos conjuntos de referência, (b) múltiplos hiperplanos e (c) projeções múltiplas.

Dentre os modelos discutidos e aplicados neste trabalho todos apresentaram os resultados esperados no que diz respeito à projeção na fronteira eficiente. Quanto às medidas de eficiência não radiais, os modelos forneceram valores relativamente iguais, com maiores variações somente na Medida Assimétrica de Färe.

A Medida de Russell é a mais fácil de ser implementada, pois com apenas um PPL para cada DMU obteve-se resultados semelhantes aos outros modelos. Não aplicamos a Medida de Russell Ponderada pois os dados usados são hipóteses onde não é necessária uma ponderação das variáveis.

Como já se sabe o índice de Zieschang é fornecido de uma medida de duas etapas, quando já se tem o modelo CCR implementado a Medida de Zieschang é mais recomendada pois ela utiliza os resultados do primeiro modelo na sua aplicação.

A medida mais restritiva foi a Medida Assimétrica de Färe, pois forneceu índices de eficiência menores que todos os outros. Porém a sua aplicação pode ser demorada quando se trabalha com muitos inputs, pois ela é calculada a partir de uma redução individual de inputs, ou seja, para cada DMU com 2 inputs são resolvidos 2 modelos e não apenas 1.

Em relação aos modelos não orientados, a Medida de Russell Melhorada é bastante trabalhosa devido as suas substituições de variáveis, porém o seu ponto forte é que ela mostra o quanto pode ser aumentado nos outputs e reduzido nos inputs de cada DMU.

A Medida de Escala Ajustada, RAM, apresentou medidas de eficiências maiores. Sua vantagem está no fato de apresentar o valor das folgas nos inputs e outputs.

## 8. BIBLIOGRAFIA

- [1] Amirteimoori, A, Kordrostami, S, 2005, "Efficient surfaces and an efficiency index in DEA: a constant returns to scale, Applied Mathematics and Computing", 163(2), pp. 683-691.
- [2] Andersen, P., Petersen, N.C., 1993, "A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis", Management Science, v. 39, n. 10, pp. 1261-1264.
- [3] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W., 1984, "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis", Management Science, v. 30, n. 9, pp. 1078-1092.
- [4] Chen, Y., Sherman, H.D., 2004, "The benefits of non-radial vs. radial super-efficiency DEA: an application to burden-sharing amongst NATO member nations", Socio-Economic Planning Sciences, v. 38, pp. 307-320.
- [5] Charnes, A., Cooper, W.W., 1962, "Programming with Linear Fractional Functionals", Naval Research Logistics Quarterly, v. 9, pp.181-186.
- [6] Charnes, A., Cooper, W.W., 1985, "Preface to Topics in Data Envelopment Analysis", Annals of Operations Research, v. 2, pp. 59-94.
- [7] Charnes, A., Cooper, W.W., Golany, B.E., Seiford, L., Stutz, J., 1985, "Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions", Journal of Econometrics, v. 30, pp. 91-107.
- [8] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., 1978, "Measuring the Efficiency of Decision Making Units", European Journal of Operational Research, v. 2, pp. 429-444.
- [9] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., 1979, "Short Communication: Measuring the Efficiency of Decision Making Units", European Journal of Operational Research, v. 3, p. 339.

- [10] Cooper, W.W., Park, K.S., Pastor, J.T., 1999, "RAM: A Range Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Other Models and Measures in DEA", *The Journal of Productivity Analysis*, v. 11, n. 1, pp. 5-42.
- [11] Cooper, W.W., Pastor, J.T., 1995, *Global Efficiency Measurement in DEA*. In: Working Paper, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Alicante, Alicante, Espanha.
- [12] Debreu, G., 1951, "The Coefficient of Resource Utilization", *Econometrica*, v. 19, n. 3, pp. 273-292.
- [13] Färe, R., 1975, "Efficiency and the Production Function", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, v. 35, pp. 317-324.
- [14] Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K., 1985, *The Measurement of Efficiency of Production*. Boston, Kluwer-Nijhoff Publishing.
- [15] Färe, R., Lovell, C.A.K., 1978, "Measuring the Technical Efficiency of Production", *Journal of Economic Theory*, v. 19, n. 1, pp. 150-162.
- [16] Färe, R., Lovell, C.A.K., Zieschang, K., 1983, "Measuring the Technical Efficiency of Multiple Output Production Technologies". In: Eichhorn, W., Henn, R., Neumann, K., Shephard, R.W. (eds), *Quantitative Studies on Production and Prices*, Würzburg and Vienna, Physica-Verlag.
- [17] Farrell, M.J., 1957, "The Measurement of Productive Efficiency", *Journal of Royal Statistical Society Series A*, v.120, n. 3, pp. 253-281.
- [18] González Araya, 2003, "Projeções Não Radiais em Regiões Fortemente Eficientes da Fronteira DEA - Algoritmos e Aplicações", Tese de Doutorado. Programa de Engenharia de Produção. COPPE/UFRJ.
- [19] Koopmans, T.C., 1951b, "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities". In: Koopmans, T. C. (ed), *Activity Analysis of Production and Allocation*, 1 ed., chapter 3, New York, USA, John Wiley & Sons, Inc.
- [20] Pastor, J.T., Ruiz, J. L., Sirvent, I., 1999, "An Enhanced DEA Russell Graph Efficiency Measure", *European Journal of Operational Research*, v. 115, pp. 596-607.
- [21] Ruggiero, J., 2000, "Measuring technical efficiency", *European Journal of Operational Research*, v. 121, pp. 138-150.
- [22] Ruggiero, J., Bretschneider, S., 1998, "The Mighthed Russell Measure of Technical Efficiency", *European Journal of Operational Research*, v. 108, pp. 438-451.
- [23] Russell, R.R., 1985, "Measures of Technical Efficiency", *Journal of Economic Theory*, v. 35, pp. 109-126.
- [24] Sueyoshi, T., Sekitani, K., 2006, "Measurement of returns to scale using a non-radial DEA model: A range-adjusted measure approach", *European Journal of Operational Research*.
- [25] Tone, K., 2001, "A Slacks-Based Measure of Efficiency in Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research*, v. 130, pp. 498-509.
- [26] Zhu, J., 1996, "Data Envelopment Analysis with Preference Structure", *Journal of the Operational Research Society*, v. 47, pp. 136-150.
- [27] Zieschang, K., 1984, "An Extended Farrell Efficiency Measure", *Journal of Economic Theory*, v. 33, n. 2, pp. 387-396.