



ISSN 2175-6295 Rio de Janeiro- Brasil, 12 e 13 de agosto de 2010

PROPOSTA DE UMA HEURÍSTICA HÍBRIDA PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO ROTEAMENTO DE VEÍCULOS CAPACITADOS (PRVC)

THIAGO ANDRÉ GUIMARÃES – UFPR – thiandgui@gmail.com
CASSIUS TADEU SCARPIN – UFPR – cassiusts@gmail.com
GUSTAVO VALENTIM LOCH – UFPR – gustavo.gvalentim@gmail.com
MARIA TERESINHA ARNS STEINER – UFPR – tere@ufpr.br

RESUMO:

Este trabalho apresenta uma nova abordagem heurística para a resolução do Problema do Roteamento de Veículos Capacitados (PRVC). O método proposto utiliza a heurística clássica de agrupamento para a clusterização dos pontos, proposta por Teitz e Bart (1968), introduzindo um procedimento de ajuste a-priori e a-posteriori, e na sequência emprega a heurística de inserção mais econômica para construção de rotas, além das heurísticas de melhoria *2-opt* e *3-opt* para refinamento da solução inicial, configurando uma nova heurística híbrida para a resolução do problema. A abordagem foi testada sob instâncias clássicas da literatura, obtendo um desempenho 10% mais custoso que dos valores ótimos, com significativa redução no tempo de processamento para as instâncias cujo esforço computacional para a obtenção da solução ótima se apresentou mais elevado.

Palavras Chave: Roteamento de Veículos Capacitados, Heurísticas.

ABSTRACT :

This paper presents a new heuristic approach to solving the Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP). The proposed method uses the classical clustering heuristic for generation of group of points (customers), proposed by Teitz and Bart (1968), introducing a procedure for adjusting the clusters a-priori and a-posteriori, and following, the most saving insertion heuristic is used to generate initial routes and thereafter uses the *2-opt* and *3-opt* to improve the initial solution, configuring a new hybrid heuristic for solving the problem. The approach was tested on classical instances of literature, obtaining a performance 10% more expensive than the optimal, with a significant reduction in processing time for the instances whose computational effort for obtaining the optimal solution presented was higher.

Key-words: Capacitated Vehicle Routing Problem, Heuristics.

1. Introdução

O Problema do Roteamento de Veículos Capacitado (PRVC) vem sendo uma das mais importantes abordagens para a otimização de distribuição em redes, desde que foi proposto inicialmente por Dantzig e Ramser (1959), decorrente de um problema de roteirização para distribuição de gasolina transportada por caminhões capacitados.

O PRVC busca determinar um conjunto de rotas para uma frota homogênea de veículos, partindo de um depósito central com destino a um conjunto de clientes que demandam determinado produto. Cada cliente deve ser atendido por apenas um veículo e a demanda transportada por este não deve exceder sua capacidade de carregamento. O objetivo do PRVC é minimizar a distância total percorrida pela frota de veículos.

Existem diversas abordagens para a resolução do PRVC. Em geral, essas abordagens podem ser agrupadas em duas classes distintas: métodos exatos e métodos heurísticos. Referente à primeira classe, os melhores trabalhos são baseados em algoritmos *branch-and-cut* ou relaxação lagrangeana / geração de colunas (FUKASAWA, *et al.* 2006).

Um dos marcos na abordagem exata para o PRVC foi apresentado em Christofides *et al.* (1981), que trabalharam com limitantes lagrangeanos para a geração de subrotas. O algoritmo *branch-and-bound* foi capaz de resolver instâncias com até 25 clientes. Pesquisas recentes intensificam o emprego de planos de corte, como se verifica em Achuthan *et al.* (2003), que propuseram novos planos de corte baseados em um algoritmo *branch-and-cut* e testaram sob instâncias que contém uma faixa de 15 até 100 clientes além de 24 problemas clássicos da literatura. O trabalho produziu benefícios em termos de esforço computacional. Já Fukasawa *et al.* (2006) propuseram um algoritmo *branch-and-cut-price* que combina elementos de *branch-and-cut* e relaxação lagrangeana / geração de colunas. Os autores testaram o algoritmo sob instâncias com mais de 135 clientes, obtendo para todas elas resultados ótimos.

