

# **GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE EM GUILHOTINA BIDIMENSIONAL UTILIZANDO ALGORITMOS GENÉTICOS E HEURÍSTICAS DE ENCAIXE**

**Lilian Caroline Xavier Candido**

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – PPGMNE - UFPR  
liliancarolinex@gmail.com

**Thiago André Guimarães**

Centro Universitário Franciscano – UNIFAE  
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – PPGMNE - UFPR  
thiandgui@gmail.com

**Luzia Vidal de Souza**

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – PPGMNE - UFPR  
luzia@ufpr.br

## **RESUMO**

O problema da geração de padrões de corte bidimensionais consiste em determinar o melhor arranjo de itens a serem cortados a partir de um objeto, minimizando sobras e conseqüentemente o custo com material. Este trabalho propõe uma estratégia para a geração de padrões de corte bidimensionais do tipo guilhotinado, considerado padrões de corte não-estagiados e padrões de corte em dois estágios, com a possibilidade de rotação dos itens para ambos os casos. A metodologia divide-se em duas fases: na primeira, os itens são selecionados e agrupados em subconjuntos através de algoritmos genéticos; e na segunda, empregam-se técnicas heurísticas para realizar o encaixe dos itens e determinar arranjo geométrico do padrão de corte. O método proposto foi testado sobre instâncias da literatura e os resultados obtidos foram comparados com soluções ótimas conhecidas. Os resultados foram satisfatórios, alcançando a otimalidade para algumas instâncias, com reduzido tempo de processamento para todas elas.

**Palavras chave:** Geração de Padrões de Corte; Algoritmos Genéticos; Heurísticas;

## **ABSTRACT**

The problem of generating two-dimensional cutting patterns consists in determining the best arrangement of items to be cut from an object minimizing waste. This paper proposes a strategy for generating two-dimensional guillotine cutting patterns, considering non-staged patterns and patterns in two stages, with the possibility of rotation of items for both cases. The methodology is divided in two phases: first, a Genetic Algorithm is used to select and group items into subsets; second, heuristic techniques are employed to perform the fit of items and determine the geometric arrangement of the cutting pattern. The proposed method was tested on instances from literature, and the results were compared with known optimal solutions. The results were satisfactory, reaching the optimality for some instances, with reduced processing time for all of them.

**Keywords:** Generation of Cutting Patterns; Genetic Algorithms; Heuristics;

## 1. Introdução

Os problemas de geração de padrões de corte bidimensionais são um importante segmento da otimização combinatória com forte representatividade em diversos setores da indústria como, por exemplo os setores moveleiro, têxtil, de produção de vidro e papel. Tais problemas podem ser formulados como um Problema da Mochila Bidimensional, cujo objetivo consiste em encontrar o melhor arranjo de itens a ser cortado a partir de um objeto, a fim de que sejam minimizadas as sobras e conseqüentemente o custo com material.

Em relação aos aspectos teóricos, os problemas de corte e empacotamento constituem uma das classes mais estudadas em otimização combinatória, tendo como marco introdutório a abordagem proposta por Gilmore e Gomory, em 1961, cujo trabalho consistia basicamente em determinar a melhor maneira de cortar peças maiores, de tamanho e quantidade conhecidos, para a obtenção de peças menores, de forma a atender a uma demanda com dimensões e quantidade especificados, respeitando-se determinadas restrições e minimizando as perdas ou maximizando a utilização do objeto (TEMPONI, 2007).

Em virtude de se tratar de problemas de natureza *np-hard*, o tempo computacional exigido pelos métodos de solução exatos é elevado. Neste contexto, métodos heurísticos e meta-heurísticos são requeridos a fim de equilibrar a qualidade das soluções como o tempo de processamento.

Neste sentido, o presente trabalho propõe uma metodologia para a geração de padrões de corte bidimensionais, que emprega a meta-heurística Algoritmos Genéticos associada a duas técnicas distintas de encaixe para a geração de padrões de corte. A abordagem proposta foi avaliada sobre instâncias clássicas encontradas na literatura, e comparada com os resultados ótimos conhecidos.

O artigo está dividido em 5 seções. A seção 2 apresenta formalmente o problema da geração de padrões de corte bidimensionais e uma revisão literária sobre estratégias para sua resolução. A seção 3 apresenta a metodologia proposta, enquanto a seção 4 apresenta resultados obtidos e as discussões. A quinta seção tece as considerações finais do artigo.

## 2. Descrição do Problema e Revisão de Literatura

Esta seção apresenta uma definição dos problemas de corte e empacotamento, abordando formalmente o problema de geração de padrões de corte bidimensionais. Na seqüência são apresentados estudos já realizados para a resolução do problema de geração de padrões de corte, empregando procedimentos exatos, heurísticos e meta-heurísticos.

### 2.1. Os Problemas de Corte e Empacotamento: Padrões de corte, tipologia e variações

Os Problemas de Corte e Empacotamento consistem em determinar a melhor forma de se cortar um conjunto de placas, doravante denominados **objetos**, de tamanho e quantidade conhecidos, para a obtenção de peças menores, ou simplesmente **itens**, com tamanho e quantidade também conhecidos, respeitando-se determinadas restrições e minimizando as perdas ou maximizando a utilização da material.

Um padrão de corte corresponde ao arranjo geométrico dos itens a serem cortados a partir de um objeto, isto é, à forma como os objetos serão cortados para produzir itens menores. Para que o padrão de corte seja considerado factível, os itens devem ser dispostos de modo que não haja sobreposição e que não sejam excedidas as dimensões do objeto.

Dessa forma, a um padrão de corte  $j$ , pode ser associado um vetor  $A_j \in Z_+^n$ , no qual cada componente  $a_{ij}$  representa a quantidade de cada tipo de item  $i$  a ser cortada nesse padrão  $j$ . Os retângulos gerados após a aplicação do plano de corte em um objeto e que não possuem representação em seu vetor associado são chamados de sobra, e descartados no processo produtivo.

