MODELO DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA PARA ELEIÇÕES

Carolina Carvalho Maia
Mestrado em Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, São Domingos, CEP.:24210-240, Niterói, RJ
carolinamaia@urbi.com.br

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello
Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, São Domingos, CEP.: 24210-240, Niterói, RJ
jcsmello@producao.uff.br

Resumo

A problemática de escolha de representantes de um povo pode ser resolvida de diversas maneiras. Em todo o mundo, existem vários regimes e sistemas que são adotados pelos países. Dentro do conceito democrático, os métodos utilizados consistem em problemas multidecisor nas eleições político-partidarias. No Brasil, é utilizado o conceito de representação proporcional para a maioria dos cargos do poder legislativo. Este último visa representar a maior parte das classes e grupos políticos da sociedade. Neste trabalho, são apresentados diversos métodos matemáticos de conversão de votos em eleitos e é realizada uma comparação entre eles aplicados a um caso real. Foram comparados os métodos utilizados atualmente no Brasil, com o Método de Hondt e ainda com alguns métodos utilizado para “sobras”. Estes métodos consistem em heurísticas de um problema até agora não formulado. O principal ponto deste trabalho está na proposta de um modelo para formulação deste problema.
Palavras-chave: Programação Inteira – Hondt - Proporcional

Abstract

The difficult choice of electing political representatives can be resolved in a number of ways. Around the world several methods and systems are used by different countries. Methods used within the democratic concept consist of a multidecision problem in political party elections. In Brazil, the majority system is used for Executive Power and Senator elections, and the proportional system is used for other roles within the Parliament. The latter aims to represent most of the social classes and political groups within society. This report presents and compares several mathematical methods of converting votes into number of seats, based on a real case study. Comparisons are made between the current methods being used in Brazil, d´Hondt Method, and also methods used for the “remainder”. These methods are heuristics of a problem not yet formulated. The main part of this project is a proposed model to solve this problem through the use of an integer-based program.
Keywords: Integer Program – Hondt – Proportional

1. INTRODUÇÃO

O voto é uma das grandes conquistas da humanidade, pois foi a maneira encontrada pelo homem para eleger seus representantes democraticamente. Para tal, vários sistemas eleitorais foram criados e, atualmente, uma grande diversidade deles é aplicado em vários países do mundo.

No Brasil, os cargos do poder legislativo têm por princípio a representação dos diversos grupos políticos da sociedade (partidos políticos). Por isso, é utilizado o método proporcional para a grande parte dos cargos do poder legislativo. Esse método tem por objetivo realizar a conversão de votos em eleitos de tal modo que os partidos políticos de maior representatividade perante a população tenham mais representantes no poder, garantindo, ao mesmo tempo, alguma representação aos grupos minoritários. Essa conversão de votos em eleitos é realizada através de métodos matemáticos que consistem em heurísticas.

Neste artigo, será apresentado um modelo que tem por princípio realizar a conversão de votos em candidatos eleitos da maneira mais próxima possível do efetivo percentual de votos obtidos. Ou seja, o objetivo é apresentar uma formulação para um problema que até então sempre foi resolvido por heurísticas. Dessa forma, os partidos vão obter os que lhe é de direito, sendo minimamente favorecidos ou prejudicados.

Na seção 2, será realizada a apresentação dos conceitos de eleição majotitária e eleição proporcional e a apresentação da problemática da conversão de votos. Na seção 3, serão apresentadas as ferramentas utilizadas para a proposta de modelo e as métricas utilizadas na comparação dos resultados. Na seção 4, será apresentada a proposta de modelo. As seções 5 e 6 trazem, respectivamente, as conclusões do estudo e as referências bibliográficas utilizadas neste artigo.

2. SOBRE ELEIÇÕES

Os sistemas eleitorais são construções institucionais política e estrategicamente concebidas e tecnicamente realizadas, para viabilizar e sancionar a representação política (TAVARES, 1994). Os Estados modernos têm por princípio regular o processo eleitoral de tal maneira que todos os partidos organizados realmente expressivos obtenham representação adequada nos organismos do poder. (CARRERAS & VALLES, 1977). Mas nem sempre ocorre dessa forma e isso depende em grande parte do sistema de conversão de votos utilizados.

Os sistemas democráticos existentes atualmente são classificados basicamente em dois tipos: majoritários e proporcionais. As eleições majoritárias têm por princípio representar a maioria, ou seja, será eleita uma pessoa pela maioria relativa ou absoluta dos votos. Já as eleições proporcionais visam representar grande parte das classes e dos grupos políticos da sociedade, portanto serão eleitos vários representantes, cada qual representando seu grupo ou partido político. Por isso, os métodos proporcionais são aqueles que realizam a conversão de votos em determinado número de cadeiras legislativas ou parlamentaristas(SHUSTER et al 2003) tendo por princípio manter dentro do possível a mesma representatividade partidária obtida no momento da votação.