Com relação à classe de métodos heurísticos, Campos e Mota (2000), apresentaram duas heurísticas: uma baseada em *scratch* e outra que emprega informações advindas de relaxações lineares fortes a partir do problema original. Os autores utilizaram técnicas de busca tabu para refinar as soluções iniciais. As heurísticas foram testadas sob instâncias da literatura com a quantidade de clientes variando de 22 a 135 clientes, obtendo soluções ótimas para a maioria delas.

Já Berger e Bakaoui (2003), apresentaram um algoritmo genético híbrido, trabalhando com a evolução de duas populações ao mesmo tempo, utilizando operadores que combinam variações de técnicas de roteirização e técnicas de busca.

Por sua vez, Chen *et al.* (2006) propuseram uma abordagem híbrida baseada em nuvem de partículas e testaram sob instâncias clássicas com uma faixa de clientes variando de 33 a 155. Os resultados obtidos se aproximaram dos valores ótimos.

Também empregando técnicas metaheurísticas, Zhishuo e Yueting (2005) desenvolveram um novo método baseado em colônia de formigas. O trabalho apresenta algumas inovações em relação às abordagens tradicionais da metaheurística para a resolução do PRVC, entre elas o procedimento para a construção de subrotas, que são iniciadas aleatoriamente a partir dos vértices mais distantes ao invés de iniciarem nos depósitos. Na etapa de refinamento da solução atual, um algoritmo de varredura é aplicado sobre as subrotas, trocando pares de vértices entre elas. O trabalho apresentou resultados apenas 0,28% inferiores aos valores ótimos para as instâncias testadas, o que representa um desempenho superior entre outras abordagens baseadas em colônia de formigas para o PRVC.

Neste trabalho é proposta uma nova heurística híbrida para a resolução do PRVC. A abordagem emprega dois estágios: um primeiro estágio agrupa os clientes de acordo com a capacidade do veículo através da heurística clássica de Teitz e Bart (1968). Uma nova heurística, denominada *k-fit* é apresentada, ajustando a heurística de Teitz e Bart *a priori* e *a posteriori*. O segundo estágio roteiriza os agrupamentos, onde as subrotas iniciais são geradas pela heurística construtiva de inserção mais econômica e posteriormente refinada pelas heurísticas de melhoria 2-opt e 3-opt respectivamente.

Para tanto o artigo está dividido em 5 seções: a seção 2 descreve formalmente o problema, enquanto que a seção 3 apresenta a heurística proposta para a resolução do PRVC. A seção 4 apresenta os resultados testados sob instâncias da literatura e, por fim, a seção 5 tece as conclusões do artigo.

2. Descrição do Problema

Seja $G=(V,E)$ um grafo não direcionado contendo o conjunto de vértices $V = \{0, 1, \dots, n\}$, onde o vértice 0 representa o depósito, enquanto que todos os outros vértices representam os clientes, sendo que cada cliente i possui uma demanda associada d_i . Cada arco $e \in E$ possui um comprimento não negativo $\ell(e)$. Dado G e dois números positivos e inteiros (K e C), o PRVC consiste em encontrar um conjunto de rotas para os K veículos, satisfazendo as seguintes restrições:

- (i) Cada rota inicia e termina no depósito
- (ii) Cada cliente é visitado por um único veículo
- (iii) A demanda total de todos os clientes de uma subrota não excede a capacidade C do veículo.

O objetivo do PRVC é minimizar ____ o somatório das distâncias de todas as subrotas. O PRVC é fortemente *NP-hard*, dado que é uma generalização do Problema do Caixeiro Viajante (PCV), demandando, portanto, elevado esforço computacional para obtenção da solução ótima através de busca exaustiva.

Conforme descrito em Lin *et al.*(2009) o PRVC pode ser modelado como um problema de programação inteira misto como segue:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^K C_{ij} X_{ij}^k \quad (1)$$

$$\text{Sujeito à:} \quad \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N X_{ij}^k d_i \leq Q^k \quad 1 \leq k \leq K, \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N X_{ij}^k (C_{ij} + S_i) \leq T^k \quad 1 \leq k \leq K, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^N X_{ijk} = \sum_{j=1}^N X_{jik} \leq 1, \quad \text{para } i = 0 \text{ e } k \in \{1, \dots, k\}, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N X_{ijk} \leq K, \quad \text{para } i = 0, \quad (5)$$

Onde C_{ij} é o custo para se ir do cliente i para o cliente j , K é a quantidade de veículos disponível, N é o número de clientes, S_i é o tempo de serviço requerido pelo cliente i , Q^k é a capacidade de carregamento do veículo k , enquanto que T^k é a máxima distância percorrida (rota) do veículo k e finalmente d_i é a demanda do cliente i . $X_{ij}^k \in \{0, 1\}$ ($i \neq j$; $i, j \in \{0, 1, \dots, N\}$).