Do ponto de vista operacional, algumas características podem ser consideradas para garantir a viabilidade de execução da solução teórica encontrada para o padrão de corte e para a avaliação da qualidade do mesmo, como o tipo de corte, o número de estágios do padrão e a

possibilidade de rotação dos itens.

Uma importante restrição relaciona-se ao corte guilhotinado. Tais cortes se prolongam por toda a extensão do objeto, dividindo-o em dois novos objetos de tamanho menor que o original, que podem ou não ser novamente divididos por um novo corte guilhotinado. A obtenção de um padrão de corte guilhotinado deriva de uma seqüência de cortes guilhotinados aplicada ao objeto original e aos itens obtidos a cada corte. As figuras 1(a) e 1(b) mostram padrões de corte guilhotinados e não guilhotinados, respectivamente.

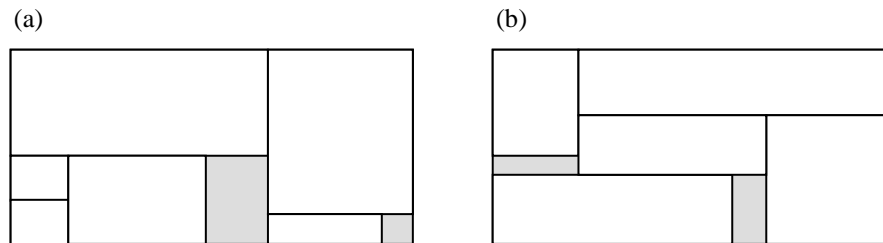


FIGURA 1 – Tipos de corte

Em um padrão de corte guilhotinado ocorrem mudanças ortogonais na direção do corte. Cada seqüência de cortes realizada na mesma direção corresponde a um estágio de corte. No primeiro estágio efetua-se um corte paralelo a um dos lados do objeto, ao passo que no segundo estágio, o corte realizado é perpendicular ao anterior, e assim sucessivamente. A cada mudança na direção do corte, incrementa-se uma unidade na quantidade de estágios. Um problema de corte estagiado possui quantidade  $k$  limitada de estágios, definindo um padrão de corte  $k$ -estágios. Na figura 2 é apresentado um padrão de corte em 4 estágios.

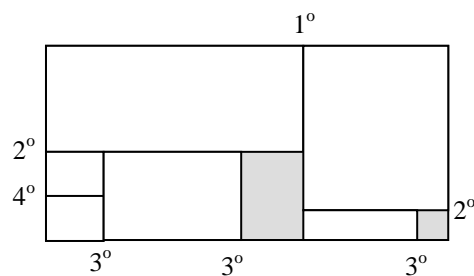


FIGURA 2 – Corte estagiado

Como a cada estágio é realizada uma mudança ortogonal de direção do corte, quanto mais estágios o padrão de corte apresentar, maior será o tempo necessário para o operador rotacionar o objeto a ser cortado. Por este motivo uma importante categoria de padrões de corte guilhotinados são os padrões de corte 2-estágios. Estes estão presentes abundantemente nas indústrias, por sua alta eficiência operacional. Entretanto, é notório o baixo aproveitamento dos objetos quando comparados a padrões que não apresentam esta restrição.

Por fim, outra particularidade considerada na geração de um padrão de corte é a possibilidade de rotação dos itens. Alguns materiais possuem características que determinam e restringem a orientação do corte, como no caso das fibras da madeira ou estampas de tecidos, o que também reduz o aproveitamento do material.

## 2. O problema de geração de padrões de corte bidimensionais

Dado um objeto de dimensões  $L \times W$ , onde  $L$  e  $W$  denotam o comprimento e a largura, respectivamente, a geração de um padrão de corte consiste em determinar a melhor maneira de cortar tal objeto de modo a obter um conjunto  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  de  $n$  tipos de itens menores, de dimensões  $l_i \times w_i$  e quantidade máxima  $d_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ , e otimizar uma função objetivo de interesse, como, por exemplo, minimizar a perda de material, isto é, a área

não utilizada. Este problema pode ser considerado um problema da mochila bidimensional, onde  $a_{ij}$  define a quantidade do item  $i$  a ser cortada no padrão  $j$ , podendo ser modelado como:

$$\text{Minimizar } LW - \sum_{i=1}^n a_{ij} l_i w_i \quad (1)$$

Sujeito a:  $0 \leq a_{ij} \leq d_i$  e inteiro, para  $i = 1, \dots, n$

de forma que seja possível alocar os itens no objeto sem exceder as dimensões do mesmo e sem sobreposições.

## 2.2. Abordagens para resolução do problema de geração de padrões de corte bidimensionais

Por se tratar de um problema *np-hard*, e devido à sua complexidade de solução, muitos foram os estudos feitos no sentido de solucionar o problema da geração de padrões de corte bidimensionais, o que acarretou uma vasta pesquisa, contemplando métodos exatos, heurísticos e meta-heurísticos.

Os estudos sobre os problemas de corte e empacotamento foram iniciados por Gilmore e Gomory (1961), quando trataram a geração de padrões de corte unidimensionais através da resolução de um problema da mochila. Posteriormente, tal abordagem foi estendida a problemas de duas e três dimensões (GILMORE, GOMORY, 1964).

Herz (1972) propôs uma solução exata para geração de padrões de corte bidimensionais através de uma técnica de árvore recursiva. Para limitar as ramificações que serão percorridas, o autor criou o conceito de *pontos de discretização*. Beasley (1985) tratou do problema através de programação dinâmica utilizando também os pontos de discretização de Herz, e criou uma fórmula recursiva, alcançando resultados ótimos para as instâncias testadas.

