

# **ESTUDO DA VISUALIZAÇÃO CIENTÍFICA APLICADO A PROBLEMAS DE FRATURA COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO**

**Bruno de Souza Silva**

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro- Departamento de Matemática - BR 465, Km 7-  
Seropédica- RJ  
brunosirj@yahoo.com.br

**Carlos Adrés Reyna Vera-Tudela**

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro- Departamento de Matemática - BR 465, Km 7-  
Seropédica- RJ  
candres@ufrj.br

**Marlucio Barbosa**

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro- COINFO - BR 465, Km 7- Seropédica- RJ  
marlucio Barbosa@gmail.com

## **RESUMO**

O campo da Visualização Científica (VC) vem se desenvolvendo de uma forma paralela aos computadores; a oferta maior de recursos permite que o usuário possa exigir mais do seu trabalho assim como esperar programas mais poderosos, rápidos e que manipulem uma maior quantidade de dados. A crescente necessidade de sistemas de VC leva ao desenvolvimento da Computação Gráfica como um todo e suas aplicações vêm se tornando evidentes em várias áreas do conhecimento, inclusive é uma ferramenta importante no ensino da mecânica dos sólidos. Neste trabalho é apresentada uma aplicação ao uso da Computação Gráfica, em problemas da mecânica da fratura linear elástica. Para isso, uniu-se um poderoso método numérico, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e as técnicas sofisticadas de Computação Gráfica. O software, Mecânica Elastostática - Método de Elementos de Contorno (MEMEC) foi desenvolvido pela necessidade de poder manipular uma grande quantidade de dados para um pós-processamento, apresentar os mesmos de uma forma moderna e ágil, incluindo uma visualização 2D ou 3D. Esta visualização é fundamental para a análise do assunto em estudo onde a utilização da Função de Green Numérica para representação exata de trincas aumenta a performance e potencializa o desempenho.

Método dos Elementos de Contorno, Mecânica de Fratura, Visualização Científica, MEMEC.

## **ABSTRACT**

The field of Scientific Visualization (CV) is developing a parallel to the computers, the greater supply of resources allows the user to demand more of their work and expect the most powerful programs, quick handling and a greater amount of data. The growing need for systems of VC leads to the development of computer graphics as a whole and its applications have become evident in several areas of knowledge, is also an important tool in the teaching of solid mechanics. This work presents an application to the use of Computer Graphics, in problems of linear elastic fracture mechanics. To do so, joined a powerful numerical method, the Boundary Element Method (ECM) and the sophisticated techniques of computer graphics. The software, mechanics Elastostática - Boundary Element Method (Memec) was developed by the need to be able to handle a large amount of data to a post-processing, present the same in a modern and responsive, including a 2D or 3D. This view is fundamental to analyze the subject under study where the use of numerical Green's function for accurate representation of cracks increases performance and enhances performance.

Boundary Element Method, Fracture Mechanics, Scientific Visualization, Memec.

## INTRODUÇÃO

Os problemas da Mecânica de Fratura Linear Elástica têm sido amplamente estudados por inúmeros pesquisadores e diferentes propostas de métodos de solução numérica são apresentadas.

As trincas são as principais causadoras de falha dos componentes de malha ou na construção civil, na construção naval, em plataforma de petróleo ou tubulações, o estudo das trincas é importante, pois a mesma pode se propagar causando uma fratura. A mecânica de fratura procura estudar o estado de tensões e deformações próximas as trincas a fim de estimar a vida útil do equipamento. O Método de Elementos de Contorno destaca-se como ferramenta para resolução de diversas propostas da Mecânica de Fratura com proposta de utilizar a função de Green para a representação exata de trincas. O MEMEC foi desenvolvido para ser um software para o Método dos Elementos de Contorno e suas variações permitindo a implementação de outras aplicações ampliando os problemas a serem suportados, nesse sentido desenvolve-se nesse trabalho um novo processador para problemas de mecânica de fratura com o uso da função de Green Numérica a ser implementado no MEMEC. Um exemplo de aplicação é apresentado de forma a poder verificar algumas das potencialidades do software.