A equação (1) é a função objetivo do problema. A restrição (2) refere-se à capacidade de carregamento do veículo e atendimento das demandas de cada cliente, onde $X_{ij}^k = 1$ se o veículo k viaja do cliente i para o cliente j diretamente, e 0 caso contrário. A restrição 3 refere-se à máxima distância permitida (autonomia de deslocamento) do veículo k . Já a restrição 4 garante que toda rota tem início e fim no depósito, enquanto que a restrição 5 especifica que há no máximo K rotas partindo do depósito.

Em virtude de o tempo computacional aumentar exponencialmente em problemas de grande porte, métodos heurísticos vem sendo propostos para a resolução do PRVC. Neste sentido, a próxima seção discute a heurística proposta no artigo.

3. Heurística Proposta

A construção da heurística deste trabalho envolve o problema de agrupamento, o problema de construção e melhorias de rotas. Assim, as próximas subseções discutem esses problemas de forma pormenorizada, para que na seqüência a heurística seja apresentada.

3.1.O problema de agrupamento (clusterização)

O problema das p -medianas será introduzido com o objetivo de determinar no grafo formado pelos clientes, p -pontos principais, que representam sementes ou depósitos fictícios. A cada uma destas medianas, os demais pontos serão designados, de modo a formar p -conjuntos iniciais, cada um com cardinalidade igual à capacidade dos veículos. O problema é tratado pela teoria dos grafos que tem por objetivo localizar facilidades ao longo de uma rede viária. Estas facilidades (p -medianas) devem ser localizadas de forma a minimizar a soma da distância de cada um dos pontos à facilidade mais próxima, ponderada por um fator de demanda. O problema pode ser resolvido de forma exata (HAKIMI, 1965), usando enumeração exaustiva ou por programação inteira. Porém, quando se trata de problemas muito grandes, torna-se necessário recorrer a métodos aproximados (heurísticos) tendo em vista o esforço computacional que seria exigido pelos mesmos. Um algoritmo heurístico foi descrito por Teitz e Bart (1968), e pode ser usado em problemas de maior porte.

Algumas definições sobre as p -medianas são apresentadas para dar sustento na descrição do algoritmo. Para um grafo $G(V, E)$, define-se número de *out*-transmissão e *in*-transmissão, para cada ponto $v_i \in V$, como sendo, respectivamente:

$$\sigma_o(v_i) = \sum_{v_j \in V} \theta_j \cdot w(v_i, v_j)$$

$$\sigma_t(v_i) = \sum_{v_j \in V} \theta_j \cdot w(v_j, v_i)$$

Onde $w(v_i, v_j)$ é a distância entre o vértice v_i e v_j , e θ_j é o peso associado ao ponto v_j . Conforme Christofides (1975), são chamadas de *out*-mediana e *in*-mediana de um grafo, respectivamente, aos pontos \bar{v}_i e \bar{v}_j que satisfazem as seguintes condições:

$$\sigma_0(\bar{v}_0) = \min_{v_i \in V} [\sigma_0(v_i)]$$

$$\sigma_t(\bar{v}_t) = \min_{v_i \in V} [\sigma_t(v_i)]$$

Para generalizar estes conceitos de *out*-transmissão e *in*-transmissão para p -medianas, considera-se V_p um subconjunto do conjunto de pontos V do Grafo $G(V,E)$, que possui p elementos, isto é, $|V_p| = p$. Define-se ainda,

$$w(V_p, v_j) = \min_{v_i \in V} [w(v_i, v_j)] \text{ e } w(v_j, V_p) = \min_{v_i \in V} [w(v_j, v_i)]$$