A técnica de programação dinâmica para a geração de padrões de corte foi ainda utilizada por Cintra (2008), que abordou a geração dos padrões como um problema da mochila bidimensional, utilizando a fórmula recursiva de Beasley para o corte em dois estágios e uma outra fórmula recursiva para o corte em quatro estágios. O método foi testado para as mesmas instâncias do trabalho de Beasley (1985), cujas soluções ótimas são conhecidas, e também para instâncias maiores com solução ótima desconhecida. Os resultados computacionais foram altamente satisfatórios, visto que o método alcançou a solução ótima nos casos em que esta era conhecida, e obteve padrões de corte com perda significativamente pequena para as instâncias maiores, com substancial redução do tempo de processamento.

Wang (1982) propôs um método combinatório que gera padrões de corte através de sucessivas combinações verticais e horizontais de semi-soluções já geradas. Melhorias para o algoritmo de Wang foram propostas por Vasko (1988), Oliveira e Ferreira (1990), Daza *et al* (1995) e Amaral e Wright (2001). Estes últimos fizeram uma consideração simples, no entanto relevante: mostraram que combinações verticais e horizontais simultâneas, aliadas à rotação dos itens, são operações redundantes, bastando apenas um tipo de construção com possibilidade de rotação para que sejam obtidas todas as possibilidades de combinação, o que reduz em grande magnitude o tempo de processamento.

Métodos heurísticos para a geração de padrões de corte bidimensionais podem ser encontrados nos trabalhos de Morabito (1995), Fritsch e Vornberger (1995) e Christofides e Hadjiconstantinou (1995). Temponi (2007) também sintetiza três procedimentos de encaixe dos itens, que são as heurísticas *Next Fit*, *First Fit* e *Best Fit*.

As meta-heurísticas também apresentam grande aplicabilidade na resolução de problemas *np-completos*, nos quais incluem-se os problemas de corte e empacotamento. Diferentes abordagens, utilizando meta-heurísticas distintas alcançaram bons resultados, com tempo computacional reduzido em relação aos métodos exatos. Hopper e Turton (2001) compilaram os estudos acerca da utilização de meta-heurísticas para a solução do problema de

corte bidimensional. Destacam-se, neste sentido, os Algoritmos Genéticos (SMITH, 1985) (RAHMANI, 1995), Busca Tabu (ALVAREZ-VALDES, 2002), *Simulated Annealing* (DOWSLAND, 1993) e GRASP (TEMPONI, 2007).

### 3. Estratégia de Resolução

Com o objetivo de encontrar o melhor padrão de corte, ou seja, obter o conjunto de itens que maximize o aproveitamento do objeto, o problema foi resolvido através de uma metodologia dividida em duas fases: na primeira utilizou-se um algoritmo genético para selecionar os itens que irão formar o padrão de corte. Na segunda fase, aplicou-se uma técnica de encaixe aos itens agrupados na primeira fase a fim de determinar qual dos subconjuntos de itens constitui efetivamente um padrão de corte, e seu respectivo arranjo geométrico.

Considerou-se neste estudo a geração de padrões de corte guilhotinados não-estagiados e em dois estágios. Para cada um destes casos, considerou-se ainda a permissão de rotação dos itens. Deste modo, ao todo foram avaliados quatro tipos de padrão de corte, sendo que os cortes não-estagiados e em dois estágios receberam técnicas de encaixe distintas.

Os dados de entrada para o algoritmo compreendem as dimensões do objeto, altura  $L$  e comprimento  $W$ , a quantidade de tipos de itens  $n$  e as informações relacionadas a cada um deles, altura  $l_i$ , comprimento  $w_i$  e quantidade máxima  $d_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

#### 3.1. Primeira Etapa: Seleção dos Itens

A definição da estrutura e codificação dos cromossomos e o método de avaliação dos mesmos consistem importantes fatores na implementação de um Algoritmo Genético. A geração da população inicial, na maioria dos trabalhos desta área, é feita de forma simples, através de uma escolha aleatória independente para cada indivíduo. A codificação dos cromossomos e o tamanho da população inicial dependem do tipo de problema tratado e da estrutura de solução desejada.

Neste trabalho, cada cromossomo representa um padrão de corte  $j$ , denotado por um vetor  $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ , no qual cada componente  $a_{ij}$  representa a quantidade do item do tipo  $i$  a ser cortada no padrão  $j$ . A geração da população inicial foi feita da seguinte forma: para obter um indivíduo, optou-se por gerar um número aleatório para cada posição do vetor que o representa. O limite superior para cada posição é o valor mínimo entre a quantidade máxima correspondente ao tipo de item da referida posição e a quantidade que o objeto comporta deste tipo de item, determinada segundo suas áreas. Ao fim da geração de cada cromossomo, o mesmo é avaliado de acordo com a função de aptidão  $f_j$  apresentada em (2), que mede a perda absoluta do objeto, sendo  $LW$  a área do objeto a ser cortado, enquanto  $l_i$  e  $w_i$  denotam o comprimento e a altura, respectivamente, do item do tipo  $i$ .

$$f_j = LW - \sum_{i=1}^n a_{ij} l_i w_i \quad (2)$$

Se  $f_j \geq 0$ , o cromossomo é considerado factível e inserido na população; caso contrário, a soma da área dos itens excede a área do objeto, e então o cromossomo é considerado infactível. Em caso de infactibilidade, uma das posições do cromossomo com valor não-nulo é sorteada aleatoriamente e então decrescida de uma unidade. Este recurso é utilizado até que o indivíduo se torne factível. Após completar o número de indivíduos da população, os indivíduos são ordenados numa lista crescente em relação à função de aptidão.

Na fase de seleção, utilizou-se o método da roleta, que emprega a seleção proporcional à qualidade do indivíduo, isto é, à sua função de avaliação. A probabilidade de seleção de cada indivíduo  $j$  é dada pela fórmula (3), em que  $f_j$  representa o *fitness* do indivíduo  $j$ .

$$p_j = \frac{f_j}{\sum_{k=1}^n f_k} \quad (3)$$

Desta forma, cada indivíduo recebe uma porção da roleta, que é então ‘rodada’ a fim de selecionar os pais. Durante a implementação do método, cria-se uma lista ordenada de forma decrescente das probabilidades acumuladas de cada indivíduo, e sorteia-se um número aleatório entre 0 e 1, que indicará na lista das probabilidades qual o indivíduo escolhido.

