REVISITANDO A GUERRA DA TRÍPLICE ALIANÇA ATRAVÉS DO USO DAS EQUAÇÕES DE LANCHESTER

Hélcio Vieira Junior
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Praça Marechal Eduardo Gomes 50, Vila das Acácias
12228-900 - São José dos Campos – SP
junior_hv@yahoo.com.br

Karl Heinz Kienitz
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Praça Marechal Eduardo Gomes 50, Vila das Acácias
12228-900 - São José dos Campos - SP
kienitz@ita.br

Mishel Carmen Neyra Belderrain
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Praça Marechal Eduardo Gomes 50, Vila das Acácias
12228-900 - São José dos Campos - SP
carmen@ita.br

RESUMO

A Guerra da Tríplice Aliança, também conhecida como Guerra do Paraguai, foi o maior conflito armado ocorrido na América do Sul. Este artigo analisa as principais batalhas da Guerra do Paraguai com o uso das equações de Lanchester.

A análise das batalhas de Tuiuti, Curuzu, Tomada de Humaitá, Itororó e Avaí mostrou que as forças paraguaias tinham, em quase todas as batalhas, um melhor adestramento que as forças da Tríplice Aliança. Apesar de serem mais bem adestradas, as forças paraguaias perderam todas essas batalhas. O motivo dessas derrotas, conforme concluído por Lanchester, confirmado pela nossa análise das principais batalhas da Guerra do Paraguai, e amplamente divulgado nas diversas academias militares em todo o mundo, foi a grande importância do princípio da massa.

ABSTRACT

The War of the Triple Alliance, also known as War of Paraguay, was the greatest armed conflict that took place in South America. This paper analyses the main battles of the War of Paraguay by using Lanchester equations.

The analysis of the battles of Tuiuti, Curuzu, Seize of Humaitá, Itororó and Avaí shows that, in almost all battles, the Paraguayan forces training program was better than the one of the Triple Alliance forces. Despite being better trained, the Paraguayan forces lost all these battles. The reason of these defeats, as concluded by Lanchester, confirmed by our analysis of the main battles of the Paraguay War, and widely divulged in several military academies worldwide, was the great importance of the mass principle.

Palavras Chave: Guerra do Paraguai, Leis de Lanchester, Militar.

1. INTRODUÇÃO

A Guerra da Tríplice Aliança, também conhecida como Guerra do Paraguai, foi o maior conflito armado ocorrido na América do Sul. Ela foi travada entre o Paraguai e a Tríplice Aliança (Brasil, Argentina e Uruguai). O presidente do Paraguai, Francisco Solano López, ordenou que o exército do Paraguai invadisse a província brasileira de Mato Grosso, dando inicio ao conflito em dezembro de 1864. O Brasil aliou-se à Argentina e ao Uruguai, formando a tríplice aliança, contra o Paraguai. O conflito encerrou-se em março de 1870 com cerca de 370 mil mortos entre militares e civis.

As causas da Guerra, segundo o historiador Doratioto [1, p. 95-96], foram as "contradições platinas, tendo como razão última a consolidação dos Estados nacionais na região. Essas contradições se cristalizaram em torno da Guerra Civil uruguaia, iniciada com o apoio do governo argentino aos sublevados, na qual o Brasil interveio e o Paraguai também. Contudo, isso não significa que o conflito fosse a única saída para o difícil quadro regional. A guerra era umas das opções possíveis, que acabou por se concretizar, uma vez que interessava a todos os Estados envolvidos. Seus governantes, tendo por bases informações parciais ou falsas do contexto platino e do inimigo em potencial, anteviram um conflito rápido, no qual seus objetivos seriam alcançados com o menor custo possível. Aqui não há 'bandidos' ou 'mocinhos', como quer o revisionismo infantil, mas sim interesses. A guerra era vista por diferentes ópticas: para Solano López era a oportunidade de colocar seu país como potência regional e ter acesso ao mar pelo porto de Montevidéu, graças a aliança com os blancos uruguaios e os federalistas argentinos, representados por Urquiza; para Bartolomeu Mitre era a forma de consolidar o Estado centralizado argentino, eliminando os apoios externos aos federalistas, proporcionando pelos blancos e por Solano López; para os blancos, o apoio militar paraguaio contra argentinos e brasileiros viabilizaria impedir que seus dois vizinhos continuassem a intervir no Uruguai; para o Império, a guerra contra o Paraguai não era esperada, nem desejada, mas, iniciada, pensou-se que a vitória brasileira seria rápida e poria fim ao litígio fronteiriço entre os dois países e às ameaças à livre navegação, e permitira depor Solano López … Dos erros de análise dos homens de Estado envolvidos nesses acontecimentos, o que maior consequência teve foi o de Solano López, pois seu país viu-se arrasado materialmente no final da guerra. E, recorde-se, foi ele o agressor, ao iniciar a guerra contra o Brasil e, em seguida, com a Argentina".