Onde $w(V_p, v_j)$ representa a distância do subconjunto de pontos V_p até o ponto v_j e $w(v_j, V_p)$ indica a distância do vértice v_j até o subconjunto V_p . Analogamente ao que foi feito pra um só vértice, define-se os números de *out*-transmissão e *in*-transmissão, respectivamente, para o conjunto V_p , da seguinte forma:

$$\sigma_0(V_p) = \sum_{v_j \in V} \theta_j \cdot w(V_p, v_j)$$

$$\sigma_t(V_p) = \sum_{v_j \in V} \theta_j \cdot w(v_j, V_p)$$

Finalmente, chama-se de p -*out*-mediana e p -*in*-mediana aos conjuntos \bar{V}_{po} e \bar{V}_{pt} , respectivamente, para os quais:

$$\sigma_0(\bar{V}_{po}) = \min_{V_p \subset V} [\sigma_0(V_p)]$$

$$\sigma_t(\bar{V}_{pt}) = \min_{V_p \subset V} [\sigma_t(V_p)]$$

Neste trabalho, considera-se um grafo não orientado, tornando indiferente o conceito de p -*in*-mediana ou p -*out*-mediana, que doravante será denominado apenas de p -mediana, o que simplifica consideravelmente a notação utilizada.

No algoritmo de Teitz e Bart (1968), inicialmente escolhe-se um conjunto S formado por p pontos, considerado como uma aproximação do conjunto \bar{v}_p das medianas. Verifica-se se algum ponto $v_i \in V - S$ pode substituir, de acordo com o algoritmo abaixo, algum ponto $v_j \in V$, produzindo um novo conjunto S' tal que: $S' = S \cup \{v_i\} - \{v_j\}$ e $\sigma(S') < \sigma(S)$. Se isto for possível, substituímos v_j por v_i e S' é considerado uma nova aproximação para o conjunto \bar{S} , onde nenhuma substituição de pontos produza um número de transmissão menor.

Os passos para este algoritmo são:

Passo 1. Construa um conjunto inicial S , com p elementos de V ;

Passo 2. Rotule todos os pontos $v_i \notin S$ como “não-analisados”;

Passo 3. Enquanto existirem pontos “não-analisados” no conjunto $V-S$, faça:

- a) Selecione um vértice “não-analisado” $v_i \in V - S$, e calcule a redução Δ_{ij} do número de transmissão, $\forall v_j \in S : \Delta_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{v_i\} - \{v_j\})$;

b) Faça $\Delta_{ijo} = \max_{v_j \in S} [\Delta_{ij}]$;

c) Se $\Delta_{ijo} > 0$ faça $S \leftarrow S \cup \{v_i\} - \{v_j\}$ rotulando v_{jo} como “analisado”;

d) Se $\Delta_{ijo} \leq 0$ rotule v_i como “analisado”.

Passo 4. Se durante a execução do passo 3 ocorrer modificações no conjunto S , volte para o passo 2. Caso contrário PARE. O conjunto S será uma aproximação para o problema das p -medianas.

3.2. Procedimento para construção de rotas

Um dos possíveis procedimentos heurísticos para a construção de rotas para PCV é o algoritmo da inserção mais econômica. Este procedimento gerará uma rota inicial e factível para o problema.

Algoritmo da inserção mais econômica (STEINER, *et al.*, 2000):

Passo 1. Comece com um sub-grafo consistindo somente do nó p ;

Passo 2. Encontre o nó m tal que $distância(p, m)$ seja mínima e forme a sub-rota $p-m-p$;

Passo 3. Encontre $i-j$ na sub-rota e k que não esteja na rota, tal que $distância(i, k) + distância(k, j) - distância(i, j)$ seja mínima e, então, insira k entre i e j ;

Passo 4. Se todos os pontos do grupo já estiverem na rota, pare. Se não, volte ao passo 3.

3.3. Algoritmos de melhorias de rotas

Os algoritmos de melhorias de rotas buscam diminuir a distancia total percorrida pelo caixeiro viajante. A melhor classe conhecida de algoritmos de melhoria de rotas é a heurística de troca $k-opt$ de Lin e Kernighan (1973), sendo as heurísticas de troca de arcos $2-opt$ e $3-opt$ as mais utilizadas, destacando-se que boas soluções iniciais são fundamentais para que se obtenha boas soluções finais (CAMPOS, 2008).

Os métodos $k-opt$ buscam a melhora pela substituição de k arcos no roteiro estabelecido anteriormente, isto é, k arcos são removidos do roteiro e substituídos por outros k arcos. Caso alguma melhoria seja detectada, a troca é aceita e este passa a ser o novo roteiro.