Aos indivíduos selecionados, aplicam-se os operadores genéticos, cada um com uma determinada taxa de ocorrência, responsáveis pelas modificações na população e, conseqüentemente, pela convergência do algoritmo. Existem diversos operadores genéticos e variações dos mesmos, que diferem principalmente em virtude do tipo de codificação escolhido, visto que atuam diretamente sobre os cromossomos. Neste trabalho, foram utilizados os operadores de reprodução, cruzamento e mutação. Na reprodução, um cromossomo é copiado para a próxima geração; no cruzamento, dois cromossomos trocam informações genéticas para a formação de novos cromossomos; e na mutação é realizada a alteração em um gene do cromossomo.

Para o algoritmo genético empregou-se a estratégia *Steady State*, que favorece a dominação das melhores soluções e uma convergência rápida do método. No entanto, esta estratégia pode permitir também que ocorra a perda prematura de diversidade na população, e por isto a taxa de ocorrência do operador de mutação deve ser convenientemente escolhida para proporcionar a garantia de diversidade. O algoritmo genético empregado na primeira etapa está apresentado a seguir.

**Passo 1:** Geração da população inicial

1.1 – Crie um indivíduo gerando, para cada posição  $i$ , um número aleatório no intervalo  $[0, \min\{d_i, \frac{LW}{l_i w_i}\}]$ .

1.2 – Calcule a função de aptidão

$$f_j = LW - \sum_{i=1}^n a_{ij} l_i w_i$$

para o indivíduo  $j$  obtido no Passo 1.1. Se o mesmo for factível, insira-o na população e vá para o Passo 1.4. Caso contrário,

1.3 – Escolha aleatoriamente uma posição do indivíduo com valor não-nulo e aplique um decremento de uma unidade em seu valor. Volte para o Passo 1.2.

1.4 – Se foram gerados todos os  $m$  indivíduos, pare a geração; senão volte para o Passo 1.

**Passo 2:** Avaliação da população: Crie uma lista ordenada dos indivíduos, em ordem crescente de *fitness*.

**Passo 3:** Seleção dos pais: Selecione dois indivíduos da população, pelo Método da Roleta.

**Passo 4:** Aplicação dos operadores genéticos

4.1 – Aplique o operador de cruzamento (ou reprodução) aos indivíduos selecionados no Passo 3.

4.2 – Aplique o operador de mutação a cada filho criado no Passo 4.1.

**Passo 5:** Avaliação dos novos indivíduos: Para cada novo cromossomo factível, verifique se seu valor de aptidão é menor que o do último indivíduo da lista; em caso positivo, substitua o pior indivíduo pelo novo, e ordene a lista.

**Passo 6:** Repita os passos 3 a 5 até que algum critério de parada seja atingido.

### 3.2. Etapa 2: Técnicas de Encaixe

Como pôde ser visto anteriormente, o Algoritmo Genético empregado percorre o espaço de busca à procura das melhores soluções considerando apenas o aspecto unidimensional, isto é, o conjunto de itens cuja soma das áreas mais se aproxime da área do objeto sem, contudo, excedê-la. Entretanto, apenas este critério não é suficiente para garantir a factibilidade de um padrão de corte, carecendo uma análise acerca da viabilidade de seu arranjo geométrico. Para construí-lo foram utilizadas duas técnicas de encaixe diferentes: uma para o corte não-estagiado e outra para o corte em dois estágios, dado a peculiaridade de suas geometrias.

A seqüência de encaixe segue a ordenação crescente do *fitness* dos indivíduos gerados na primeira etapa, e é realizada até que um arranjo geométrico factível seja obtido. Tal factibilidade compreende a possibilidade de arranjo de todos os itens, sem que excedam as dimensões do objeto ou se sobreponham.

### 3.2.1. Corte não-estagiado

Para os padrões de corte sem restrição quanto ao número de estágios de corte, empregou-se uma técnica baseada no algoritmo de Wang (1982) que realiza, a cada iteração, construções verticais e horizontais dos itens.

Uma combinação horizontal de dois itens  $A_1$  e  $A_2$ , de dimensões  $l_1 \times w_1$  e  $l_2 \times w_2$ , respectivamente, corresponde a um novo item, cujas dimensões serão  $\max\{l_1, l_2\} \times (w_1 + w_2)$ . Analogamente, uma construção vertical dos dois mesmos itens é um novo item de dimensões  $(l_1 + l_2) \times \max\{w_1, w_2\}$ . A área da construção que não for ocupada por nenhum dos itens corresponde à perda interna da mesma.

Uma construção cujas dimensões não excedam a dimensão do objeto, que não possua uma perda interna maior que um valor máximo estabelecido definido por  $\beta$ , que neste trabalho corresponde à perda absoluta do padrão definida pelo *fitness* de cada cromossomo, e ainda na qual a soma das quantidades de cada tipo de item não exceda a quantidade deste tipo de item presente no padrão, caracteriza uma semi-solução. A cada iteração, as semi-soluções são novamente combinadas entre si através de construções verticais e horizontais. Se uma nova construção apresenta as mesmas dimensões de uma construção já existente, descarta-se a de maior perda interna. O algoritmo completo é detalhado a seguir, sendo  $L \times W$  as dimensões do objeto,  $R = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  os tipos de itens e  $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  suas respectivas quantidades máximas de cada um deles.

#### Inicialização do método:

Crie  $A$ , que é o conjunto dos  $m$  vetores provenientes da Etapa 1, dispostos em ordem crescente de *fitness*. Selecione  $j = 1$ .