2.1. APRESENTAÇÃO DA PROBLEMÁTICA

A questão apresentada consiste em um problema de conversão de votos dados pelos eleitores aos partidos, em representantes eleitos pelo povo. Ou seja, sabendo-se quantos votos um partido obteve, pretende-se determinar quantos candidatos ele elegerá. É um problema prático onde as variáveis de decisão devem ser valores inteiros. Trata-se de um problema eleitoral matemático de distribuição de cadeiras legislativas por partido após a contabilização final dos votos, de acordo com a quantidade de votos que cada partido recebeu, ou seja, o problema consiste no cálculo da quantidade de cadeiras que cada partido terá direito de acordo com a votação que este recebeu na eleição.

A primeira vista parece trivial. Se um determinado partido tem 50% do total de votos para uma eleição de deputado federal em que o total de cadeiras é de 10 ele terá direito a eleger 5 deputados. Agora, suponha-se que ao invés de 10 cadeiras, fossem 13. Esse mesmo partido que obteve 50% dos votos, em princípio, terá direito a preencher a metade do número de cadeiras. Acontece que 50% de 13 é 6,5 e não se pode eleger 6,5 deputados. Então, quantos deputados esse partido vai ter direito de eleger? Isso acontece sempre quando se trabalha com quantidades ou números inteiros, que não podem ser fracionados, assim como, pessoas que não podem ser “divididas”.

A Figura 2.1 ilustra a problemática aqui apresentada:

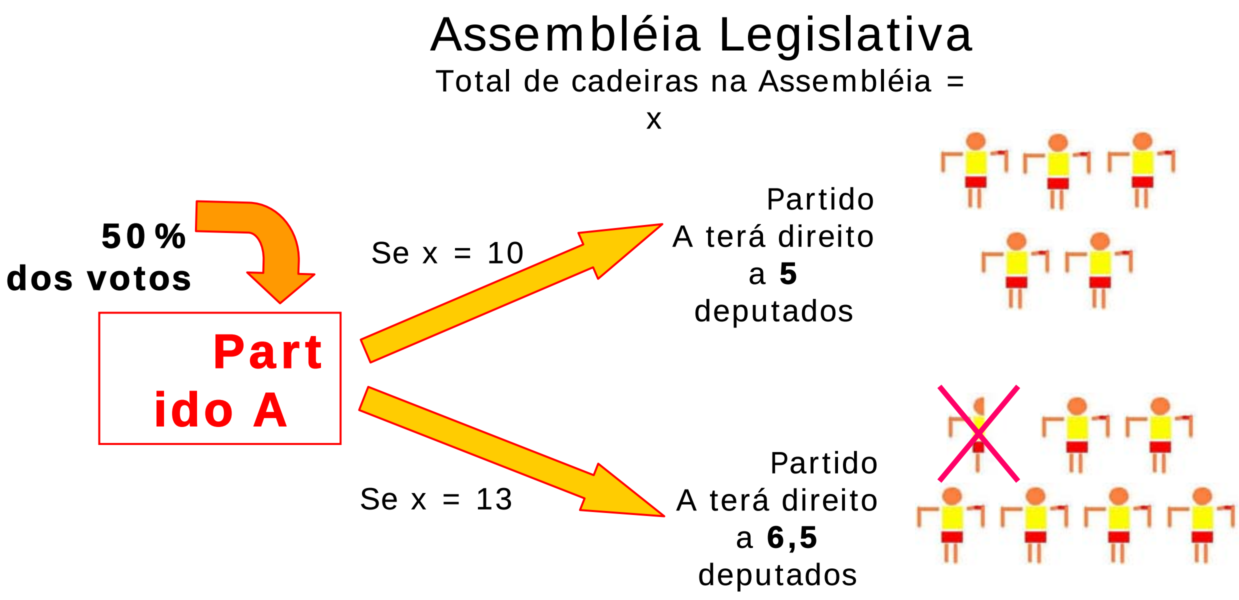

Figura 2.1 – Ilustração da problemática da conversão de votos

Por isso, matematicamente, é impossível, para um número fixo de eleitos, um modelo que apresente sempre em resultado a exata representação proporcional. Para que cada partido fosse representado em exata proporção, seria necessário fazer frações de representantes, porque não é de esperar que o número de simpatizantes de cada partido seja sempre divisor exato do número de votantes de todo o distrito ou circunscrição (BRASIL, 1893). Portanto, a quantidade de deputados que esse partido vai eleger, vai depender diretamente do método matemático eleitoral utilizado, ou seja, como será realizada a conversão do número de votos na quantidade de deputados eleitos.

Quanto mais próximos dos percentuais reais for a conversão dos votos em cadeiras, mais preciso é o método, pois estará respeitando com maior exatidão o princípio proporcional da representatividade. Por isso, é necessário um sistema eleitoral de acordo com o qual os partidos sejam representados no parlamento em proporção bem próxima à dos votos obtidos dos eleitores (ZIPPELIUS, 1997). E é essa formulação que será apresentada na seção 4.