## DESENVOLVIMENTO

A ciência estuda a natureza tentando entender o seu comportamento e representar um sistema que na matemática é conhecido como modelo, onde a análise detalhada permite simular uma situação real minimizando custos e tempo, modelando matematicamente eventos da natureza. Diversos problemas da engenharia são modelos matemáticos físicos aos quais determinados fenômenos acontece, uma representação matemática importante para a resolução desses modelos são as Equações Diferenciais que representam, um comportamento de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes, utilizando as aproximações para transformar as equações diferenciais e suas condições de contorno em um sistema de equações algébricas buscando um resultado exato ou próximo. Contudo a grande maioria das equações encontradas na prática não pode ser solucionada analiticamente, um recurso que temos para resolver as equações ou encontrar um resultado próximo são os Métodos Numéricos.

Os Métodos Numéricos consistem em representar de forma discreta (finita) o problema, definindo a solução por um processo aproximado. Pode-se citar como forma de encontrar a solução o Método das Diferenças Finitas, o Método de Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno.

O Método das Diferenças Finitas (do inglês: Finite Difference Methods ou FDM) é uma técnica aproximada para solucionar equações diferenciais parciais, transformando um problema composto por equações diferenciais em um problema formado por equações algébricas. O primeiro passo, nesta direção, é a chamada discretização do domínio da variável independente. Finalmente, aplicam-se as equações diferenciais ordinárias aos pontos discretos, substituindo as aproximações obtidas gerando sistemas de equações algébricas, cuja solução fornece a solução aproximada do problema original.

Utilizando a aproximação de diferenças finitas encontramos uma equação que pode ser explícita ou implícita. Uma equação é explícita quando a solução da equação é desconhecida, não caímos em um sistema linear, tendo a solução direta ao contrário da implícita que caímos em um sistema não-linear onde a solução não pode ser explicitada a partir da equação.

Em particular para o Método de Diferenças Finitas torna-se difícil uma aplicação em sistemas com geometria irregular, condições de contorno não usuais ou composição heterogênea. Isso se deve ao fato de complicadas aproximações serem requeridas nos contornos do sistema e na fronteira entre as regiões de diferentes composições. Uma discretização de elementos finitos é muito melhor aplicada a tal sistema.

O Método dos Elementos Finitos fornece uma alternativa melhor a tais sistemas, dividindo o domínio da solução em formas simples de regiões ou “elementos” sendo possível desenvolver procedimentos computacionais padronizados, que permitem considerar domínios de qualquer forma geométrica. O uso de elementos triangulares, em vez de malhas retangulares, fornece melhor aproximação em sistemas com formatos irregulares. Como principal desvantagem tem o fato de ter maior complexidade matemática, menor versatilidade para solução de problemas setorialmente não homogêneos e pequena difusão.

Porém e a malha de elementos finitos introduz um erro geométrico no domínio. Esse erro pode ser minimizado com o melhoramento da malha o que implica aumentar o custo computacional necessitando de uma grande quantidade de memória para a solução de grandes problemas.

Visando a otimização computacional o Método de Elementos do Contorno (MEC) (Brebbia, et al., 1984) é usado em inúmeros trabalhos ao longo dos anos tendo resultados promissores quanto a resoluções de problemas na área de engenharia, para (Santiago - 2008) como as aproximações são feitas apenas no contorno, a dimensão do problema se reduz em uma unidade, acarretando uma diminuição considerável no fornecimento dos dados de entrada, bem como no esforço computacional, visto que a matriz contendo os coeficientes do sistema de equações gerado, apesar de ser cheio e não simétrico, tem geralmente dimensões menores do que o obtido nos métodos que discretizam o domínio.

Suponha que desejamos saber o que acontece no interior de um domínio  $\Omega$  que esta sofrendo ações externas, o MEC discretiza o contorno do problema em segmentos, denominados elementos de contorno e em cada elemento de contorno, a geometria e as variáveis do contorno são descritas por funções aproximadoras e são definidas em termos dos valores nodais. Através das soluções de contorno presume-se o que esta acontecendo no interior do domínio onde, os valores para os pontos internos são calculados em função das variáveis externas do contorno. Nas bibliografias mais usuais que tratam dos conceitos do MEC, o ponto de partida é um problema de potencial escalar em duas dimensões. De uma maneira geral, para a obtenção de uma solução aproximada de um dado problema, recorre-se a uma técnica numérica para estabelecer um modelo discreto que aproxime os campos contínuos a serem determinados, que é obtido através de um processo de discretização da equação integral que governa o problema, neste caso, escrita unicamente em função dos potenciais, fluxos ou uma condição mista no contorno. Este processo de discretização conduz a um sistema de equações algébrico, que uma vez resolvido, fornece as incógnitas do contorno, potenciais, fluxos e posteriormente nos possíveis pontos internos necessários.