**Passo 1.a:** Determine  $\beta = f_j$

**1.b:** Defina  $L^{(0)} = F^{(0)} = R$  e faça  $k = 1$ .

**Passo 2.a:** Construa  $F^{(k)}$ , que é o conjunto de todos os retângulos  $T$  satisfazendo:

- (i)  $T$  é uma construção horizontal ou vertical formada por dois retângulos de  $L^{(k-1)}$ ;
- (ii) A perda interna de  $T$  não excede a  $\beta$ ;
- (iii) Os retângulos que aparecem em  $T$  não excedem as quantidades  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ .

**2.b:** Faça  $L^{(k)} = L^{(k-1)} \cup F^{(k)}$ . Remova os retângulos equivalentes de  $L^{(k)}$ .

**2.c:** Se todos os itens do vetor  $A_j$  foram alocados, pare.  $A_j$  é o melhor padrão de corte encontrado .

**Passo 3:** Se  $F^{(k)}$  é não vazio, faça  $k = k + 1$  e vá para o Passo 2. Senão,

**Passo 4:** Faça  $j = j + 1$  e volte para o Passo 1.

Para o corte com possibilidade de rotação, acrescentou-se ao algoritmo de Wang as considerações feitas por Amaral e Wright (2001), que mostraram que a rotação dos itens, aplicada concomitantemente com construções horizontais e verticais constitui uma prática redundante, como já comentado. Esta consideração simples reduz em pelo menos a metade a quantidade de semi-soluções enviadas para a próxima iteração, reduzindo o tempo de processamento gasto pelo procedimento de encaixe.

Deste modo, criou-se um conjunto de itens  $R = \{R_1, R_2, \dots, R_n, R_1', R_2', \dots, R_n'\}$ , em que  $R_n'$  corresponde ao retângulo  $R_n$  após a rotação em  $90^\circ$ . Cabe destacar, no entanto, que  $R_n$  e  $R_n'$  possuem a mesma quantidade máxima. Neste trabalho optou-se por utilizar apenas as construções horizontais. O algoritmo de Wang (1982) adaptado para o encaixe dos itens no caso do corte não-estagiado com possibilidade de rotação é apresentado na sequencia.

#### Inicialização do método:

Crie  $A$ , que é o conjunto dos  $m$  vetores provenientes da Etapa 1, dispostos em ordem crescente de *fitness*, e rotule todos os seus elementos como não-analisados. Selecione  $j = 1$ .

**Passo 1.a:** Determine  $\beta = f_j$

**1.b:** Defina  $L^{(0)} = F^{(0)} = R$  e faça  $k = 1$ .

**Passo 2.a:** Construa  $F^{(k)}$ , que é o conjunto de todos os retângulos  $T$  satisfazendo:

- (i)  $T$  é uma construção horizontal formada por dois retângulos de  $L^{(k-1)}$ ;
- (ii) A perda interna de  $T$  não excede a  $\beta$ ;
- (iii) Os retângulos que aparecem em  $T$  não excedem as quantidades  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ .

**2.b:** Faça  $L^{(k)} = L^{(k-1)} \cup F^{(k)} \cup (F^{(k)})'$ , em que  $(F^{(k)})'$  representa as semi-soluções de  $F^{(k)}$  rotacionadas em  $90^\circ$ . Remova os retângulos equivalentes de  $L^{(k)}$ .

**2.c:** Se todos os itens do vetor  $A_j$  foram alocados, pare.  $A_j$  é o melhor padrão de corte encontrado.

**Passo 3:** Se  $F^{(k)}$  é não vazio, faça  $k = k + 1$  e vá para o Passo 2. Senão,

**Passo 4:** Faça  $j = j + 1$  e volte para o Passo 1.

### 3.2.2. Corte em dois estágios

No corte em dois estágios, utilizou-se a heurística construtiva *First Fit Decreasing Height*, que cria faixas inserindo os itens na primeira faixa em que eles possam ser alocados. Criou-se inicialmente uma lista dos tipos de itens do conjunto  $R = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ , ordenados de forma decrescente em relação à sua altura. Caso seja permitida a rotação dos itens, cria-se um retângulo correspondente  $R_i'$  para cada retângulo  $R_i$ , rotacionado em  $90^\circ$ . Neste caso, cada item aparece duas vezes na lista: um em sua orientação original e outro após a rotação.

Inicia-se o algoritmo introduzindo o primeiro item da lista a ser cortado no padrão, o de maior altura, no canto inferior esquerdo do objeto. Em seguida insere-se o item subsequente à direita do anterior. Quando a dimensão horizontal do objeto não mais for suficiente para acomodar itens, cria-se uma nova faixa acima da existente. A partir do momento em que existir mais de uma faixa horizontal, os novos itens devem ser alocados na primeira faixa existente que os comportar; e uma nova faixa é criada quando isto não for possível. O algoritmo *First Fit Decreasing Height*, utilizado como técnica de encaixe para o corte em dois estágios, é apresentado a seguir.

#### Inicialização do método:

Crie a lista  $L$ , dos elementos do conjunto  $R$  ordenados em relação à sua altura; e crie o conjunto  $A$  dos  $m$  vetores provenientes da Etapa 1

**Passo 1:** Selecione  $j = 1$

**Passo 2:** Insira o primeiro retângulo  $i$  de  $L$  para o qual  $a_{ij} > 0$  no canto inferior esquerdo do objeto, estabelecendo a primeira faixa, e faça  $a_{ij} = a_{ij} - 1$ .

**Passo 3:** Para  $i = 1, \dots, n$ , enquanto  $a_{ij} > 0$ , verifique a possibilidade de inserir o item  $i$ :

**3.a:** Procure a primeira faixa que acomode o item  $i$ , insira-o e faça  $a_{ij} = a_{ij} - 1$ . Se isto não for possível,

**3.b:** Crie uma nova faixa, insira o item  $i$  e faça  $a_{ij} = a_{ij} - 1$  e vá para o Passo 5. Se isto não for possível,

**Passo 4:** Faça  $j = j + 1$  e volte para o Passo 2.

**Passo 5:** Retorne  $A_j$  como o melhor padrão de corte encontrado.

## 4. Resultados e Discussões

Os parâmetros utilizados no algoritmo genético da etapa 1 foram escolhidos após uma sequência de testes. O tamanho da população foi fixado em 200 indivíduos, o que possibilita uma grande diversidade na mesma. As taxas dos operadores genéticos foram mantidas em 80% para o operador de cruzamento 20% para o operador de mutação, o que evita que a população perca a diversidade. Foram considerados no trabalho dois diferentes critérios de parada: um número máximo de iterações, fixado em 100; e um número máximo de iterações sem a ocorrência da inserção dos filhos na população, fixado em 50, isto é, quando não ocorre melhoria na solução durante 50 iterações.