3. FERRAMENTAS UTILIZADAS

Para a composição do modelo a ser apresentado, foram utilizadas 2 ferramentas muito importantes:

- a métrica de Thebychev;
- o conceito de Minimax.

O conceito de cada ferramenta é apresentado nas seções 3.1 e 3.2, respectivamente. Foi utilizado ainda, o algoritmo *Branch-and-Bound* na solução da formulação proposta. A seção 3.3 apresenta e detalha o funcionamento dessa ferramenta muito utilizada em problemas de programação inteira.

Além dos conceitos citados, foi utilizada, também, a métrica Euclidiana com a finalidade de comparar os resultados obtidos no estudo de caso.

3.1. MÉTRICAS

Comparar os métodos eleitorais é verificar qual deles produz resultados mais próximos dos percentuais reais de votação, ou seja, deve-se comparar o vetor percentual de eleitos com o vetor percentual de votos. Para tanto é necessário estabelecer uma topologia no espaço vetorial de dimensão n, onde n é a quantidade de partidos que disputaram a eleição. Dadas as características desse espaço, é conveniente utilizar uma topologia métrica.

Uma métrica ou distância entre dois elementos a e b, onde a e b podem ser pontos, elementos, vetores, etc, é uma função d(a,b) com as seguintes propriedades(PRENTER, 1975; SOARES DE MELLO et al 2002).

1 - $d(a,b) \geq 0$, onde $d(a,b)=0$ se somente se $a=b$

2 - $d(a,b)=d(b,a)$

3 - $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$

Neste trabalho, foram utilizadas as métricas clássicas para se medir a distância entre 2 pontos. Uma é através da métrica Euclidiana e a outra é através da métrica de Tchebychev.

A métrica Euclidiana consiste no cálculo da distância considerando as distâncias nos dois eixos. Já a métrica de Tchebychev considera apenas um eixo, o que apresenta maior distância dentre os apresentados.

1 - Euclides: $d(a,b) = [(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2]^{1/2}$

2 - Tchebychev: $d(a,b) = \max (|a_2 - a_1|, | b_2 - b_1 |)$

A visualização geométrica das métricas está na Figura 3.1.

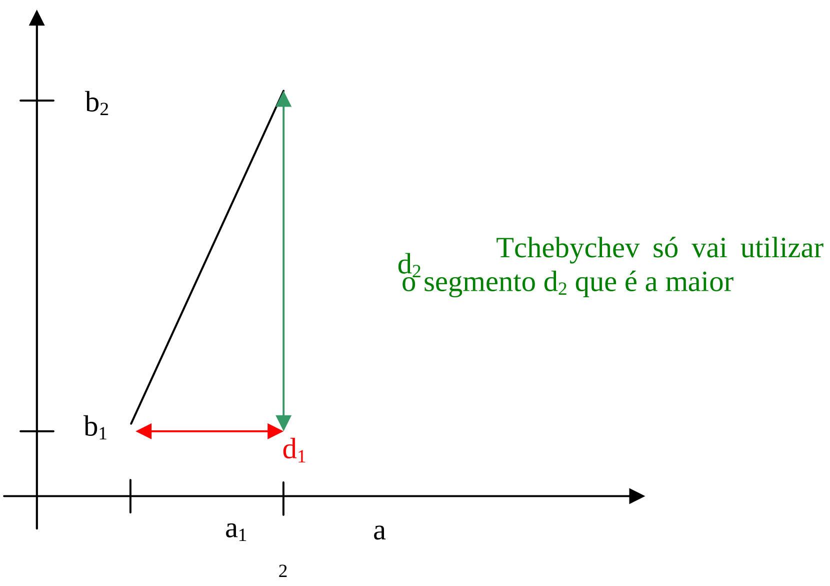

Figura 3.1 – Representação geométrica das métricas

Essas duas métricas são utilizadas para comparar os diferentes métodos utilizados. A métrica Euclidiana faz uma avaliação de conjunto e compensatória, pois faz uma média entre as distâncias, que no caso das eleições será a diferença entre os percentuais reais de votação e os percentuais de eleitos por partido. A métrica Tchebychev, como pode ser visto pela própria fórmula, baseia-se na maior distância dos eixos e não na média da distância, que para este caso é considerada uma métrica mais pessimista, pois quanto maior a distância entre o percentual real e o percentual obtido pelos eleitos, menos preciso é o método.

A métrica Tchebychev, além de ter sido utilizada na comparação dos resultados obtidos, foi utilizada, conforme já mencionado, na formulação do modelo. Foi esta a escolhida justamente por se tratar de uma métrica pessimista.

3.2. MINIMAX

O conceito de minimax e de maximin surgiu a partir da Teoria dos Jogos. A estrutura da otimização na Teoria dos Jogos é alterada para a determinação de um máximo dentro o conjunto de mínimos (maximin), ou de um mínimo entre um conjunto de máximos (minimax). Veja como isto se dá.