Neste presente trabalho este processo se repete até que nenhuma troca resulte em melhoria. Segundo Laporte (1999), este processo termina em um mínimo local e possui ordem de complexidade $O(n^k)$. Conforme maior for o valor de k , melhor será a solução, entretanto o esforço computacional requerido também será maior. Isto leva a um *trade-off* entre qualidade e tempo computacional.

A figura 1 mostra o caso particular da troca $2-opt$ e a figura 2 o da troca $3-opt$. Para a troca de arcos $3-opt$ existirão sete diferentes possibilidades de novas rotas, mas três delas recaem em melhoria $2-opt$.

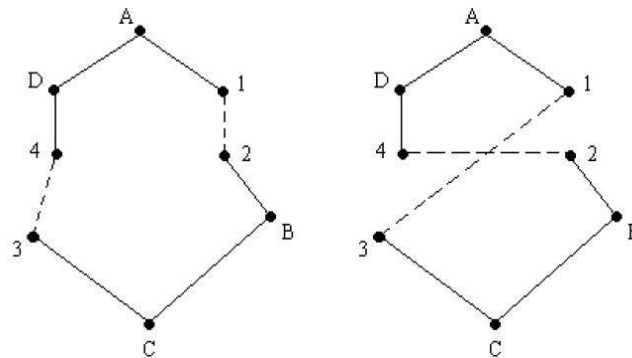


FIGURA 1 – Melhoria 2-opt . Fonte: Adaptado de Costa (1997).

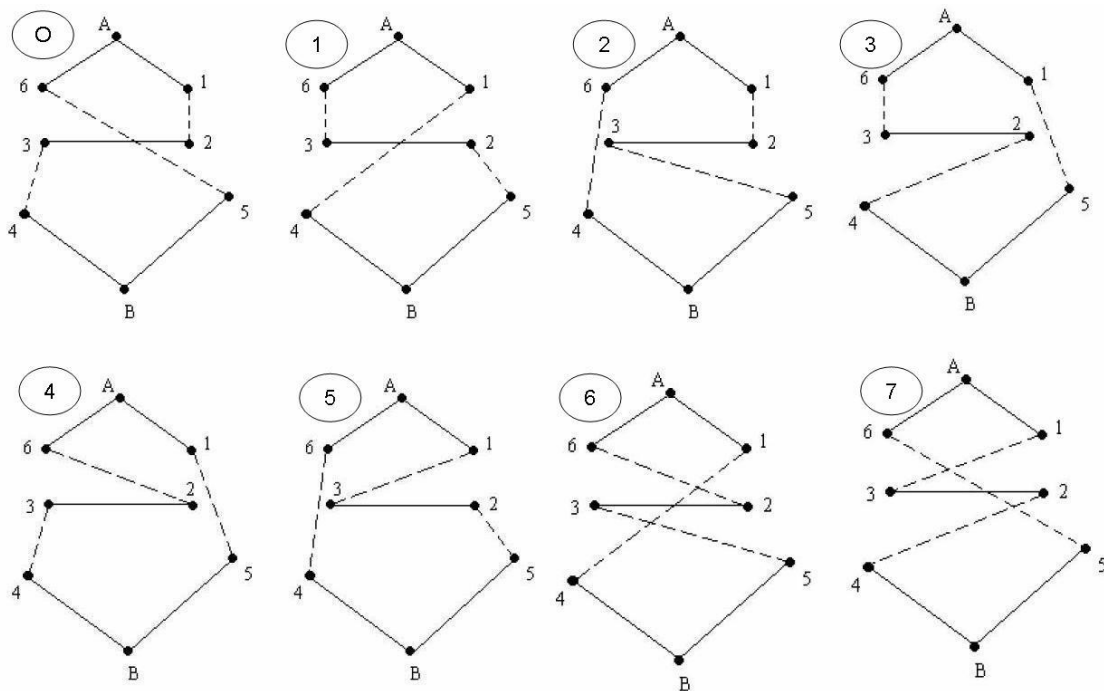


FIGURA 2 – Melhoria 3-opt . Fonte: Adaptado de Costa (1997).

As trocas 2, 4 e 7 são casos de melhoria 2-opt, pois não houve substituição dos arcos 1-2, 3-4 e 4-6, respectivamente. Logo, na melhoria 3-opt quatro novas alternativas de rotas são avaliadas a cada iteração.

4. Abordagem Proposta

A estratégia para a resolução do PRVC inicia-se com o agrupamento dos clientes pelo algoritmo de Teitz e Bart (1968), ajustado *a priori*, para definição da quantidade de medianas conforme a capacidade dos veículos, e *a posteriori*, para os agrupamentos formados. Ambos os ajustes configuram uma nova heurística, denominada *k-fit*. Na seqüência cada agrupamento é roteirizado, sendo que a rota inicial é gerada pela heurística construtiva de inserção mais econômica e refinada pelas heurísticas de melhoria 2-opt e 3-opt. A abordagem é apresentada a seguir:

Início do Método:

Passo 1 – Definição da quantidade de medianas: Seja n o número de clientes a serem atendidos, $d_i = \{i=1, \dots, n\}$ as demandas de cada cliente e C a capacidade de cada veículo.

1 – Dada a demanda total de todos os clientes D , soma-se a quantidade de veículos necessária para que se atenda a essa demanda. O k -ésimo veículo que atende à demanda determina k medianas. **Fim do Passo 1**

Passo 2 – Agrupamento dos pontos pela heurística de Teitz e Bart (1968), com a quantidade p de medianas obtidas no passo 1 ($p = k$). **Fim do Passo 2.**

Passo 3 – Designação dos veículos para cada agrupamento:

3.1 – Ordena-se os agrupamentos encontrados no Passo 2 em ordem crescente (lista de agrupamentos).

3.2 – Alinha-se a lista de capacidades à lista de agrupamentos, designando cada veículo a um agrupamento (vinculada a uma mediana), gerando-se uma lista com p pares de conexão (agrupamento-veículo). **Fim do Passo 3.**

Passo 4 – Ajuste dos agrupamentos:

4.1 – Aplica-se a heurística de inserção mais econômica na criação de um roteiro entre as medianas, iniciando e terminando a rota no CD. Criando uma ordem de pares agrupamento-veículo.

4.2 – Para cada p -agrupamento-veículo, decrescendo de $j = p$ até 2, verifica-se se há excesso de demanda.

4.2.1 – Se sim, escolhe-se como pontos excedentes aqueles que estão mais próximos do agrupamento subsequente (agrupamento $p = j-1$) e os insere neste agrupamento.

4.2.2 – Senão, avalie o próximo agrupamento ($p = j-1$).

4.3 – Para cada p -agrupamento-veículo, crescendo de $j = 1$ até $p-1$, verifica-se se há excesso de demanda.

4.3.1 – Se sim, escolhe-se como pontos excedentes aqueles que estão mais próximos do agrupamento subsequente (agrupamento $p = j+1$) e os insere neste agrupamento.

4.3.2 – Senão, avalia-se o próximo agrupamento ($p = j+1$).

Fim do Passo 4.

Passo 5 – Construção das rotas para cada agrupamento:

5.1 – Aplica-se a heurística construtiva de inserção mais econômica em cada agrupamento para obtenção de uma rota inicial.

5.2 – Aplica-se a heurística de melhoria *2-opt*.

5.3 – Aplica-se a heurística de melhoria *3-opt*. **Fim do Passo 5.**

Fim do Método:

As rotinas 4.2 e 4.3 garantem que não haja excesso de demanda em cada veículo, viabilizando o carregamento. Da mesma forma, ao se definir a quantidade necessária de veículos para o atendimento do conjunto de rotas, também é garantido que a demanda é atendida totalmente. A heurística *k-fit* proposta é composta pelos passos 1, 3 e 4.

5. Resultados

O método proposto nesse trabalho foi testado sobre instâncias clássicas da literatura disponibilizadas nos sítio www.branchandcut.org. A quantidade de pontos das instâncias utilizadas varia de 37 até 80 pontos e a capacidade de carregamento do veículo é de 100 toneladas para cada uma das instâncias.

Os testes foram rodados em um AMD Athlon™ 64 Dual Core, 2.10 Ghz com 896 MB de memória. Embora o equipamento possua dois núcleos de processamento, foi utilizado apenas um deles. A linguagem de programação utilizada foi Visual Basic.

A tabela 1 apresenta os dados obtidos para as instâncias selecionadas. A primeira coluna apresenta a instância, conforme nomenclatura utilizada em Fukasawa *et al.* (2006). A segunda e terceira coluna mostram os tempos computacionais e as soluções exatas obtidas pelo referido trabalho. As colunas seguintes apresentam o tempo computacional e o resultado obtido pela heurística. As duas últimas colunas demonstram o desempenho da heurística quanto ao tempo computacional e a solução ótima obtida em Fukasawa *et al.* (2006).

Tabela 1 – Resultados Obtidos para as Instâncias Testadas

Instância	Tempo Total - Método Exato (s)	Solução Ótima	Tempo Total - Solução Heurística (s)	Solução Heurística	GAP Time	GAP Solution
A-n37-k5	19	669	277,73	773,41	-1361,8%	-15,6%
A-n37-k6	379	949	460,49	1024,95	-21,5%	-8,0%
A-n38-k5	26	730	411,32	817,82	-1482,0%	-12,0%
A-n39-k5	167	822	337,12	868,29	-101,9%	-5,6%
A-n39-k6	98	831	312,60	926,86	-219,0%	-11,5%
A-n44-k6	90	937	432,86	1085,37	-381,0%	-15,8%
A-n45-k6	170	944	459,40	1069,03	-170,2%	-13,2%
A-n45-k7	331	1146	542,94	1314,57	-64,0%	-14,7%
A-n46-k7	92	914	437,89	1079,31	-376,0%	-18,1%
A-n48-k7	166	1073	543,68	1196,05	-227,5%	-11,5%
A-n53-k7	611	1010	498,87	1179,51	18,4%	-16,8%
A-n54-k7	1409	1167	655,73	1282,08	53,5%	-9,9%
A-n55-k9	84	1073	851,13	1195,24	-913,2%	-11,4%
A-n60-k9	3080	1354	954,13	1500,05	69,0%	-10,8%
A-n61-k9	1883	1034	1164,56	1192,46	38,2%	-15,3%
A-n62-k8	3102	1288	808,25	1386,36	73,9%	-7,6%
A-n63-k9	1046	1616	944,28	1738,63	9,7%	-7,6%
A-n63-k10	4988	1314	1291,90	1485,00	74,1%	-13,0%
A-n64-k9	11254	1401	1038,58	1585,16	90,8%	-13,1%
A-n80-k10	6464	1763	1592,39	2016,88	75,4%	-14,4%

Os resultados obtidos apontam que a estrutura da heurística proposta apresentou estabilidade no tocante ao tempo de processamento, não apresentando significativa variação em relação à diferença entre as quantidades de pontos e demandas dos clientes. Neste sentido, o método apresentou significativa melhoria no tempo de processamento em relação às instâncias que demandaram maior esforço computacional para a obtenção da solução ótima, porém encontrando uma solução próxima da ótima. Assim a heurística apresentada, considerando o tempo computacional, torna-se uma alternativa viável para obtenção de uma solução de boa qualidade. Neste sentido, tem-se a instância A-n62-k8, em que a redução no tempo computacional foi de mais de 70% em relação ao tempo para a obtenção da solução ótima, chegando a um valor somente 7,6% inferior a solução ótima. Em contrapartida o tempo computacional para as instâncias com baixo esforço computacional para a obtenção da solução ótima foi consideravelmente superior e os resultados mantiveram uma aproximação

em torno de 90% da solução ótima. Os valores em negrito representam as instâncias que tiveram redução no tempo computacional.

No tocante ao desempenho da heurística, os valores ficaram em torno de 10% acima em relação ao ótimo, conforme se verifica na coluna GAP Solution. Para algumas instâncias o desempenho ficou próximo de 5% (A-n-39-k5) e 7% (A-n62-k8 e A-n63-k9) em relação ao ótimo.

6. Conclusões

Devido a sua alta aplicabilidade, o PRVC é um dos problemas mais estudados dentre os de otimização em redes. Embora a formulação exata para este problema seja simples, sua solução analítica é de alta complexidade, inviabilizando a resolução de situações para um grande número de pontos a serem visitados. Neste contexto, as heurísticas desempenham um papel importante como ferramenta de resolução.

No presente trabalho foi proposta uma heurística híbrida, denominada *k-fit*, que foi aplicada em conjunto com o clássico algoritmo de Teitz e Bart (1968) e as melhorias *k-opt*. Para a validação do desempenho da heurística foram utilizadas instâncias já apresentadas em outros trabalhos.