Os testes foram realizados para um conjunto de 12 instâncias propostas por Beasley (1985) e comparados com Cintra (2008), que obteve a solução ótima para todas elas com tempo de processamento praticamente nulo. As características das instâncias são apresentadas na tabela 1. A primeira coluna contém o nome da instância, a segunda as dimensões do objeto e a terceira a quantidade de tipos de itens.



TABELA 1 – Descrição das instâncias

<b>Instância</b>	<b><math>L \times W</math></b>	<b><math>n</math></b>
<i>gcut1</i>	(250,250)	10
<i>gcut2</i>	(250,250)	20
<i>gcut3</i>	(250,250)	30
<i>gcut4</i>	(250,250)	50
<i>gcut5</i>	(500,500)	10
<i>gcut6</i>	(500,500)	20
<i>gcut7</i>	(500,500)	30
<i>gcut8</i>	(500,500)	50
<i>gcut9</i>	(1000,1000)	10
<i>gcut10</i>	(1000,1000)	20
<i>gcut11</i>	(1000,1000)	30
<i>gcut12</i>	(1000,1000)	50

Como mencionado anteriormente, foram consideradas quatro diferentes abordagens para a geração de padrões de corte, assim denominadas: NEsR para cortes não-estagiados sem rotação, NEcR para cortes não-estagiados com rotação, 2EsR para cortes em dois estágios sem rotação e 2EcR para cortes em dois estágio com a possibilidade de rotação dos itens.

Os testes foram executados em um computador com processador Intel Core™2 Duo, 1.83 GHz com 3 GB de memória, sistema operacional Windows Seven, e os algoritmos foram implementados na linguagem computacional Visual Basic 6.0. A tabela 2 apresenta os resultados obtidos para o conjunto de instâncias testadas, com cada uma das quatro abordagens comparadas aos resultados obtidos por Cintra (2008), que aborda o corte em dois e quatro estágios. A denominação para as abordagens do referido autor foram assim determinadas: C1 e C2 para o corte não-estagiado sem e com rotação, respectivamente; e C3 e C4 para o corte em dois estágios sem e com rotação, respectivamente.

Tabela 2 – Resultados obtidos

<b>Instância</b>	<b>NEsR</b>		<b>NEcR</b>		<b>2EsR</b>		<b>2EcR</b>	
	<b>C1</b>	<b>Proposto</b>	<b>C2</b>	<b>Proposto</b>	<b>C3</b>	<b>Proposto</b>	<b>C4</b>	<b>Proposto</b>
<i>gcut1</i>	90,33	90,33	93,01	93,01	90,33	86,09	93,01	89,66
<i>gcut2</i>	96,56	95,16	96,97	95,16	96,12	92,05	96,97	93,24
<i>gcut3</i>	97,65	93,73	98,60	95,23	96,21	92,60	96,77	92,60
<i>gcut4</i>	98,71	96,67	99,62	97,68	98,71	95,14	99,62	95,39
<i>gcut5</i>	98,4	98,4	98,4	98,4	98,4	98,4	98,4	98,4
<i>gcut6</i>	95,59	90,30	96,38	95,59	94,02	89,05	96,38	94,46
<i>gcut7</i>	97,02	94,21	98,34	96,02	97,02	94,21	98,34	94,21
<i>gcut8</i>	98,65	94,70	99,11	96,78	98,30	94,70	98,90	94,70
<i>gcut9</i>	97,11	97,11	97,11	97,11	97,11	97,11	97,11	97,11
<i>gcut10</i>	98,20	93,49	98,21	96,62	98,20	93,48	98,21	94,83
<i>gcut11</i>	98,00	95,80	98,00	97,46	97,46	93,94	98,00	97,46
<i>gcut12</i>	97,99	96,04	98,86	97,85	97,77	92,43	98,86	97,85
<b>MÉDIA</b>	97,02	94,66	97,72	96,41	96,64	93,27	97,55	94,99

A tabela 3 apresenta os resultados em termos relativos às soluções ótimas conhecidas. Valores iguais à 100% indicam que o método proposto atingiu a solução ótima. valores inferiores a 100% representam a diferença relativa entre o resultado obtido pelo método proposto e a solução ótima conhecida.

TABELA 3 – Aproximação dos resultados às soluções ótimas

Instância	NEsR	NEcR	2EsR	2EcR
<i>gcut1</i>	100%	100%	95%	96%
<i>gcut2</i>	99%	98%	96%	96%
<i>gcut3</i>	96%	97%	96%	95%
<i>gcut4</i>	98%	98%	96%	96%
<i>gcut5</i>	100%	100%	100%	100%
<i>gcut6</i>	94%	99%	95%	98%
<i>gcut7</i>	97%	98%	97%	95%
<i>gcut8</i>	96%	98%	96%	96%
<i>gcut9</i>	100%	100%	100%	100%
<i>gcut10</i>	95%	98%	95%	97%
<i>gcut11</i>	98%	99%	96%	99%
<i>gcut12</i>	98%	99%	95%	99%
<b>MÉDIA</b>	98%	99%	96%	97%

Obteve-se neste trabalho a solução ótima para o corte não estagiado com e sem rotação para a instância *gcut1*. Para as instancias *gcut5* e *gcut9* obteve-se solução ótima para as quatro abordagens consideradas. O resultado médio foi 2% inferior ao ótimo para o corte não-estagiado sem rotação, e 1% inferior para o corte não-estagiado com rotação (98% e 99% da média das soluções ótimas, respectivamente). Para o caso do corte em dois estágios o resultado médio foi 4% e 3% inferior à média das soluções ótimas nos casos sem e com rotação, respectivamente. O tempo de processamento para todas as instâncias foi inferior a 1 segundo para o corte em dois estágios enquanto que para o corte não estagiado a resolução de todas as instâncias não ultrapassou 2 segundos.

Cabe destacar que o fato dos valores relativos para o corte sem possibilidade de rotação serem superiores ao corte com rotação dos itens (*gcut2* para corte não estagiado, *gcut3* e *gcut7* para corte em dois estágios) não implica num desempenho superior do corte sem possibilidade de rotação em relação ao corte com rotação em termos absolutos. Tais valores apontam que a aproximação à solução ótima foi maior para o caso em que a rotação dos itens não foi permitida, dado que a solução ótima difere entre as quatro abordagens (conforme indicado na tabela 1). A respeito do tempo de processamento, não houve registro maior que 2 segundos para o corte não-estagiado, sem e com rotação e próximo de zero para o corte em dois estágios com e sem rotação.

Por fim, salienta-se que a implementação do algoritmo também gera o arranjo geométrico dos itens. As figuras 3(a) e 3(b) ilustram, respectivamente, solução para a a instancia *gcut10* nas abordagens NEsR e NEcR. Já as figuras 4(a) e 4(b), ilustram o resultado gráfico para a mesma instância, nas abordagens 2EsR e 2EcR, respectivamente.

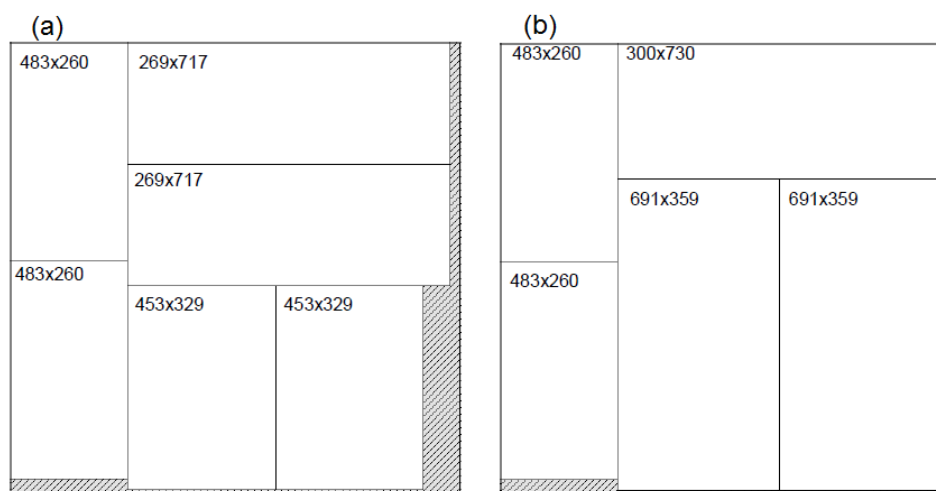


FIGURA 3 – Solução gráfica da instância *gcut10* para o corte não-estagiado: (a) sem rotação (NEsR); (b) com rotação (NEcR)

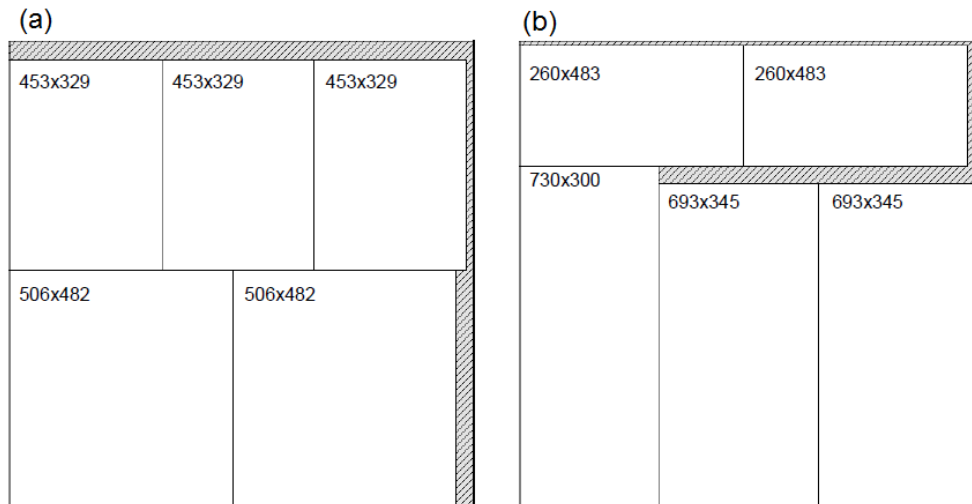


FIGURA 4 – Solução gráfica da instância *gcut10* para o corte em dois estágios: (a) sem rotação (2EsR); (b) com rotação (2EcR)

As figuras 5(a) e 5(b) demonstram o efeito da rotação em relação à solução obtida para o corte não-estagiado e o corte em dois estágios, respectivamente. A rotação dos itens possibilita um maior aproveitamento do objeto como esperado, dado que existe uma quantidade maior de arranjos possíveis para a composição do padrão de corte.

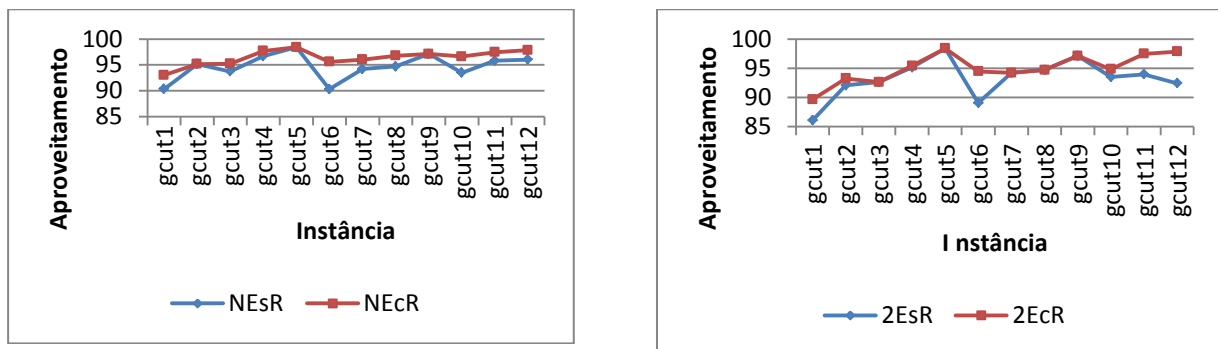


FIGURA 6 – Efeito da rotação aproveitamento do objeto: (a) Corte não-estagiado; (b) Corte em dois estágios.

## 5. Considerações Finais

Este trabalho apresenta uma proposta para a geração de padrões de corte bidimensionais guilhotinados, considerando o corte não-estagiado e em dois estágios, e ainda a possibilidade de rotação dos itens.

Propôs-se um método de resolução do problema em duas etapas. Na primeira delas, geram-se os agrupamentos de itens através de um Algoritmo Genético. Na segunda etapa, aplicam-se técnicas de encaixe a fim de encontrar qual dos agrupamentos constitui o melhor padrão de corte.

Para o corte não-estagiado, utilizou-se uma técnica de encaixe baseada no algoritmo de Wang (1982), que cria semi-soluções através de sucessivas construções horizontais e verticais dos itens, podendo ainda considerar a rotação dos mesmos. Para o corte em dois estágios, foi utilizada a heurística construtiva *First Fit Decreasing Height*, que aloca os itens no objeto estabelecendo faixas, que são a característica determinante deste tipo de corte.

Os testes computacionais realizados forneceram bons resultados para o problema, com baixo custo computacional. O algoritmo genético implementado mostrou-se capaz de gerar bons padrões de corte, visto que cria grupamentos de itens a serem submetidos às técnicas de encaixe, o que reduz o tempo de processamento gasto por elas, especialmente para o corte não-estagiado, no qual a quantidade de possibilidades de encaixe aumenta

exponencialmente em relação à quantidade de itens.

Por fim, deve-se salientar que o sistema computacional desenvolvido apresenta grande usabilidade, devido à representação gráfica da solução final, cujo procedimento está incluído no tempo computacional apresentado.

## Referências

**Alvarez-Valdes, R., Parajon, A. e Tamarit, J. M.** (2002), A tabu search algorithm for large-scale guillotine (un)constrained two-dimensional cutting problems, *Computer & Operations Research*, 29, 925-947.

**Amaral, A. R. S. e Wright, M.** (2001), Efficient algorithm for the constrained two-dimensional cutting stock problem, *International Transactions in Operational Research*, 8, 3-13.

**Beasley, J. E.** (1985), Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting, *Journal of the Operational Research Society*, 36, 297-306.

**Cintra, G. F., Miyazawa, F. K, Wakabayashi, Y. e Xavier, E. C.** (2008), Algorithms for two-dimensional cutting stock and strip packing problems using dynamic programming and column generation, *European Journal of Operational Research*, 191, 61-85.

**Christofides, N. e Hadjiconstantinou, E.** (1995), An exact algorithm for orthogonal 2-D cutting problems using guillotine cuts, *European Journal of Operational Research*, 83, 21-38.

**Daza, V. P., Alvarenga, A. G. e Diego, J.** (1995), Exact solutions for constrained two-dimensional cutting problems, *European Journal of Operational Research*, 83, 633-644.

**Dowland, K. A.** (1993), Some experiments with simulated annealing techniques for packing problems, *European Journal of Operational Research*, 68, 389-399.

**Fritsch, A. e Vorberger, O.** (1995), Cutting stock by iterated matching, *Proceedings of International Conference On Operations Research*, 92-97.

**Gilmore, P. e Gomory, R.** (1961), A linear programming approach to the cutting stock problem, *Operations Research*, 9, 849-859.

**Gilmore, P. e Gomory, R.** (1964), Multistage cutting stock problems of two and more dimensions, *Operations Research*, 14, 94-120.

**Herz, J.C.** (1972), Recursive Computational Procedure for Two-Dimensional Stock Cutting, *IBM Journal of Research and Development*, 16, 462-469.

**Hopper, E. e Turton, B. C. H.** (2001), A review of the application of meta-heuristic algorithms to 2D strip packing problems, *Artificial Intelligence Review*, 16, 257-300.

**Morabito, R. e Arenales, M. N.** (1995), Performance of two heuristics for solving large scale two-dimensional guillotine cutting problems, *INFORS*, 33, 145-155.

**Oliveira, J. e Ferreira, J.** (1990), An improved version of Wang's algorithm for twodimensional cutting problems, *European Journal of Operational Research*, 44, 256-266.

**Rahmani, A. T. e Ono, N.** (1995), An evolutionary approach to two-dimensional guillotine cutting problem, *Proceedings of INTERNATIONAL CONFERENCE ON EVOLUTIONARY COMPUTATION*, 148-151.

**Smith, D.** (1985), Bin packing with adaptive search, *Proceedings of INTERNATIONAL CONFERENCE ON GENETIC ALGORITHMS AND THEIR APPLICATIONS*, 202-206.

**Temponi, E. C. C.** (2007), *Uma Proposta de Resolução do Problema de Corte Bidimensional via Abordagem Metaheurística*. 80 p. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional) - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

**Vasko, F. J.** (1989), A computational improvement to Wang's two-dimensional cutting stock algorithm, *Computers and Industrial Engineering*, 16, 109-115.

**Wang, P. Y.** (1982), Two algorithms for constrained two-dimensional cutting stock problems, *Operations Research*, 31, 573-586.