3.2.1. Teoria dos Jogos

Um jogo consiste em uma situação em que 2 ou mais pessoas estão em busca de objetivos conflitantes. Por isso, esse objetivos não podem ser alcançados juntamente. Como qualquer jogo, alguém ganha e o outro perde. O que ganhou recebe um pagamento positivo e o que perde recebe um pagamento negativo. O que vai determinar quem vai ganhar é forma com a qual cada uma vai jogar, pode ser por sorte, ou por uma boa estratégia de jogo. Como ambos os jogadores desejam ganhar o jogo, o resultado deste vai depender do tipo de estratégia que cada um vai adotar (CHIANG, 1927).

Em todo jogo há um saldo, seja ele positivo ou negativo. Esse saldo pode ser constante e independer das estratégias adotadas ou não. Por exemplo, suponha-se 2 restaurantes pertos de uma fábrica distante em que os funcionários recebessem um ticket refeição fixo de R$ 5,00 por dia. Esses funcionários não gastam mais que o valor do ticket. Os restaurantes desejam aumentar seus faturamentos e ficam fazendo uma guerra de preços, mas o gasto no mês por pessoa vai variar sempre em torno de R$ 110,00, dependendo essa variação somente da quantidade de dias úteis do mês. As vendas de cada restaurante podem ser descritas, dependendo da estratégia adotada por cada restaurante, pelo par ordenado (R$ 50,00 , R$ 60,00) ou par ordenado (R$ 30,00 , R$ 80,00), mas a soma será sempre constante. Este é um caso de jogo com soma constante. Observa-se ainda que se o objeto do resultado não fosse o faturamento, e sim o lucro, este sim poderia variar de acordo com os custos, passando a ser então um jogo de soma não-constante.

Num jogo com este, existe um número limitado de estratégias por parte dos 2 jogadores. Assim, pode-se construir uma matriz de pagamentos com as estratégias de cada jogador.

Observa-se que não há necessidade de ser uma matriz quadrada, o número de estratégias de um jogador não tem que ser igual ao do outro jogador. A tabela 3.1 mostra as estratégias de cada jogador.

	Estratégias do jogador 2		
Estratégias do jogador 1	1	2	3
1	40	70	60
2	50	40	70

Tabela 3.1 – Estratégias dos 2 jogadores no jogo

A matriz A é uma matriz de pagamentos, onde o jogador 1 possui apenas 2 estratégias disponíveis e o jogador 2 possui 3. Os valores nela contidos são os pagamentos que devem ser realizados ao jogador 1.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 & 70 & 60 \\ 50 & 40 & 70 \end{vmatrix}$$

Para saber a matriz do jogador 2 é só subtrair do total o valor de cada pagamento ao jogador 1, ou seja, o pagamento ao jogador 2 será a constante, que neste caso é 110 – menos o que o jogador 1 tem a receber (a_{ij}).

Quando a constante do jogo tem soma zero, esse jogo é chamado de jogo de soma zero. Nele o que um jogador ganha é exatamente o que o outro perde.

Mas somente o conhecimento dessa matriz não é suficiente para o conhecimento do ganhador. É necessário também saber qual estratégia que cada jogador vai utilizar. Existem vários tipo de estratégias: conservadoras, dominadas, mistas entre outras.

Supondo-se que o jogador 1 não sabe qual estratégia seu adversário vai aplicar e decide ser conservador. Ele vai escolher uma estratégia que, independente da do seu adversário, ele não terminará na pior situação. Aplicando esse procedimento à matriz de pagamentos do jogador 1, encontra-se os mínimos em cada uma das 2 linhas são 40 e 50. O máximo dentre esse conjunto de mínimos é o valor 50 que está na 2ª linha. Então, a estratégia ótima neste caso é a 2ª estratégia. Neste caso, foi utilizado o Maximin, mas para descobrir qual a estratégia ótima para o jogador 2 pode-se montar a matriz de pagamentos de 2 e aplicar o maximin nas colunas da matriz, ou então utilizar o Minimax nesta mesma matriz de 1. Os máximos em cada uma das colunas são 50, 70 e 70. O menor valor entre esses é o 50.

Neste caso, temos o chamado ponto-sela, que ocorre quando um elemento é tanto o Maximin quanto o Minimax. Sendo assim, a solução do jogo foi encontrada.

Ou seja, quando:

$$\max_i \min_j (a_{ij}) = \min_j \max_i (a_{ij})$$

Esse é chamado Teorema Minimax ou Teorema Fundamental na Teoria dos Jogos: para qualquer jogo de soma constante com 2 pessoas, sempre existe um pagamento esperado maximin e um pagamento esperado minimax que são iguais um ao outro.

3.3. PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Foi utilizado ainda, o algoritmo *Branch-and-Bound,* através do software LINDO 6.1. Este software utiliza o algoritmo simplex para resolução de casos de programação linear e o algoritmo *Branch-and-Bound* para casos de programação inteira. O *Branch-and-Bound* é uma técnica para solução de problemas inteiros, como é o caso das eleições.