Os resultados foram satisfatórios em relação às soluções encontradas, especialmente para aquelas com maior número de pontos, o que indica uma estabilidade e poder de generalização da heurística. Há que se destacar a estabilidade no tempo computacional, que apresentou pouca variação entre as instâncias devido ao algoritmo desenvolvido e critério de parada, que foi a não melhoria das rotas pelas heurísticas de refinamento de rotas *2-opt* e *3-opt*. Devido a isso, as instâncias que demandaram um maior tempo computacional para a obtenção da solução ótima tiveram significativa redução deste, considerando que este trabalho apresenta soluções de boa qualidade.

Quanto aos tempos de execução, cabe ressaltar que no estudo utilizou-se uma prática de implementação simples, não dispondo de recursos que facilmente reduzem o tempo de processamento pela redução da complexidade algorítmica. O algoritmo foi desenvolvido para obtenções de soluções viáveis e de boa qualidade, sem a necessidade da utilização de *softwares* comerciais para obtenção da solução ótima, além do intuito de reduzir o tempo computacional, dadas grandes instâncias. Neste sentido, trabalhos futuros serão desenvolvidos para aprimorar e otimizar a implementação da heurística visando aproximar a solução do algoritmo à solução ótima encontrada na literatura.

Referências

- Achuthan, N., Caccetta, L., Hill, S.,** (2003) An improved branch-and-cut algorithm for the capacitated vehicle routing problem, *Transportation Science*, 37, 153–169.
- Berger, J. e Barkaoui, M.,** (2003) A Hybrid Genetic Algorithm for the Capacitated Vehicle Routing Problem, *Lecture Notes in Computer Science*, 2723, 646 – 656.
- Campos, V. e Mota, E.,** (2000) Heuristic Procedures for the Capacitated Vehicle Routing Problem, *Computational Optimization and Applications*, 16, 265 – 277.
- Campos, D. S.,** Integração de problemas de carregamento e roteamento de veículos, com janela de tempo e frota heterogênea , *Tese de Doutorado em Engenharia de Produção*, EPUSP, 2008.
- Costa, D. M. B.,** Aplicação de Algumas técnicas da Pesquisa Operacional na Otimização de Serviços Postais, *Dissertação de Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia*, UFPR, 1997.
- Chen A., Yang G., Wu Z.,** (2006) Hybrid discrete particle swarm optimization algorithm for capacitated vehicle routing problem, *Journal of Zhejiang University SCIENCE*, 7, 607–614.
- Christofides, N.,** *Graph Theory: An algorithmic approach*. New York: Academic Press Inc, London, 1975.
- Christofides, N., Mingozzi, A., Toth, P.,** (1981) Exact algorithms for the vehicle routing problem, based on spanning tree and shortest path relaxations, *Mathematical Programming*, 20, 255–282.
- Dantzig, G. e Ramser, R.,** (1959) The truck dispatching problem, *Management Science*, 6, 80–91.
- Fukasawa, R., Lysgaard, J., Aragão, M. P., Reis, M., Uchoa, E., Werneck, R. F.,** (2006), Robust Branch-and-Cut-and-Price for the Capacitated Vehicle Routing Problem, *Mathematical Programming*, 106, 3, 491-511.
- Hakimi, S. L.,** (1965), Optimum Distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems, *Operations Research*, 13, 462.
- Laporte, G., Gendreau, M., Potvin, J. Y. e Semet, F.,** (1999), Classical and Modern Heuristics for the Vehicle Routing Problem, *Internacional Transactions in Operational Research*, 7, 285-300.
- Lin, S. e Kernighan, B. W.,** (1973) An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling Salesman Problem, *Operations Research*, 21,498-516.
- Lin, S.W., Lee, Z.J., Ying, K.C., Lee, C.Y.,** (2009) Applying hybrid meta-heuristics for capacitated vehicle routing problem, *Expert Systems with Applications*, 36, 1505–1512.
- Steiner, M. T. A., Zamboni, L. V. S., Costa, D. M. B., Carnieri, C. e Silva, A. C. L.,** (2000), O problema de roteamento no transporte escolar, *Pesquisa Operacional*, 20, 83-99.
- Teitz, M. B. e Bart, P.,** (1968), Heuristic Methods for Estimating the Generalized Vertex Median of a Weighted, *Operations Research*, 16, 955-961.
- Zhishuo, L. e Yueting, C.,** (2005), Sweep based Multiple Ant Colonies Algorithm for Capacitated Vehicle Routing Problem, *IEEE International Conference on e-Business Engineering (ICEBE'05)*, 387 – 394.