O objetivo deste artigo é a análise das principais batalhas da Guerra do Paraguai com o uso das equações de Lanchester.

O restante deste artigo é organizado da maneira que se segue. A próxima seção realizará uma revisão sobre as equações diferenciais propostas por Lanchester. As principais batalhas da Guerra do Paraguai serão analisadas na seção três e a seção quatro resumirá nossas conclusões.

2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE LANCHESTER

Frederick Lanchester foi um inventor britânico (construiu o primeiro automóvel inglês) que, durante a I Guerra Mundial, estudou o combate aéreo entre caças com o objetivo de investigar a importância da concentração de forças.

Lanchester [2] definiu as variáveis de estado como sendo o número de caças amigos e inimigos sobreviventes: $x(t)$ e $y(t)$. Ele então propôs o uso de equações diferenciais ordinárias (*ordinary differential equations* - ODE), nas quais a razão de mudança de cada variável de estado é proporcional ao valor da outra, para se calcular o valor das variáveis de estado em função do tempo. Matematicamente, tem-se que:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ay(t);\ \ x(t) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy(t)}{dt} = -bx(t);\ \ y(t) > 0 \tag{1}$$

A constante $a\,(b)$, chamada de coeficiente de atrito, representa o número de aeronaves amigas (inimigas) abatidas por cada aeronave inimiga (amiga) por unidade de tempo.

Washburn & Kress [10] provam que, dados os valores iniciais x_0 e y_0, o conjunto de ODE determina os valores futuros das variáveis de estado através da equação de estado dada por (2), cuja solução é descrita por (3) e (4).

$$b\left(x(t)^2 - x_0^2\right) = a\left(y(t)^2 - y_0^2\right) \tag{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\left(x_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}y_0\right)e^{t\sqrt{ab}} + \left(x_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}y_0\right)e^{-t\sqrt{ab}}\right) \tag{3}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(\left(y_0 - \sqrt{\frac{b}{a}}x_0\right)e^{t\sqrt{ab}} + \left(y_0 + \sqrt{\frac{b}{a}}y_0\right)e^{-t\sqrt{ab}}\right) \tag{4}$$

Este modelo é chamado de Lei dos Quadrados ou de Guerra Moderna e assume/requer as seguintes condições:

- Que as Forças sejam homogêneas;
- Que os Coeficientes de atrito sejam constantes;
- Que os combatentes possam mirar nos alvos;
- Que haja coordenação dos tiros.

Se definirmos a Força de Combate dos dois lados como sendo bx_0^2 e ay_0^2, o lado que tiver a maior força de combate será o vitorioso.

As equações de Lanchester têm sido utilizadas para descrever diversas guerras modernas, conforme pode ser observado por [2-7].

3. GUERRA DA TRÍPLICE ALIANÇA

Foram analisadas cinco das principais batalhas da Guerra do Paraguai. Fontes diversas apresentam diferentes efetivos iniciais e finais para as diversas batalhas desta guerra. Optamos por utilizar os dados estatísticos de [8], onde X_0, X_f, Y_0 e Y_f representam, respectivamente, os efetivos iniciais e finais da Tríplice Aliança e do Paraguai. O motivo da escolha foi esta fonte condensar, em um único lugar, todos os dados necessários para realizar a análise a que nos propusemos.

3.1. BATALHAS ANALISADAS

3.1.1. Batalha de Tuiuti

É uma das mais importantes batalhas desta guerra, sendo a maior e mais sangrenta travada na história da América do Sul. Ocorreu em 24 de maio de 1866 com decisiva vitória aliada.

Efetivos iniciais: $X_0 = 35000$, $Y_0 = 23350$

Efetivos finais: $X_f = 30954$, $Y_f = 11350$

3.1.2. Batalha de Curuzu

Após a batalha do Tuiuti, o comandante Mitre aproveitou as reservas de mais de dez mil homens e decidiu atacar as baterias do forte de Curuzu e do Forte de Curupaiti.

Efetivos iniciais: $X_0 = 14000$, $Y_0 = 2500$

Efetivos finais: $X_f = 13200$, $Y_f = 1700$

3.1.3. Tomada de Humaitá

A fortaleza de Humaitá controlava o acesso por via fluvial à capital paraguaia, constituindo-se no mais poderoso e temido complexo defensivo paraguaio.

Efetivos iniciais: $X_0 = 45000$, $Y_0 = 20000$

Efetivos finais: $X_f = 35000$, $Y_f = 15900$

3.1.4. Batalha de Itororó

Essa batalha ficou famosa devido ao grito de guerra do Marechal Duque de Caxias: "Sigam-me os que forem brasileiros".

Efetivos iniciais: $X_0 = 13000$, $Y_0 = 5000$

Efetivos finais: $X_f = 10000$, $Y_f = 3800$

3.1.5. Batalha de Avaí

Nessa batalha, as forças paraguaias foram envolvidas por um movimento de flanco e quase destroçadas por inteiro. A tradição oral paraguaia conta que houve a participação de centenas de mulheres entre os combatentes.

Efetivos iniciais: $X_0 = 17000$, $Y_0 = 4000$

Efetivos finais: $X_f = 16200$, $Y_f = 1000$

3.2. METODOLOGIA DO ESTUDO

Objetivando encontrar os coeficientes de atrito a e b, a formulação (5) foi resolvida com programação não linear. Observe que a função objetivo minimiza a diferença quadrática entre os valores estimados dos efetivos finais e os seus valores históricos.

$$
\begin{aligned}
&\underset{\theta}{Min}\left(\left(X_f - X_f^L\right)^2 + \left(Y_f - Y_f^L\right)^2\right) \\
&ST:\ X_f^L = \frac{1}{2}\left(\left(x_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}y_0\right)e^{t\sqrt{ab}} + \left(x_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}y_0\right)e^{-t\sqrt{ab}}\right) \\
&\qquad Y_f^L = \frac{1}{2}\left(\left(y_0 - \sqrt{\frac{b}{a}}x_0\right)e^{t\sqrt{ab}} + \left(y_0 + \sqrt{\frac{b}{a}}y_0\right)e^{-t\sqrt{ab}}\right) \\
&\qquad a,b,t \geq 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

A Batalha do Tuiuti foi a única batalha na qual se conseguiu obter a sua duração na literatura [9]. De posse da duração em horas t, a formulação (5) foi resolvida utilizando-se a plataforma GAMS com o otimizador não linear CoinIpopt. De posse dos coeficientes de atrito a e b dessa batalha, optamos aleatoriamente por fixar o valor de b da Batalha do Tuiuti e utilizar essa constante na resolução da formulação (5) para as demais batalhas. Com esse artifício, foi possível levantar os valores de a, b e t de todas as batalhas fazendo-se $\theta = \left(a \;\; b\right)$ em (5) para a Batalha do Tuiuti e $\theta = \left(a \;\; t\right)$ para as demais batalhas.

3.3. RESULTADOS

3.3.1. Coeficientes de Atrito

A Tabela 1 sumariza os resultados encontrados, onde as entradas em negrito representam os valores estimados através do uso da formulação (5). Observe que as diferenças entre os valores históricos e as suas estimativas são menores que 10^{-3}.

Tabela 1 – Sumário da Guerra da Tríplice Aliança explicada pela Lei dos Quadrados de Lanchester.

Batalha	X_0	Y_0	X_f		Y_f		**Coeficientes**			
			Real	Lanchester	Real	Lanchester	a	b	Tempo (horas)	Razão a/b
Tuiuti	35000	23350	30954	30954.000	11350	11350.000	***3.914e-2***	***6.108e-2***	6.000	0.641
Curuzu	14000	2500	13200	13200.000	1700	1700.000	***3.955e-1***	6.108e-2	***0.965***	6.475
Tomada de Humaitá	45000	20000	35000	35000.000	15900	15900.000	***3.320e-1***	6.108e-2	***1.686***	5.435
Itororó	13000	5000	10000	10000.000	3800	3800.000	***3.991e-1***	6.108e-2	***1.719***	6.534
Avaí	17000	4000	16200	16200.000	1000	1000.000	***1.081e-1***	6.108e-2	***2.973***	1.770

À exceção da Batalha do Tuiuti, as forças paraguaias demonstraram ter um melhor adestramento que as forças da Tríplice Aliança, como pode ser visto pela coluna *razão* a/b da Tabela 1. Apesar de serem mais bem adestradas, as forças paraguaias perderam todas essas batalhas. “O motivo disto é que a força de combate é proporcional ao quadrado do efetivo inicial, mas apenas à primeira potência do coeficiente de letalidade. Uma pequena força de excelentes combatentes pode perder um combate para uma grande força de combatentes ordinários” [10, p. 82]. Essa proporcionalidade ao quadrado do efetivo é o que motiva o nome do modelo ser Lei dos Quadrados.

Esta é uma explicação matemática para algo há muito sabido pelos grandes generais da antiguidade:

- “Dividir e conquistar”, do latim “divide et impera”, dito por Philipe II da Macedônica, pai de Alexandre, o Grande [11].
- “Deus está do lado dos grandes batalhões”, dito por Napoleão Bonaparte [12].
- “Superioridade dos números: isto é, na tática, assim como na estratégia, o princípio mais geral da vitória”, dito por Clausewitz [13].

3.3.2. Demais Resultados

O modelo proposto por Lanchester permite algumas análises. A batalha de Tuiuti foi analisada para exemplificar isso.

A Figura 1 ilustra o comportamento temporal das forças combatentes com os coeficientes da Tabela 1.

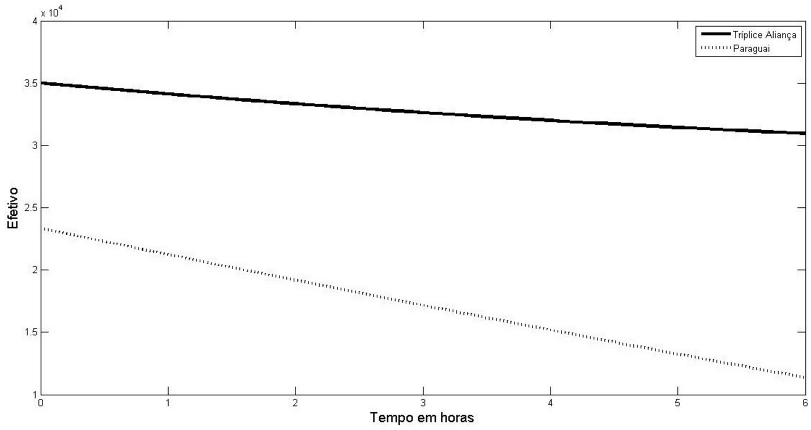

Figura 1 – Análise temporal da batalha de Tuiuti

Analisando a Figura 1, facilmente se observa que os efetivos preditos pelas equações (3) e (4) podem assumir valores fracionados. Este foi o ponto mais criticado no uso das equações de Lanchester, pois como explicar, por exemplo, 1,23 homens? Para responder a este criticismo, foi criada a interpretação estocástica das ODE de Lanchester. Nesta interpretação, a forma geral das ODE para um vetor de k variáveis de estado é dada por (6).

$$\frac{dx_i}{dt} = -f_i(x);\ i = 1,...,k \tag{6}$$

A interpretação estocástica de (6) é que $f_i(x)$ é a razão de transição de uma cadeia de Markov com tempo contínuo [10, p 87], i.e., x_i decresce uma unidade em um pequeno tempo Δ com probabilidade $\Delta f_i(x)$.

Assumindo-se que o combate siga um processo de Poisson e que a razão de atrito de X e Y sejam dados, respectivamente, por $dX/dt = G(m,n)$ e $dY/dt = H(m,n)$, tem-se que:

$$\Pr\left(1\,\text{baixa de X em } \Delta t\right) = G(m,n)\Delta t \tag{6}$$

$$\Pr\left(1\,\text{baixa de Y em } \Delta t\right) = H(m,n)\Delta t \tag{7}$$

Onde m e n são, respectivamente, os efetivos (valores inteiros) de X e Y no tempo t.

É sabido que a distribuição do menor valor de duas variáveis aleatórias independentes distribuídas exponencialmente é dada por (8) (isto é conhecido por corrida de exponenciais).

$$Min\left(\exp(\lambda_1), \exp(\lambda_2)\right) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{8}$$

Assumindo-se a Lei dos Quadrados de Lanchester, temos que $\lambda_1 = an$ e $\lambda_2 = bm$. Logo, as probabilidades e tempos necessários para simular um combate estocástico de Lanchester pela Lei dos Quadrados são dados por (9-11).

$$\Pr\left(1\,\text{baixa de X } \middle| \text{houve baixa}\right) = \frac{an}{an+bm} \tag{9}$$

$$\Pr\left(1\,\text{baixa de Y } \middle| \text{houve baixa}\right) = \frac{bm}{an+bm} \tag{10}$$

$$t_{\text{próxima baixa}} \sim \exp(an+bm) \tag{11}$$

Realizamos uma simulação de Monte-Carlo com os valores dos coeficientes de atrito a e b da Batalha de Tuiuti da Tabela 1. Assumimos que as forças paraguaias desistem do combate quando seu efetivo for igual a 11.350 homens (valor histórico) e que as forças da Tríplice Aliança desistem do combate com 17.012 homens (mesma proporcionalidade do valor de desistência do Paraguai: 48,608% do efetivo inicial). Foram realizadas 100.000 simulações e os resultados encontram-se na Figura 2.

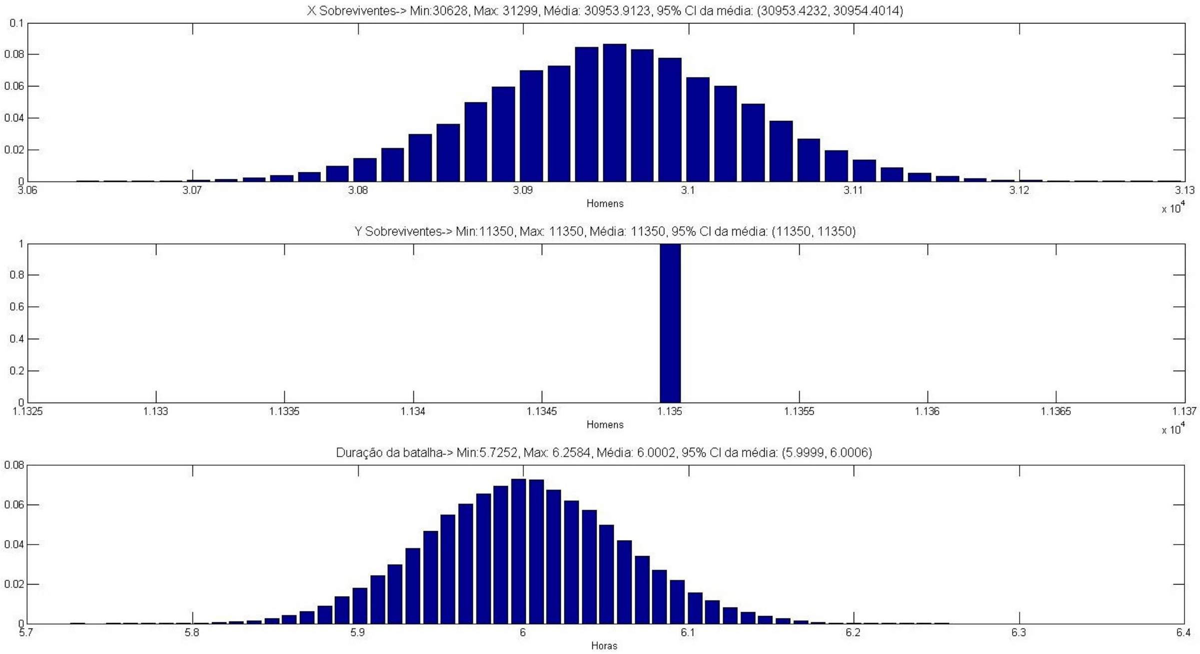

Figura 2 – Distribuições de probabilidade resultantes da análise estocástica da batalha de Tuiuti

A análise da Figura 2 permite inferir que, obedecidas as assunções das equações de Lanchester e os valores dos coeficientes de atrito utilizados, a Tríplice Aliança tinha quase 100% de probabilidade de sucesso nesta batalha (em nenhuma das 100.000 simulações o Paraguai venceu a batalha). É esperado que a batalha durasse no máximo 6,26 horas e que o menor efetivo aliado ao final da batalha fosse 30.628 homens.

4. CONCLUSÕES

Foram analisadas as principais batalhas da Guerra do Paraguai com o uso das equações de Lanchester.

A segunda seção realizou uma revisão sobre as equações diferenciais propostas por Lanchester, e as principais batalhas da Guerra do Paraguai foram analisadas na seção três.

A análise das batalhas de Tuiuti, Curuzu, Tomada de Humaitá, Itororó e Avaí mostrou que as forças paraguaias tinham, em quase todas as batalhas, um melhor adestramento que as forças da Tríplice Aliança. Apesar de serem mais bem adestradas, as forças paraguaias perderam todas essas batalhas. O motivo dessas derrotas, conforme concluído por Lanchester, e amplamente divulgado nas diversas academias militares em todo o mundo, foi a grande importância do princípio da massa. Lanchester demostrou, e nossa análise das principais batalhas da Guerra do Paraguai confirmou, que o resultado de uma batalha é "proporcional ao quadrado do efetivo inicial, mas apenas à primeira potência do coeficiente de letalidade" [10, p. 82].

Trabalhos futuros devem reanalisar as batalhas estudadas neste artigo supondo a e b possíveis funções do tempo, mas contidos em intervalos tipo $\left[a_{\inf} \;\; a_{\sup}\right]$, a exemplo dos estudos feitos por [14] e [15]. Esta reanálise deve também ser realizada com estatísticas obtidas de outras fontes bibliográficas, como, por exemplo, [16-17].

REFERÊNCIAS

[1] Doratioto, F. 2002. *Maldita Guerra*, Companhia das Letras.

[2] Lanchester, F.W. 1914. Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm, Parts V and VI—The Principle of Concentration. *Engineering* 98, 422-423 and 452-454.

[3] Engel, J. 1954. Verification of Lanchester's Law, *Operations Research*, Vol. 2, 163-171.

[4] Busse, J. J. 1971. An Attempt to Verify Lanchester's Equations, in *Developments in Operations Research* Vol. 2, B. Avi-Itzhak et al. editors, Gordon and Branch, New York, 587-597

[5] Fricker, R. 1998. Attrition Models of the Ardennes Campaign, *Naval Research Logistics*, 45, 1-22

[6] Speight, L.R. 2002. Lanchester Equations and the Structure of the Operational Campaign: Between-Campaign Effects, *Military Operations Research*, Vol. 7, No. 2, 5-44.

[7] Lucas, T.W., & T. Turkes. 2004. Fitting Lanchester Equations to the Battles of Kursk and Ardennes, *Naval Research Logistics*, 51, 95-116

[8] Narcisio, L. 2011. The War of the Triple Alliance. Disponível em: http://www.reocities.com/ulysses_costa/Statistics.html. Acesso em 29/04/2011.

[9] Diário Universal. 2007. A Batalha de Tuiuti. Disponível em: http://www.diario-universal.com/2007/05/aconteceu/a-batalha-de-tuiuti/ . Acesso em 29/04/2011.

[10] Washburn, A. & Kress, M.. 2009. *Combat Modeling*. Springer.

[11] Latin Phrases. 2011. Divide and Conquer. Disponível em http://latinphrases.info/latin/phrases/divide-and-conquer. Acesso em 03/05/2011.

[12] Mills, W. 2011. The Twentieth Century: Militarism. Disponível em http://stmarys.ca/~wmills/course203/10Militarism.html. Acesso em 03/05/2011.

[13] Clausewitz, C. V. 1873. On War. Disponível em http://www.clausewitz.com/readings/OnWar1873/BK3ch08.html. Acesso em 03/05/2011.

[14] Taylor, J. G. 1981. Battle-outcome-prediction conditions for variable-coefficient Lanchester-type equations for area fire, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 311, N. 3, 151-170.

[15] Protopopescu, V., Yager, R., Dockery, J. 1992. Combat modeling with imprecise data, *International Journal of Intelligent Systems*, Vol. 7, N. 3, 277–291.

[16] Barroso, G. 1938. *História militar do Brasil*. Editora Nacional.

[17] Gonçalves, L. J. C. 2009. *Tática do exército brasileiro na guerra do Paraguai entre 1866 e 1868*. Tese de Mestrado. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquista Filho".