Em muitos problemas práticos, as variáveis de decisão apenas fazem sentido se tiverem valores inteiros, como na formulação em questão que se trata de um problema de programação linear sujeito a restrição adicional de que as variáveis de decisão tem que assumir valores inteiros (HILLIER, 1988). Quando se tem um problema de programação inteira, existem vários métodos de resolvê-lo, um deles é através do algoritmo *Branch-and-Bound*.

O algoritmo de *Branch-and-Bound* consiste em uma técnica de procura da solução ótima de um problema através da “divisão” deste em outros pequenos problemas até que se encontre a solução do problema original (WOLSEY, 1998).

Em outras palavras, o que o algoritmo de *Branch-and-Bound* faz é, como o próprio nome insinua, a formação de uma árvore com diversos ramos (*branch*) que tem por objetivo a geração de uma infinidade de soluções, seja elas inteiras ou não e a otimização deste processo através da utilização de limites (*bound*).

O processo de inicialização só será executado uma vez, quando a solução para o problema começar. Este é, na verdade, um processo de limitação, só que executado pela primeira. Nesta etapa, descobre-se que a função não tem uma solução ótima inteira, possui somente solução ótima real. Então, no caso de um problema de maximização de uma função, a solução contínua ótima (primeira solução encontrada) funciona como um limite superior para o valor que se deseja encontrar (Goldbarg, 2000).

O processo de ramificação consiste na divisão do problema em diversos ramos, que por sua vez, representam um novo problema cada. É necessário encontrar a solução de cada um desses novos problemas para então analisar qual solução inteira, dentre as apresentadas, pode ser considerada ótima.

O processo de limitação consiste no encontro dos limites(superior ou inferior) de cada um desses novos problemas. Isto é claro, na medida que, no caso de um problema de maximização de uma função, o valor inteiro encontrado nunca poderá ser maior que o contínuo, pois isto significaria que o valor inteiro estaria fora da envoltória convexa, não representando, assim, uma solução ótima para o problema a ser resolvido.

Ao mesmo tempo, os valores inteiros encontrados durante a ramificação funcionam como limites inferiores. À medida que se encontra um valor inteiro em um ramo da árvore, não é necessário resolver um outro ramo que visivelmente não tem chance de gerar uma solução inteira melhor do que aquela já encontrada.

No caso de problemas de minimização de função, os limites se invertem. O limite que funciona como superior para o caso anterior, neste serve como limite inferior e vice-versa.

A otimização do processo de ramificação se faz cada vez mais importante quanto maior o problema se apresenta, pois quando se trata de um problema grande, a ramificação pode gerar uma infinidade de cálculos. Portanto é muito importante que se utilize alguma regra de ramificação que esteja baseada em critérios que auxiliem no momento da escolha dos sub-conjuntos remanescentes (HILLIER & LIEBERMAN, 1998).

Existem diversas regras de ramificação, dentre elas, duas são muito boas: a regra do melhor limite e a regra do limite mais novo.

A regra do melhor limite diz que para que seja selecionado o subconjunto que tenha o limite mais favorável, ou seja, o menor limite inferior no caso de minimização e o maior no caso de maximização. Esse critério é utilizado, porque o subconjunto que apresenta essa característica é aparentemente, mais promissor para conter uma solução ótima.

A regra do limite mais novo diz que para que seja selecionado o subconjunto mais recentemente criado que ainda não tenha sido sondado. Caso exista no mesmo momento mais de um conjunto com essa característica, escolhe-se aquele que tenha o limite mais favorável. Essa regra tem a vantagem de uma manutenção de dados menos incômoda e de dar uma grande oportunidade para se obter, eficientemente, os limites.

4. MODELO PROPOSTO

Nesta seção, será apresentada a modelagem de programação inteira feita para eleições. Esta é uma formulação para o problema cujas heurísticas foram apresentadas em (MAIA & SOARES DE MELLO, 2004) e em (MAIA, 2005), e tem por objetivo ser um modelo bastante preciso na apresentação de seus resultados. O objetivo desta modelagem é propor um método que realize a conversão de votos em eleitos mais perto do percentual real, ou seja, de forma mais precisa e leal possível. Dessa forma, os partidos vão obter o que lhes é realmente de direito, sem serem favorecidos e sem causar perdas para outros (PENNISE, 1998).

Para isso, conforme dito na seção 3, foram utilizadas técnicas de otimização, como a métrica de Thebychev e o conceito de Minimax na formulação do modelo e a técnica de *Branch-and-Bound* na solução do modelo.

O modelo é composto por n+1 variáveis e n constantes.