As trincas são as principais causadoras de falha dos componentes de malha ou na construção civil, seja por razões no processo de fabricação, na forma de utilização ou ainda como consequência da ocorrência de vibrações na área. São inúmeras as causas para o aparecimento de trincas e dependem de muitos fatores como o próprio material e o ambiente ao qual estão inseridos. O estudo do comportamento da trinca é de suma importância, pois a mesma pode se propagar causando a falha ou colapso por fratura.

A mecânica de fraturas surgiu após a segunda guerra mundial para tentar explicar grandes catástrofes ocorridas em estruturas de navios, locomotivas e aviões contendo trincas ou defeitos semelhantes. Os acidentes ocorridos na época revelavam inadequações nos projetos, onde as análises feitas para se prevenir quanto às ocorrências de trincas eram insuficientes. Foi então que os projetos na Mecânica de Fratura começou a ganhar importância no meio científico, tendo como objetivo o estudo da causa da falha do equipamento para assim se prevenir quanto a novas ocorrências. A mecânica de fratura procura estudar o estado de tensões e deformações próximas as trincas a fim de estimar a vida útil do equipamento, pois as trincas tendem a reduzir a capacidade ao qual a peça tem para desempenhar sua atividade, tal avaliação irá comparar os parâmetros com a resistência do material quanto ao aparecimento de trincas, onde em certos casos só iremos encontrar os parâmetros através dos métodos numéricos.

Pesquisadores vêm trabalhando neste sentido, desenvolvendo diversas técnicas de forma a prever o comportamento de trincas e, em consequência, a vida útil de componentes. Diversas propostas vêm sendo apresentadas com êxito e o número de publicações científicas demonstra a importância que a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) tem na engenharia.

Dentre todo este universo destaca-se como ferramenta o Método dos Elementos de Contorno (MEC) que vem sendo aplicado com êxito a diversas propostas de resolução de problemas de engenharia, seja no caso estático ou no dinâmico, uma vez que os resultados obtidos apresentam alta precisão, com a vantagem adicional da discretização somente do contorno do problema.

As condições de equilíbrio para um problema elastostático com carga de domínio nula é representado pela conhecida Equação de Navier:

$$\mu u_{j,ii} + (\lambda + \mu)u_{i,jj} = 0 \quad (1)$$

onde  $u$  representa o campo de deslocamentos;  $\mu$  e  $\lambda$  são as constantes de Lamê. A relação entre o tensor de deslocamentos e o tensor de tensões é dada por:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2)$$

onde  $n_j$  é a normal externa à superfície.

A formulação tradicional do Método dos Elementos de Contorno (Brebbia, Telles & Wrobel, 1984) consiste em ponderar a Eq.(1) por uma função  $u^*$ , com características especiais e depois integrá-la no domínio. Por meio de um tratamento matemático adequado, que envolve integração por partes e tomando em consideração o princípio de reciprocidade, transforma-se esta equação integral de domínio em uma equação integral de contorno.

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) \quad (3)$$

A Função de Green Numérica (FGN) (Telles, et al., 1995) é uma ferramenta importante na solução de problemas da Mecânica da Fratura uma vez que remove a interpolação do elemento sobre a superfície da trinca. Este procedimento elimina do sistema de equações final os deslocamentos e forças de superfície ao redor da trinca.

Para obter a FGN é necessária a superposição da solução fundamental com uma solução complementar, que leva à satisfação da condição da trinca ser descarregada. Desta forma pode-se escrever:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = u_{ij}^t(\xi, x) + u_{ij}^c(\xi, x) \quad (4)$$

$$p_{ij}^*(\xi, x) = p_{ij}^t(\xi, x) + p_{ij}^c(\xi, x) \quad (5)$$

A representação dos fenômenos pelo meio científico busca oferecer alternativas de solução mais eficiente, a aplicação do MEC em problemas de fratura sendo representado computacionalmente simula situações e resultados com maior precisão. Com o avanço em diversas áreas os computadores evoluíram e chegaram na tecnologia que temos hoje, junto à evolução dos computadores veio à possibilidade de se criar ambientes virtuais mais atualizados devido ao avanço tecnológico, permitindo a criação de softwares mais poderosos capazes de solucionar problemas antes inviáveis computacionalmente e o melhoramento dos softwares já desenvolvidos ou o desenvolvimento de novos. Atraindo assim novas pesquisas para a área visto que no mercado temos poucos softwares com as propriedades mencionadas, e quando temos são de alto custo impossibilitando seu uso por empresas ou projetistas que não possuem capital financeiro suficiente para comprá-los. Hoje com diferentes equipamentos eletrônicos portáteis capazes de rodar softwares os engenheiros, por exemplo, podem visualizar cientificamente métodos números como o MEC no seu campo de trabalho, simulando um fenômeno natural no meio virtual.

## **O SOFTWARE MEMEC APLICADO A PROBLEMAS DA MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA**

O software MEMEC (Fontes Jr, Barbosa & Vera-Tudela, 2007) foi inicialmente baseado sobre um software desenvolvido em linguagem Fortran. O software desenvolvido em Fortran fora utilizado por um longo período para a obtenção de resultados numéricos apresentados em artigos, eventos e teses. Pode-se afirmar que o MEMEC não é uma tradução pura desse software para o Java. O MEMEC é uma aplicação baseada no modelo de n camadas. A Fig. 1 mostra um diagrama simplificado do software.

Conforme pode ser observado no diagrama, o MEMEC fora desenvolvido para ser um software para o Método dos Elementos de Contorno e suas variações, independente do problema físico a ser resolvido. A ampliação de problemas a serem suportados pelo MEMEC se dá através da inserção de um novo processador obedecendo a características prévias de projeto. Dessa forma, o MEMEC constitui um ambiente que abrange os requisitos básicos para uma ampliação numérica, isto é, possuir pré-processador, processador e pós-processador.

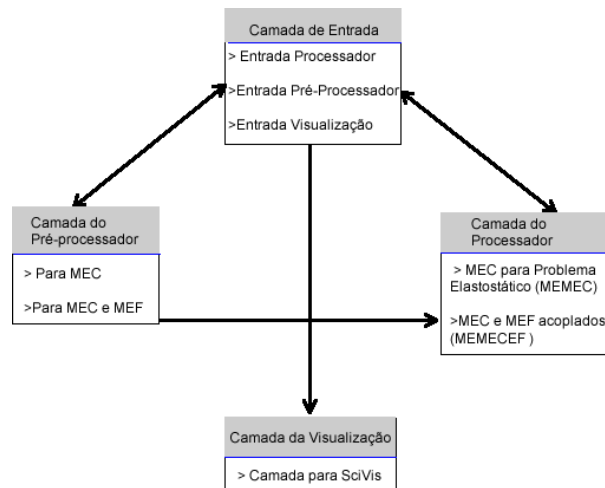


Fig. 1: Digrama de Camadas do MEMEC

### EXEMPLO DE APLICAÇÃO

O exemplo de aplicação corresponde a uma placa retangular de dimensões 20x10, com carga unitária aplicada em ambos os extremos da placa. A metodologia de trabalho utiliza a simetria da placa como mostrado na Fig. 2 onde um corpo de dimensões 10x5 é analisado. O meio comprimento da trinca é  $a = 2.5$  e as propriedades físicas são módulo de Young  $E=7.43$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , e carregamento  $P=1$  no extremo direito.

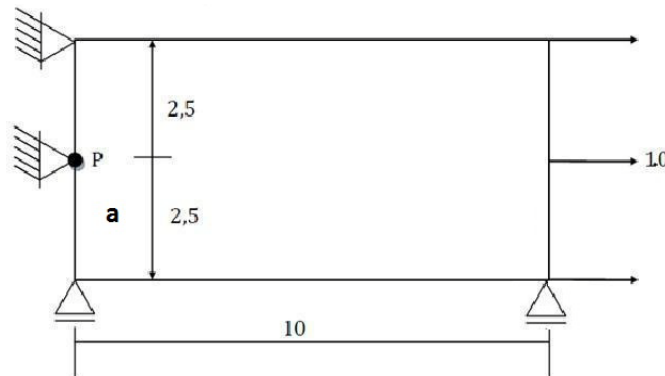


Fig. 2: Dimensões da placa retangular com trinca central.

A discretização da placa é mostrada na Fig. 3, com um total de 75 elementos de contorno lineares e nós duplos nos quatro cantos da placa.

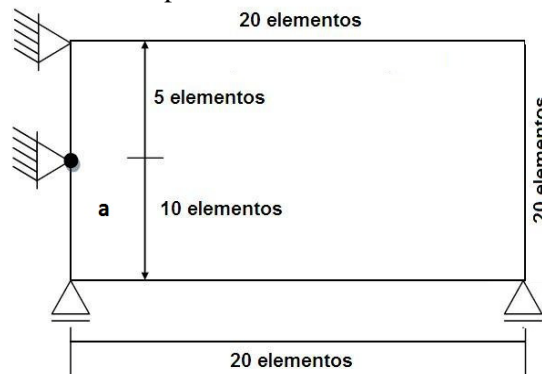


Fig. 3: Discretização da placa retangular com trinca central.

As figuras seguintes mostram como são apresentados os dados e os resultados no software MEMEC. É importante destacar que o software oferece a opção de mostrar todos os dados de entrada e saída no formato de texto, assim como, no formato de visualização científica. Por limitações de espaço não é possível mostrar todas as saídas que o software oferece e por isso foi escolhido as mais representativas para mostrar os resultados do problema.

Na Fig. 4 é apresentado o aplicativo para geração de malhas o que representa um ganho importante na análise do problema.

A Fig. 5 apresenta o campo de deslocamentos final do problema mostrando em sobreposição os campos iniciais e finais. Como destaque pode-se observar no extremo inferior esquerdo da placa a deformação na superfície da trinca, além disso, colocando o ponteiro do mouse nos nós da figura vai se obter o valor da coordenada final do nó.

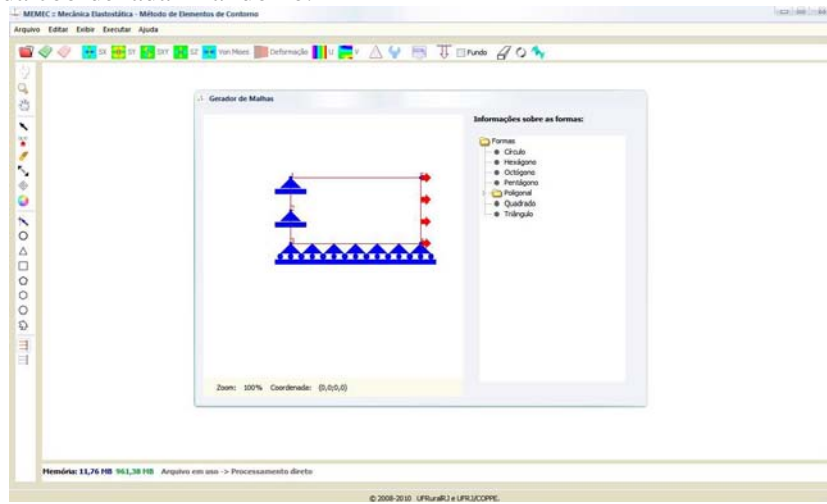


Fig. 4: Janela do software MEMEC do aplicativo para geração de malhas

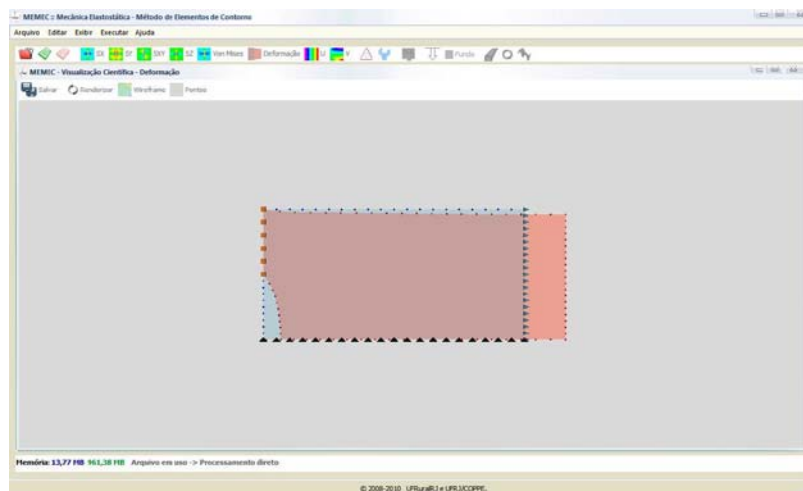


Fig. 5: Janela do software MEMEC mostrando a visualização dos deslocamentos finais do problema.

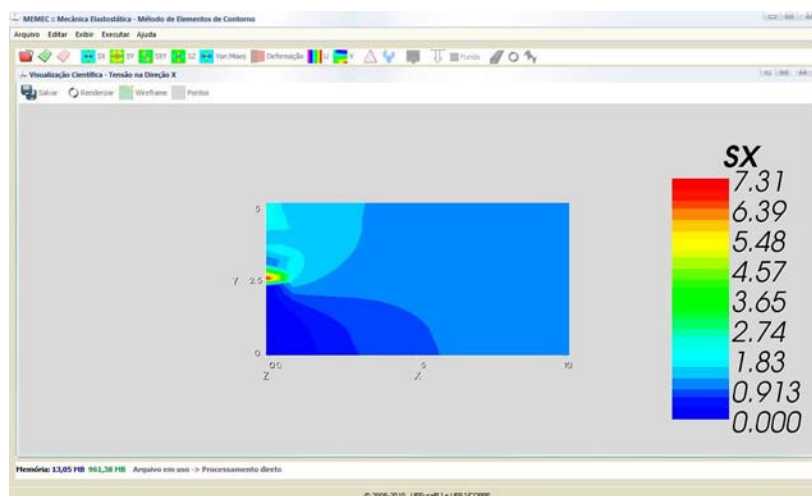


Fig. 6: Janela do software MEMEC mostrando o campo de tensões final do problema.

Na Fig. 6 é apresentado o campo de tensões final do problema analisado e no extremo direito tem-se um esquema de cores relacionado com o valor das tensões. Como destaque pode-se observar a região em vermelho no extremo da trinca que é onde temos um problema de singularidade numérica que é bem representado pelo software.

Como a Visualização Científica está relacionada com a exploração de dados e informação de modo que se possa obter ganho de compreensão e percepção de dados, a implementação de um solver no MEMEC para Problemas de Fratura leva o problema para um ambiente mais amigável onde o recurso gráfico auxiliará no estudo do comportamento das fraturas e o usuário extrairá características e resultados com maior facilidade em menor tempo.

## **CONCLUSÃO**

A implementação de um novo solver como proposta de ampliação do MEMEC está em pleno desenvolvimento para problemas da mecânica da fratura estática possibilitando uma melhor visualização que é fundamental para a análise de estudos, tal desenvolvimento esta sendo implementado para possibilitar futuros trabalhos com suporte para problemas da mecânica da fratura dinâmica. O MEC necessita de um tratamento matemático sofisticado, o MEMEC possui um processador numérico baseado em MEC que possibilita computar a solução numérica interagindo com o usuário através de 4 janelas amigáveis minimizando assim o nível de conhecimento matemático necessário para a utilização do método. No software MEMEC além da aplicação em problemas da mecânica da fratura foram implementadas aplicações da elasticidade linear, problemas MEC-MEF e problemas de condução de calor. A médio e longo prazo outras aplicações deverão ser adicionadas.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Barbosa, M.; “Um ambiente gráfico interativo para o Método dos Elementos de Contorno”, Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, (2010).

Brebbia, C.A., J. C. F. Telles, and L. C. Wrobel ; Boundary Elements Techniques: Theory and Application, Berlin, Springer-Verlag (1984).

Fontes Jr, E. F., M. Barbosa, e C. A. R. Vera-Tudela ; “A Visualização Científica em um problema resolvido com o Método dos Elementos de Contorno e o VTK”. In: Anais do X Encontro de Modelagem Computacional. Nova Friburgo: UERJ. (2007)

Spiegel, M. R., 1992, Manual de Formulas, Métodos e Tabelas de Matemática. 2ª Ed., São Paulo, Mc Graw-Hill.

Telles, J.C.F., G.S. Castor and S. Guimarães ; “A Numerical Green’s Function Approach for Boundary Elements Applied to Fracture Mechanics”, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering: 38, 3259-3274 (1995).

Vera-Tudela, C. A. R. Formulações Alternativas do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Elastodinâmicos de Mecânica da Fratura com o uso da Função de Green Numérica, D. Sc., COPPE/UFRJ, Engenharia Civil, 2003)

Vera-Tudela, C. A. R. e J. C. F. Telles ; A numerical Green's function and the dual reciprocity BEM method to solve elastodynamic crack problems, Engineering Analysis with Boundary Elements.: 29, 204 - 209 (2005).