Existe uma constante para cada partido, por isso são n constantes. A constante de cada partido é função da multiplicação do percentual de votos de cada partido pela quantidade total de cadeiras. Esta constante, chamada no modelo de C, é um número real, quase nunca inteiro, salvo em casos raríssimos de divisões perfeitas e é constante para cada partido e para cada eleição, ou seja, do mesmo modo que nos métodos apresentados tem-se um QP para cada partido, no modelo proposto tem-se um C para cada partido/coligação que disputa uma eleição.

$$Ci = \frac{\text{quantidade de votos do partido/coligação}}{\text{quantidade de votos da eleição}} \cdot QTC$$

Das n+1 variáveis que se deseja encontrar, n variáveis são as que apresentam o número de candidatos que serão realmente eleitos por cada partido. Portanto, ter-se-á na saída de dados do modelo tantos Nis (N_1, N_2, N_3,..., Nn) quantos forem os partidos/coligações disputando a eleição. A variável N tem que ser um número inteiro, pois, conforme detalhado em diversas partes desse trabalho, não se pode eleger partes de uma pessoa.

A outra é uma variável chamada (D) que o programa vai apresentar. D nada mais é que a maior diferença de valor entre esses dois valores apresentados, a variável desejada Ni e a constante Ci, de cada partido. Ou seja, dentre os valores de diferença entre o que se quer encontrar e o que já se encontrou (Ci), vai ser encontrado o maior deles.

Neste caso, temos a seguinte função objetivo:

1) Minimizar (D), tal que D = Tchebychev($|Ni - Ci|$)

2) Minimizar (máximo(D))

A formulação completa é, então:

$$\text{Minimax}(|N1 - C1|, |N2 - C2|, |N3 - C3|, ..., |Ni - Ci|)$$

$$Ni\text{-}1 \geq Ni,\ i = 1, 2, \dots n$$

$$\sum_{i=1}^{n} Ni = Tc, \text{ onde Tc é o total de cadeiras}$$

$$Ni \text{ inteiro positivo para todo } i = 1, 2, \dots n$$

Nesta formulação apresentada, a função objetivo minimiza a diferença entre os valores exatos e os valores a serem encontrados.

A primeira restrição assegura que os partidos que obtiveram menos votos preencham um menor número de cadeiras do que os partidos que obtiveram mais votos e assim sucessivamente. A segunda restrição assegura que a soma das cadeiras que foram preenchidas por cada partido não seja maior do que a quantidade total de cadeiras. E a última restrição assegura que não haverá partido algum com quantidade de cadeiras a preencher negativa.

4.1. MODELO APLICADO A UM ESTUDO DE CASO

A esta modelagem foi aplicada a base de dados da Eleição Municipal de 2004 do município de Niterói. A formulação aplicada a essa base de dados é vista no Programa 1.

Programa 1:

```
min d
st
!restrições d > N1 - c1 = d + c1 > N1 = c1 > N1 - d
N1 - d < 2.16
N2 - d < 0.45
N3 - d < 1.83
N4 - d < 2.86
N5 - d < 2.02
N6 - d < 0.07
N7 - d < 0.44
N8 - d < 0.97
N9 - d < 0.70
N10 - d < 1.22
N11 - d < 2.06
N12 - d < 0.40
N13 - d < 0.36
N14 - d < 0.20
N15 - d < 0.56
N16 - d < 0.96
```

```
N17 - d < 0.74
!restrições d > c1 - N1 = d + N1 > c1
N1 + d > 2.16
N2 + d > 0.45
N3 + d > 1.83
N4 + d > 2.86
N5 + d > 2.02
N6 + d > 0.07
N7 + d > 0.44
N8 + d > 0.97
N9 + d > 0.70
N10 + d > 1.22
N11 + d > 2.06
N12 + d > 0.40
N13 + d > 0.36
N14 + d > 0.20
N15 + d > 0.56
N16 + d > 0.96
N17 + d > 0.74
!restriçoes de ordem
N4 - N1 > 0
N1 - N11 > 0
N11 - N5 > 0
N5 - N3 > 0
N3 - N10 > 0
N10 - N8 > 0
N8 - N16 > 0
N16 - N17 > 0
N17 - N9 > 0
N9 - N15 > 0
N15 - N2 > 0
N2 - N7 > 0
N7 - N12 > 0
N12 - N13 > 0
N13 - N14 > 0
N14 - N6 > 0
N6 > 0

N1+N2+N3+N4+N5+N6+N7+N8+N9+N10+N11+N12+N13+N14+N15+N16+N17 = 18

end

gint N1
gint N2
gint N3
gint N4
gint N5
gint N6
gint N7
gint N8
gint N9
gint N10
gint N11
gint N12
gint N13
gint N14
gint N15
gint N16
gint N17
```

Os resultados apresentados por esta modelagem se encontram na tabela 4.1. Estes foram comparados com os resultados oficiais das eleições, retirados do site do TRE-RJ (http://www.tre-rj.gov.br).

Na tabela 4.1, os partidos que estão em destaque com a cor amarelo e verde são os que conseguiram eleger pelo menos 1 vereador pelo modelo proposto. Os que estão em amarelo elegeram pelo menos um vereador aplicado o método adotado no Brasil (resultado oficial) e os que estão em azul não conseguiram eleger nenhum vereador pelo método brasileiro (resultado oficial).

Ainda na tabela 4.1, as colunas que estão dentro de “Resultado Oficial” apresentam a quantidade oficial de eleitos e os seus respectivos percentuais. As colunas que estão dentro de “Resultado do Modelo Apresentado” apresentam a quantidade de eleitos apresentada pelo modelo com seus respectivos percentuais.

o.	COLIGAÇÃO / PARTIDO	Votos	Resultado Oficial		Resultado pelo modelo		% real de votos
			Eleitos (oficial)	% eleitos/total de cadeiras	Eleitos (modelo)	% eleitos/total de cadeiras	
	Niterói Melhor	31.304	3	16,67%	2	11,11%	12,01%
	PP	6.575	0	0,00%	1	5,56%	2,52%
	PDT	26.436	3	16,67%	2	11,11%	10,14%
	PT	41.399	4	22,22%	3	16,67%	15,88%
	Unidos por Niterói	29.282	3	16,67%	2	11,11%	11,23%
	PSTU	1.034	0	0,00%	0	0,00%	0,40%
	PSL	6.367	0	0,00%	0	0,00%	2,44%
	Renova Niterói	14.038	0	0,00%	1	5,56%	5,38%
	PSC	10.091	0	0,00%	1	5,56%	3,87%
0	PL	17.727	2	11,11%	1	5,56%	0,68%
1	Colig. Pop. Humanista	29.825	3	16,67%	2	11,11%	11,44%
2	PFL	5.789	0	0,00%	0	0,00%	2,22%
3	Reconduzindo Niterói	5.260	0	0,00%	0	0,00%	2,02%
4	Trab. e Fam. p/ Nit.	2.913	0	0,00%	0	0,00%	1,12%
5	PV	8.080	0	0,00%	1	5,56%	0,31%
6	Sempre Niterói	13.878	0	0,00%	1	5,56%	5,32%
7	PT do B	10.726	0	0,00%	1	5,56%	4,11%

Tabela 4.1 – Comparação entre o resultado oficial e o apresentado pelo modelo

Conforme esperado esta formulação apresentou resultados bem precisos, ou seja, números inteiros bem próximos dos números reais iniciais. Isso se confirma também através dos resultados obtidos pelas métricas de comparação. Os valores obtidos na comparação pelas duas métricas na aplicação do modelo apresentado são:

Tchebychev – 3,0337 e Euclidiana – 6,3753

Enquanto os valores apresentados pelo métodos brasileiro são:

Tchebychev – 6,5272 e Euclidiana – 17,3663.

A partir destes dados, pode-se constatar que a representação percentual parlamentar por partido foi bem próxima da real. Neste caso, um número muito maior de partidos obteve a representação parlamentar.

Os resultados apresentados pela formulação foram os mesmos resultados encontrados pelo método da maior sobra para a eleição em estudo em (MAIA, 2005). Este resultado veio reforçar o que já havia sido constatado no artigo citado, quando foi concluído que o método mais preciso no caso estudado era o método da maior sobra. Porém, esta constatação foi em particular para este caso. O método da Maior sobra, assim como todos os outros métodos apresentados em (MAIA, 2005), é uma heurística de um problema cuja formulação foi apresentada neste capítulo.

A formulação deste problema, porém, não pode ser considerada um método, pois existem casos específicos e raros em que este programa apresenta mais de uma solução. No exemplo 4.1, pode-se observar um destes casos.

Exemplo 4.1: Em uma determinada eleição municipal, haviam 4 partidos concorrendo entre si para realizar o preenchimento de 20 cadeiras na Câmara Municipal. Cada partido recebeu a seguinte quantidade de votos:

Partido 1: 12,5% do total de votos
Partido 2: 17,5% do total de votos
Partido 3: 37,5% do total de votos
Partido 4: 32,5% do total de votos

A quantidade de votos que cada um recebeu foi tal que gerou a seguinte base de dados:

C_1 = 12,5% x 20 = 2,5
C_2 = 17,5% x 20 = 3,5
C_3 = 37,5% x 20 = 7,5
C_4 = 32,5% x 20 = 6,5.

A constante de cada partido é função da multiplicação do percentual de votos de cada partido pela quantidade total de cadeiras.

Colocando esses valores no modelo, tem-se o seguinte:

```
min d

st
!restrições d > N1 - c1 = d + c1 > N1 = c1 > N1 - d
N1 - d < 2.5
N2 - d < 3.5
N3 - d < 7.5
N4 - d < 6.5




!restrições d > c1 - N1 = d + N1 > c1
N1 + d > 2.5
N2 + d > 3.5
N3 + d > 7.5
N4 + d > 6.5

!restriçoes de ordem
N3 - N4 > 0
N4 - N2 > 0
N2 - N1 > 0
N1 > 0

N1+N2+N3+N4 = 20

end
```

```
gint N1
gint N2
gint N3
gint N4
```

Este programa foi “rodado” 4 vezes e foram obtidos os resultados apresentados na tabela 4.2.

Variável	Valor apresentado			
	1a Interação	2a Interação	3a Interação	4a Interação
N1	3,000	3,000	3,000	3,000
N2	3,000	4,000	4,000	3,000
N3	7,000	7,000	7,000	8,000
N4	7,000	6,000	6,000	6,000
D	0,500	0,500	0,500	0,500

Tabela 4.2 – Resultados apresentados pelas variáveis nas interações.

Observa-se que foram obtidos 3 resultados diferentes em 4 interações, diferentemente do ocorrido com a base de dados apresentada no estudo de caso. Os dados do estudo de caso do capítulo III não geram resultados distintos em mais de uma interação. Os resultados gerados pelas 4 interações apresentaram o mesmo grau de precisão, ou seja, o D é invariávelmente igual a 0,5, mesmo quando as variáveis apresentam valores distintos. Por isso, não se pode afirmar qual deles é a resposta correta.

Observa-se, ainda, que os valores atribuídos pelo modelo às variáveis estão variando entre os valores do 1º inteiro menor e do 1º inteiro maior que o valor da constante.

Dada a estrutura do problema em questão, conjectura-se que só em casos como este, em que pelo menos 2 agrupamentos tem n+1/2 (n inteiro)% dos votos, a solução não será única. Apesar de ser um caso muito raro, a sua existência mostra que o modelo proposto nem sempre tem solução única e, por isso, não pode ser considerado um método. Assim, os métodos existentes, além de serem heurísticas, resolvem o problema da não unicidade de soluções.

5. CONCLUSÕES

O modelo proposto para eleições neste artigo é uma formulação deste problema, porém este apresenta soluções múltiplas para os casos extremamente particulares apresentados. Por isso, não pode ser considerado um método eleitoral. Ele é simplesmente uma formulação do problema no qual todos os métodos apresentados em (MAIA & SOARES DE MELLO, 2004) e em (MAIA, 2005) são heurísticas. E mesmo não apresentando a melhor solução, eles são considerados métodos eleitorais porque apresentam solução única.

6. BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL, J.F.de Assis (1893). Democracia representativa – Do voto e do modo de votar, Rio de Janeiro, Lezinger & Filhos.

[2] CARRERAS, Fracesc de & VALLES, Josep M. (1977). Lãs Elecciones. Editorial Blume, Barcelona.

[3] CHIANG, Alpha C. (1927). Matemática para economistas. Tradutor Roberto Camps Moraes; Revisor Técnico Luiz Salvador Lopes. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil: Ed. da Universidade de São Paulo, 1982.

[4] GOLDBARG, Marco César. Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos – Rio de Janeiro: Campus, 2000

[5] HILLIER, Frederick S., LIEBERMAN, Gerald J.; tradução de Helena L. Lemos (1988). – Rio de Janeiro: Editora Campus / São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo.

[6] MAIA, Carolina C., SOARES DE MELLO, João Carlos C. B.(2004). Comparação dos Métodos de Solução do Problema Multidecisor da conversão de votos em eleitos. Anais VII SPOLM.

[7] MAIA, Carolina C. (2005). Modelos Matemáticos de Eleições Proporcionais. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção da Universidade Federal Fluminense.

[8] PENNISE, Aline. Disproportionality Indexes and Robustness of Proportional Allocation Methods. Electoral Studies: Vol. 17, No. 1, pp. 3-19, 1998. Disponível em: <www.sciencedirect.com>. Acesso em janeiro de 2005

[9] PRENTER, P.M. (1975). Splines and Variational Methods. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[10] SHUSTER, Karsten, PUKELSHEIM, Friedrich, DRTON, Mathias & Draper, Norman R.. Seat biases of apportionment methods for proportional representation. Electoral Studies: Vol. 22, No. 4,pp. 651-676, 2003. Disponível em: <www.sciencedirect.com>.

[11] SOARES DE MELLO, J. C. C. B., Lins, M. P. E., Gomes, E. G.. Construction of a smoothed DEA frontier. Pesquisa Operacional, v. 22, n. 2, p. 183-201, 2002.

[12] TAVARES, José Antonio Giusti (1994) Sistemas eleitorais nas democracias contemporâneas: teoria, instituições, estratégia – Rio de Janeiro: Relume-Dumará

[13] TRE-RJ - TRIBUNAL REGIONAL ELEITORAL DO RIO DE JANEIRO. Disponível em: <http://www.tre-rj.gov.br/>.

[14] ZIPPELIUS, Reinhold (1997). Teoria Geral do Estado; Caluste Gulbenkian, 12ª ed., Lisboa.

[15] WOLSEY, Laurence A.(1998). Integer Programming. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization.