ISSN 2175-6295 Rio de Janeiro- Brasil, 12 e 13 de agosto de 2010

FLUXO EM REDE PARA MÚLTIPLOS PRODUTOS

LUIS ERNESTO TORRES GUARDIA
Universidade Federal Fluminense-Niteròi, RJ
tepletg@vm.uff.br

Resumo
Este trabalho estuda o problema linear de fluxo em rede para múltiplos produtos. Este problema aparece em uma ampla variedade de aplicações. A implementação numérica do método de pontos interiores primal – dual é usado na resolução do problema. Neste método primal - dual, em cada iteração, o correspondente sistema linear, expresso como um sistema normal, é decomposto usando o algoritmo AINV combinado com o algoritmo do gradiente conjugado pré-condicionado. Experimentos numéricos são realizados em redes com a mesma estrutura de diferentes dimensões e diferentes números de produtos. Os resultados computacionais mostram a eficiência do método de pontos interiores para esta classe de problema de fluxo em rede.
Palavras-chave: programação linear, método de pontos interiores, otimização em rede, múltiplos produtos, programação matemática.

Abstract
This article studies the linear multicommodity network flow problem. This kind of problem arises in a wide variety of contexts. A numerical implementation of the primal-dual interior-point method is designed to solve the problem. In the interior-point method, at each iteration, the corresponding linear system, expressed as a normal system, is factorized by using the AINV algorithm combined with a preconditioned conjugate gradient algorithm. Numerical experiments are conducted for networks, with the same structure, of different dimensions and numbers of products. The computational results show the effectiveness of the interior-point method for this class of network problems.

Keywords: linear programming, Interior-point method, network optimization, multicommodity flows, large-scale optimization.

1.Introdução

Um problema de programação linear de fluxo em rede para múltiplos produtos, no qual produtos individuais compartilham um arco capacitado, usualmente tem muitas variáveis e restrições que faz ser difícil de ser resolvido por procedimentos gerais, digamos o método conhecido do simplex, que é um algoritmo de complexidade exponencial. È conhecido que a solução ótima de um problema linear está localizado em um ponto extremo do conjunto viável, formado pelas restrições do problema linear. O método simplex percorre esses pontos extremos até alcançar tal solução ótima.

Assad (1978) e Kennington (1978) apresentam *surveys* sobre a literatura do problema linear de fluxo em rede para múltiplos produtos e diferentes algoritmos foram propostos para resolver dito problema, baseados na técnica do método simplex. O modelo de programação linear de fluxo em rede para múltiplos produtos pode ser aplicado em uma variedade de contextos produzindo um número de diferentes formulações, ver por exemplo os trabalhos de Ali et al. (1980) e (1984). Farvolden et al. (1993) apresentam um novo esquema para determinar a solução ótima do problema de múltiplos produtos baseado em técnicas de decomposição o qual simplifica os cálculos do método simplex. Essa idéia é similar apresentado no trabalho de Jones et al. (1993). Por outro lado, Schneur e Orlin (1998) descrevem um algoritmo baseado no esquema de penalidade de tal modo que o problema de múltiplos produtos é resolvido como uma sequência de um número finito de fases de escalonamento. Detlefsen e Wallace (2002) descrevem o método simplex para alguns problemas particulares de múltiplos produtos.

Para um estudo detalhado da teoria de redes, pode-se consultar os livros de Ahuja et al. (1993) e de Kennington e Helgason (1980) que apresentam uma descrição compreensiva deste problema de rede e suas aplicações.

O recente interesse nos métodos de pontos interiores, depois da publicação do trabalho de Karmarkar (1984), para resolver um problema específico de programação linear tem sido bastante estudado e sua implementação computacional é eficiente na resolução de programas lineares de grande porte. O nome do método de pontos interiores deve-se por percorrer pontos interiores localizados no interior do conjunto viável.

A principal característica neste trabalho é a apresentação de um método de resolução do sistema linear de equações que aparece nos métodos de pontos interiores. Este método de solução, denominado AINV, é apresentado por Benzi et al. (2000). O referido método trata da decomposição da inversa da matriz correspondente ao sistema linear. Esse método de solução é um método alternativo do conhecido método de decomposição de Cholesky que trata da decomposição da matriz, não da inversa, do referido sistema linear. Para o caso de múltiplos produtos, a decomposição AINV da correspondente matriz é realizada para cada produto. Depois, aplica-se um método iterativo de solução para um sistema linear mais complexo, que envolve todos os produtos, o conhecido método do gradiente conjugado. Para tentar acelerar a convergência à solução do respectivo sistema linear, usa-se uma apropriada matriz pré-condicionador.

Este trabalho é organizado como segue. Seção 2 apresenta uma breve descrição do método de pontos interiores. Seção 3 descreve a formulação matemática do problema linear de fluxo em rede para múltiplos produtos e na seção 4, desenvolve-se uma especialização do método de pontos interiores para o referido problema de fluxo em rede. Finalmente, na seção 5 aplica-se o método de pontos interiores para um modelo de rede de mesma estrutura mas de diferentes dimensões e para um número variado de produtos. Por último, apresentam-se as conclusões.

2. Método de Pontos Interiores Primal-Dual

Depois que Karmarkar (1984) apresentou o método denominado de pontos interiores para resolver um problema especifico de programação linear, outros métodos foram estudados baseados nessa idéia para o caso geral do modelo linear.

Entre os vários métodos de pontos interiores aplicados para problemas de programação linear, o método primal-dual tornou-se um dos mais elegantes e poderosos, superando os outros métodos de pontos interiores, e mostrou também esse potencial para problemas práticos de grande porte, e em particular para problemas de fluxo em rede de um único produto, ver por exemplo os trabalhos de Portugal et al. (2000) e (2008). Para um estudo mais detalhado da teoria de pontos interiores e variantes, sugere-se a leitura dos livros de Wright (1997) e Vanderbei (2008).

Apresenta-se a continuação uma breve descrição do método de pontos interiores primal-dual para resolver o seguinte problema, no formato padrão, de programação linear denominado de primal (P) com restrições lineares:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } c^T x \\ &\text{sujeito a} \quad A'x = b, \\ &\qquad\qquad x \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $x \in R^{n'}$ é a variável de decisão, $c \in R^{n'}$ é o vetor de custo, $b \in R^{m'}$ e $A' \in R^{m' x n'}$ uma matriz de posto de linha completo.

O dual (D) do problema linear anterior é dado por:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad b^T y \\ &\text{sujeito a} \quad (A')^T y + s = c, \\ &\qquad\qquad s \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

onde $y \in R^{m'}$ é a variável dual e $s \in R^{n'}$ é a variável dual de folga.

Se x é uma solução ótima do problema primal (1) e (y,s) é uma solução ótima do problema dual (2), então as seguintes condições de otimalidade são satisfeitas:

$$\begin{aligned} A' x &= b, \\ (A')^T y + s &= c, \\ Xs &= 0, \\ x,s &\geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

onde $X = \text{diag}(x)$ é a matriz diagonal com elementos na diagonal igual ao elemento x_i de $x \in R^n$, isto é, $X = \text{diag}(x_i)$.

O problema de determinar (x,y,s) do sistema dado em (3) é denominada de programação linear primal-dual. Agora se (x,y,s) é uma solução do problema primal-dual, então x e (y,s) são soluções ótimas de (1) e (2) respectivamente. Denomina-se um ponto (x,y,s) de interior se $x > 0$ e $s > 0$ e é viável se as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} A' x &= b, \\ (A')^t y + s &= c. \\ \text{e } (x,s) &\geq 0. \end{aligned}$$

Para cada $\mu > 0$, denominado parâmetro de barreira, considere-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} A' x &= b, \\ (A')^T y + s &= c, \\ Xs &= \mu \mathbf{e}, \end{aligned} \tag{4}$$

sendo **e** o vetor cujas componentes é dado por 1's, isto é, $e = (1,1,...,1)^T \in R^{n'}$.

Se $\mu = 0$, o sistema (4) é equivalente ao sistema (3). Assim, a solução $(x(\mu),y(\mu),s(\mu))$ de (4) aproxima-se à solução de (3) se μ aproxima-se a 0.

O método de pontos interiores primal-dual gera uma seqüência de parâmetros μ^j e uma sequência de pontos interiores (x^j, y^j, s^j), de tal modo que o parâmetro μ^j aproxime-se rápidamente a zero.

Seja (x^0, y^0, s^0) um ponto inicial interior não necessariámente viável e $\mu^0 = (x^0)^T s^0 / n'$. Em cada iteração j, uma direção de Newton (dx^j, dy^j, ds^j) do sistema (4) é determinada resolvendo o seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & A'^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_b \\ \xi_c \\ \xi_\mu \end{pmatrix} \tag{5}$$

em que:

$\xi_b = b - A' x$,
$\xi_c = c - (A')^T y - s$,
$\xi_\mu = \mu e - XSe$,

e denominadas de folga primal, folga dual e folga de complementaridade, respectivamente.
Se agora elimina-se ds da terceira equação do sistema (5), tem-se o seguinte sistema, denominado de sistema aumentado ou indefinido:

$$\begin{pmatrix} -X^{-1}S & A'^T \\ A' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_c - X^{-1}\xi_\mu \\ \xi_b \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$ds = \xi_c - (A')^T dy,$$

e realizando mais uma substituição, eliminando dx, tem-se o seguinte sistema linear denominado de normal:

$$(A' D (A')^T) dy = A' (S)^{-1} X [\xi_c - X^{-1} \xi_\mu] + \xi_b, \tag{7}$$

sendo $D = S^{-1} X$,

e neste caso, as outras variáveis ds e dx podem ser determinadas como segue:

$$ds = \xi_c - (A')^T dy,$$
$$dx = S^{-1} (\xi_\mu - X\, ds). \tag{8}$$

Comparando o sistema de equações normais (7) e o sistema indefinido (6), pode-se observar que a matriz para o sistema normal é simétrica e definida positiva, de menor porte e talvez mais densa. A matriz do sistema aumentada é simétrica indefinida e usualmente mais esparsa.
Alguns autores preferem resolver o sistema normal usando algum método direto de resolução, por exemplo, métodos de decomposição da correspondente matriz associada ao sistema, digamos o método de decomposição de Cholesky, ver por exemplo Nocedal e Wright (1999), ou realizar a decomposição da matriz inversa, ver Benzi et al. (2000). Outros pesquisadores usam métodos indiretos, como por exemplo o método do gradiente conjugado com uma matriz pré-condicionada apropriada, ver Nocedal e Wright (1999), e assim tentar acelerar o processo de convergência à solução do sistema linear.
Se o sistema aumentado dado em (6) é escolhido para ser resolvido e para aproveitar a esparsidade dessa matriz, outros autores usam um algoritmo iterativo do tipo gradiente conjugado. Vários trabalhos tratam de encontrar a matriz pré-condicionada apropriada, ver por exemplos os trabalhos de Keller et al. (2000), Durazzi e Ruggiero (2003), Bergamaschi et al. (2004), Bai e Wang (2006), Chai e Toh (2007), entre outros trabalhos. Detalhes da implementação computacional do método de pontos interiores primal – dual pode-se consultar o trabalho de Andersen et al. (1996).
Seja $(dx^j, dy^j, ds^j)^t$ a solução do sistema dado em (5), seja usando o sistema normal ou o sistema aumentado, um novo ponto interior $(x^{j+1}, y^{j+1}, s^{j+1})$ é determinado como segue:

$$x^{j+1} = x^j + \delta\alpha_P\, dx^j,$$
$$s^{j+1} = s^j + \delta\alpha_D\, ds^j, \tag{9}$$
$$y^{j+1} = y^j + \delta\alpha_D\, dy^j,$$

onde $\delta < 1$ e α_P e α_D são o tamanho de passo no espaço primal e dual respectivamente, tal que a condição de não negativas das variáveis x e s sejam mantidas. O processo de determinar o tamanho do passo segue igual ao aplicado no método simplex, consultar o trabalho de Andersen el al. (1996). Depois de realizado todo esta iteração, um novo parâmetro de barreira μ é atualizado, isto é, $\mu = (x^{j+1})^T (s^{j+1}) / n'$, e o processo primal - dual repete-se até que um certo critério de parada seja satisfeito.

3. Formulação do Problema de Fluxo em Rede para Múltiplos Produtos

Seja o problema linear de fluxo em rede para múltiplos produtos, com K produtos, e o suprimento e a procura para cada produto distribuídos sobre um grafo dirigido G=(N,A) onde N é o conjunto de m nós e A é o conjunto de n arcos. O problema de fluxo em rede para multiplos produtos pode ser formulado como segue:

$$\text{minimizar} \sum_{k=1}^{K} (c^k)^T x^k \tag{10}$$

$$\text{sujeito a} \quad Ax^k = b^k, \quad 1,...,K, \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{K} x^k + x^v = b_{mc}, \tag{12}$$

$$x^k \geq 0,\ x^v \geq 0,\ k = 1,...,K.$$

Aqui, $A \in R^{mxn}$ é a matriz de incidência nó-arco correspondente à rede (onde cada coluna i está relacionado ao arco $a \in A$ com coeficientes +1 e –1), $c^k \in R^n$ é o vetor de custo para cada produto k; e b^k é o vetor de requerimento de oferta/demanda para cada produto k, onde $b_i^k > 0$ indica um nó i de suprimento para o produto k e $b_i^k < 0$ indica um nó i de procura para o produto k. O vetor $b_{mc} \in R^n$ é um vetor de capacidade correspondente a cada arco na rede. É suposto que A é uma matriz de posto completo.

Note-se que $x^k \in R^n$ é o vetor de decisão de fluxo no arco para o produto k e $x^v \in R^n$ é o vetor de variável de folga. O valor K é o número total de produtos no problema. A relação (10) é a função objetiva a minimizar. A relação (11) são as restrições de conservação de fluxo da rede enquanto a relação (12) é conhecida como a restrição de capacidade que especifica o fluxo total máximo de todos os produtos para cada arco. As variáveis envolvidas desse problema são não negativas. Problemas de fluxo em rede para múltiplos produtos não satisfazem a propriedade de a solução ótima ser um número inteiro como ocorre no caso para um único produto quando o oferta/demanda e a capacidade são números inteiros dados.

O problema dual associado a (10) - (12) é escrito como segue:

$$\text{maximizar} \sum_{k=1}^{K} (b^k)^T y^k - b_{mc} y^v \tag{13}$$

$$\text{sujeito a} \quad A^T y^k - y^v + s^v = c^k,$$

$$y^v \geq 0,\ s^v \geq 0,$$

onde y^k e y^v são as variáveis duais e s^v é o vetor dual de folga.

Nos últimos anos, vários métodos foram desenvolvidos para resolver problemas de fluxo em rede para múltiplos produtos assim como estudos computacionais foram implementados usando algoritmos especializados do simplex, ver por exemplo Farvolden et al. (1993), Jones et al. (1993), Schneur e Orlin (1998), Detlefsen e Wallace (2002) entre outros.

Karmarkar (1984) publicou um novo algoritmo polinomial para resolver problemas de programação linear. Esse algoritmo e suas muitas variantes, conhecidos como métodos de pontos interiores, foram usados eficientemente para resolver problemas de fluxo em redes. Esses algoritmos de pontos interiores compartem a mesma estrutura básica computacional.

Choi e Goldfarb (1990), Lustig e Li (1992) e Castro (2000), (2003), (2007) apresentam o método de pontos interiores primal-dual para resolver problemas de fluxo em rede para múltiplos produtos, usando em alguns casos o método de decomposição de Cholesky e/ou combinado com o método do gradiente conjugado pré-condicionado. Chardaire e Lisser (2002) apresentam o método de pontos interiores Afim Dual de escalonamento para o caso de multiplos produtos aplicado a um caso especial de rede de telecomunicações.

4. Problema de Fluxo em Rede para Múltiplos Produtos

Neste trabalho, o problema linear de fluxo de múltiplos produtos é resolvido usando o sistema normal de equações dado em (7). Para isso, precisa-se formar todas as matrizes e vetores envolvidas nesse sistema normal.

A matriz de restrições do problema linear (1) associada agora à matriz de restrições do problema de fluxo em redes para múltiplos produtos (10) – (12) é visualizada como segue:

$$A' = \begin{bmatrix} A & O & . & O & O \\ O & A & . & . & O \\ . & . & . & . & . \\ O & . & . & A & O \\ I & I & . & I & I \end{bmatrix}, \tag{14}$$

onde cada bloco A corresponde à sub-matriz, para cada produto k, k=1,...,K, obtida da matriz de incidência da rede correspondente, depois de remover a última linha da matriz para evitar a deficiência de posto de linha. As matrizes de identidade I correspondem às restrições de capacidade.

A direção de busca dy é obtida resolvendo o sistema linear (7). Neste caso, D é a matriz diagonal dada a seguir:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & & & & \\ & . & & & \\ & & . & & \\ & & & D_K & \\ & & & & D_v \end{bmatrix}, \tag{15}$$

sendo as matrizes diagonais de bloco $D_k = (S_k)^{-1} X_k$, k=1,...,K onde X_k e S_k são matrizes diagonais com elementos x_k e s_k respectivamente, e $D_v = (S_v)^{-1} X_v$ onde X_v e S_v matrizes diagonais com elementos x^v e s^v respectivamente.

Fazendo as multiplicações de bloco, a matriz $A' D (A')^t$ tem a seguinte estrutura:

$$A'D(A')^T = \begin{bmatrix} AD_1 A^T & O & O & AD_1 \\ & . & & . \\ & & . & . \\ O & & AD_K A^T & AD_K \\ D_1 A^T & . \quad . & D_K A^T & D_v + \sum_{k=1}^{K} D_k \end{bmatrix} \tag{16}$$

Seja B a matriz diagonal de bloco com $B_k = A\, D_k A^t$ para k = 1 ,..., K, e C uma matriz tal que:

$$C^T = [D_1 A^T, \ldots , D_K A^T],$$

e F a matriz diagonal dada por:

$$F = D_v + \sum_{k=1}^{K} D_k \, .$$

Então, da relação (16) e das denominações anteriores, tem-se:

$$A'D^2(A')^T = \begin{bmatrix} B & C \\ C^t & F \end{bmatrix} \tag{17}$$

Agora, desde que D_v e D_k , k = 1,...,K são matrizes diagonais e definidas positivas, então a matriz F é diagonal e definida positiva. Portanto, o sistema normal (7), sem considerar o índice da iteração j, e usando (17), pode ser expresso como segue:

$$\begin{bmatrix} B & C \\ C^t & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy^1 \\ dy^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

onde $dy = [\, dy^1 , dy^2 \,]^T$, sendo $h = [\, h_1 , h_2]^T$ e $h = A' S^{-1} X [\, \xi_c - X^{-1} \xi_\mu \,] + \xi_b$.

O sistema linear anterior (18) pode ser expresso como:

$$[\, F - C^T B^{-1} C \,]\, dy^2 = h_2 - C^T B^{-1} h_1, \tag{19}$$
$$B\, dy^1 = h_1 - C\, dy^2,$$

onde a matriz $(F - C^T B^{-1} C)^{-1}$ é conhecida como o complemento de Schur.

Seja $h_1 = [\, h_{11} , \ldots , h_{1K} \,]$, então temos de (19):

$$[\ F - C^T B^{-1} C\ ]\ dy^2 = h_2 - \sum_{k=1}^{K} (D_k A^T\ B_k^{-1})\, h_{1k}, \tag{20}$$

onde

$$F - C^T B^{-1} C = (D_v + \sum_{k=1}^{K} D_k\ - \sum_{k=1}^{K} (D_k A^T B_k^{-1} A D_k\ )\ . \tag{21}$$

Castro (2000) menciona por ser D_k matrizes simétrica e definida positiva e A uma matriz de rede de posto completo, então as matrizes $B_k = A\ D_k\ A^t$ é também simétrica e definida positiva, sendo assim, essa matriz B_k é decomposta usando o método de Cholesky, consultar por exemplo o livro de Nocedal e Wright (1996) e o trabalho de Mészáros (2005). A decomposição de Cholesky é dada por:

$$(AZ^{-1}XA^T) = U^TU,$$

em que U é uma matriz triangular superior.

Neste trabalho, usa-se um algoritmo alternativo de decomposição, denominado AINV, que consiste na aproximação da matriz inversa de B_k, ver Benzi et al. (2000), de tal forma que:

$$B_k^{-1} \cong Z_k\, P_k^{-1}\, Z_k^T, \tag{22}$$

em que Z_k é uma matriz triangular superior com elementos na diagonal de 1´s e P_k é uma matriz diagonal.

Este método de decomposição é aplicado na solução de sistema lineares que apareçem em problemas de equações diferenciais. Segundo seus autores, o método AINV é robusto embora sua aplicação leve um maior tempo computacional.

Apresenta-se a seguir o método de decomposição AINV de Benzi et al. (2000) para obter a matriz inversa da matriz $B_{k} = (AD_k\ A^T)$ de dimensão n x n, sem considerar o índice k, onde e_i é o i-ésimo vetor unitário base:

(a) seja $z_i^{(0)} = e_i$ $(1 \le i \le n)$;
(b) para i=1,2,...n fazer;
(c) $v_i = (\ ADA^T\ )\ z_i^{(i-1)}$;
(d) para $j = i, i+1, \ldots, n$ fazer;
(e) $p_j^{(i-1)} = v_i^T z_j^{(i-1)}$;
(f) final;
(g) se $i = n$ ir a (12);
(h) para $j = i+1, \ldots, n$ fazer;
(i) $z_j^{(i)} = z_j^{(i-1)} - (p_j^{(i-1)} / p_i^{(i-1)}\ )\ z_i^{(i-1)}$;
(j) final;
(k) final;
(l) seja $z_i = z_i^{(i-1)}$ e $p_i = p_i^{(i-1)}$, para $1 \le i \le n$. Retornar

$$Z = [\ z_1, z_2, \ldots, z_n\ ] \quad e \quad P = \mathrm{diag}\,(p_1, p_2, \ldots, p_n\ ).$$

No passo (c), pode-se observar que o método descrito acima realiza o produto matriz-vetor $(A\ D\ A^T\ )\ z_i$. Para o problema linear de fluxo em rede, não é necessário formar nem a matriz A nem a matriz $A\ D\ A^t$, esse produto pode ser realizado usando uma estrutura de dados que armazena o origem/destino de cada arco da rede. Assim pode-se aproveitar a estrutura que possuem essas matrizes para tratar problemas lineares de grande porte.

Agora, para resolver o sistema dado na relação (20), podería-se aplicar novamente a decomposição AINV à matriz $F - C^t\ B^{-1}\ C$ por ser simétrica e definida positiva. Neste trabalho, o sistema linear da relação dada em (20) é resolvido usando o algoritmo da gradiente conjugado pré-condicionado (GCP), e só precisa do produto matriz - vetor, ver por exemplo o livro de Nocedal e Wright (1999), e neste caso a matriz pré-condicionador simplesmente é a inversa da matriz diagonal F, de tal modo a reduzir o número de iterações do algoritmo do gradiente conjugado.

A seguir apresenta-se o algoritmo do gradiente conjugado pré-condicionado para determinar a solução do sistema linear da relação (20).

(a) $dy^2_0 = dy^2$;
(b) $r_0 = g - Udy^2_0$;
(c) $t_0 = F^{-1}\ r_0$;

(d) $p_0 = t_0$;
(e) $i = 0$;
(f) **Fazer** se o critério de parada não for satisfeito;
(g) $q_i = Up_i$;
(h) $\alpha_i = t_i^T r_i / p_i^T q_i$;
(i) $dy^2_{i+1} = dy^2_i + \alpha_i \; p_i$;
(j) $r_{i+1} = r_i - \alpha_i \; q_i$;
(k) $t_{i+1} = F^{-1} r_{i+1}$;
(l) $\beta_i = t_{i+1}^T r_{i+1} / t_{i+1}^T r_i$;
(m) $p_{i+1} = t_{i+1} + \beta_i p_i$;
(n) $i = i+1$;
(o) **Fim**;
(p) $dy^2 = dy^2_i$;

em que o vetor g é definido como o vetor do lado direito da relação (20), agora expresso em função das matrizes de decomposição do processo de Benzi et al. (2000), isto é:

$$g \cong h_2 - \sum_{k=1}^{K} (D_k A^T Z_k P_k^{-1} Z_k^T) h_{1k},$$

e U é a matriz $U = F - C^T B^{-1} C$, dada na expressão (21).
Uma vez determinada dy^2 pelo processo iterativo anterior, o sistema $B\, dy^1 = h_1 - C\, dy^2$ de (19) pode ser resolvido da seguinte forma:

$$dy^1 = B^{-1} (h_1 - C\, dy^2),$$

ou usando (22)

$$dy^1_k \cong (Z_k P_k^{-1} Z_k^T) [h_{1k} - (A D_k) dy^2], \quad k = 1,...,K,$$

onde $dy^1 = [dy^1_1, \ldots , dy^1_K]$ e $h_1 = [h_{11} , \ldots , h_{1K}]^T$.
Desta forma, tem-se determinada o vetor $dy = [dy^1 , dy^2]^T$, e pode-se calcular as outras variáveis ds e dx usando a relação (8), e um novo ponto interior (x,y,s) usando a relação (9) é determinada. Atualiza-se o parâmetro de barreira μ e o processo repete-se até que um certo critério de parada seja alcançado.

5. Experiência Computacional

Para resolver o problema de fluxo em rede com múltiplos produtos, redes de diversas dimensões foram analisadas baseadas na rede básica encontrada no trabalho de Nagurney (1984), pp. 476. Essa rede consiste de 20 nós e 28 arcos e é usada para determinar o equilíbrio de fluxo de tráfego formulado como um problema de inequações variacionais. Essa rede básica foi depois estendida para formar redes de grande porte. Um programa especifico codificado em FORTRAN foi realizado de tal modo a estender essa rede básica para redes de diferentes dimensões.
Um mesmo ponto interior inicial, não necessáriamente viável, é usado em todos os experimentos computacionais do método de pontos interiores primal - dual, dado a seguir:

$$x^0 = e, \quad y^0 = -0{,}25e, \quad z^0 = e,$$

onde o vetor e = (1,...,1,...,1).
Podería-se usar outro ponto interior inicial, viável ou não, para tentar acelerar o método primal – dual, mas o esforço ou o tempo computacional do método primal – dual podería aumentar para determinar esse ponto inicial, sendo este o outro passo crucial nos métodos de pontos interiores. Mehrotra (1992) apresenta uma forma de determinar esse ponto interior no seu clássico trabalho de resolver um programa linear usando o método de pontos interiores preditor – corretor.
Em todos os testes computacionais o valor δ da relação (13) é $\delta = 0{,}99995$.
O critério de parada, no método estudado, é estabelecido em termos de proximidade do valor da função objetivo no ponto atual e no ponto anterior, com uma tolerância de erro pré-estabelecida. Também usa-se como critério de parada a proximidade do valor da função

objetivo do problema primal e do problema dual, isto é para ε o erro pré-estabelecido, digamos $\varepsilon = 10^{-12}$:

$$\frac{|c^T x - b^T y|}{1 + |b^T y|} \leq \varepsilon,$$

O método de pontos interiores primal – dual, para determinar a solução do problema de múltiplo produto, foi inteiramente codificado na linguagem FORTRAN com dupla precisão. Todos os experimentos computacionais foram realizados em um microcomputador PC AMD Athlon com 1,0 GB de RAM e 2,40 GHz de freqüência rodando a plataforma Windows XP.
Como mencionado anteriormente, o sistema linear dado na relação (20) é resolvido usando o método do gradiente conjugado com uma matriz pré-condicionador. Para isso, precisa-se determinar a inversa da matriz $B_k = A\, D_k A^t$ para cada produto k=1,...,K. A inversa de cada uma dessas matrizes é decomposta usando o método mencionado de Benzi et al. (2000), isto é, $B_k^{-1} \cong Z_k\, P_k^{-1}\, Z_k^t$. Cada elemento da matriz triangular superior Z_k é armazenado em um vetor usando a seqüência z_{11}, z_{12}, z_{22}, z_{13}, z_{23}, etc., para cada produto k. Desta forma, todas as outras matrizes envolvidas no método primal – dual são tratadas como vetores.
A seguir, apresentam-se os resultados computacionais usando o método de pontos interiores primal – dual para determinar o fluxo de rede de diferentes dimensões e variando o número de produtos.

Número Produtos	700	800	1000
Número de Arcos	305	162	410
Número de Nós	165	90	220
Total variáveis	213500	129600	410000
Valor função primal	5249999,99117	4319999,99832	8999999,96940
Valor função. dual	5250000,04765	4320000,21988	9000000,21693
Número Iterações	18	15	18
Tempo (segundos)	1398,296	273,797	5511,719

Tabela 1 –Método Primal-Dual para Múltiplos Produtos

Pode-se observar da tabela 1, que a diferença entre os valores da função objetiva do correspondente problema linear primal e dual é mínima. Por outro lado, o número de iterações é tipicamente muito pequeno quando aplicamos este método de pontos interiores primal –dual para o problema de múltiplos produtos, neste caso para problema variando de 700 a 1000 produtos. Observe-se também da tabela 1 que tem-se problemas com 410000 variáveis de decisão sem contar com as variáveis de folga. Em todos os casos estudados, o parâmetro de barreira μ é menor que 10^{-10}. Pode-se finalizar mencionando que este método de pontos interiores primal – dual comporta-se muito bem para o caso do problema de fluxo em rede de diferentes dimensões e variando o número de produtos..

6. Conclusões

Este artigo apresentou o método de pontos interiores primal – dual para resolver o problema de programação linear de grande porte como é o caso do problema de fluxo em rede para múltiplos produtos. O método de decomposição AINV é usado na solução de um sistema linear de equações para cada produto. Depois o método iterativo do gradiente conjugado é aplicado para um sistema linear complexo envolvendo todas essas decomposições. O método estudado explora a estrutura matricial do problema, não sendo necessária formar as respectivas matrizes envolvidas no processo de resolução do correspondente sistema linear, para cada um dos produtos.
Os resultados numéricos realizados em algumas redes de diferentes dimensões e número de produtos confirmam a eficiência do método de pontos interiores primal - dual.
Pode-se mencionar, como futuroa trabalhos, a aplicação dos outros métodos de resolução do sistema linear, seja o método de Cholesky ou usar o sistema aumentado.

Referências:

AHUJA, A.; MAGNANTI, T. & ORLIN, J. *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*, Prentice – Hall, Inc. New Jersey, 1993.
ALI, A; HELGASON, R.; KENNINGTON, J. & LALL, H. *Computational Comparison among Three Multicommodity Network Flow Algorithms,* Operations Research, Vol. 28, p. 995 - 1000, 1980.
ALI, A.; BARNETT, D.; FARHANGIAN, K.; KENNINGTON, J.; PATTY, B; SHETTY, B.; McCARL, B. & WONG, P. *Multicommodity Network Problems: Applications and Computations*, IIE Transactions, Vol. 16, p. 127 – 134, 1984.
ANDERSEN, E.; GONDZIO, J.; MÉSZÁROS, C. & XU, X. *Implementation of Interior - Point Methods for Large Scale Linear Programs,* Interior Point Methods of Mathematical Programming, T. Terlaky, ed. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, p. 189-252, 1996.
ASSAD, A. *Multicommodity Network Flows: A Survey,* Networks, Vol. 8, p. 37 - 91, 1978.
BAI, Z & WANG, Z. *Restrictive Preconditioners for Conjugate Gradient Methods for Symmetric Positive Definite Linear Systems.* Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 187, p. 202-226, 2006
BENZI, M.; CULLUM, J. & TUMA, M. *Robust Approximate Inverse Preconditioning for the Conjugate Gradient Method,* SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 22, ṅ. 4, p. 1318 – 1332, 2000.
BERGAMASCHI, L.; GONDZIO, J. & ZILLI, G. *Preconditioning Indefinite Systems in Interior Point Methods for Optimization*, Computational Optimization and Applications, Vol. 28, p.149 – 171, 2004.
CASTRO, J. *A Specialized Interior Point Algorithm for Multicommodity Network Flows,* SIAM Journal on Optimization, Vol. 10, n. 3, p. 852 – 877, 2000.
CASTRO, J. *Solving Difficult Multicommodity Problems with a Specialized Interior-Point Algorithm*, Annals of Operations Research, Vol. 124, p. 35 – 48, 2003.
CASTRO, J. *An Interior-Point Approach for Primal Block-Angular problems*, Computational Optimization and Applications, Vol. 36, p. 195 – 219, 2007.
CHARDAIRE, P. & LISSER, A. *Simplex and Interior Point Specialized Algorithms for Solving Nonoriented Multicommodity Flow Problems*, Operations Research, vol. 50, n. 2, p. 260 – 276, 2002..
CHAI, J & K. TOH, K. *Preconditioning and Iterative Solution of Symmetric Indefinite Linear Systems arising from Interior Point Methods for Linear Programming,* Computational Optimization and Applications, Vol. 36, p. 221-247, 2007.
CHOI, I. & GOLDFARB, D. *Solving Multicommodity Network Flow Problems by an Interior Point Method,* Large-Scale Numerical Optimization, T. Coleman e Y. Li, Eds, SIAM, Philadelphia, PA., p. 58 – 69, 1990
DETLEFSEN, N. & WALLACE, S. *The Simplex Algorithm for Multicommodity Networks,* Networks, Vol. 39, n. 1, p. 15 – 28, 2002.
DURAZZI, C. & RUGGIERO, V. *Indefinitel Preconditioned Conjugate Gradient Method for Large Sparse Equality and Inequality Constrained Quadratic Problems*. Numerical Linear Algebra with Applications, Vol. 10, p. 673- 688, 2003.
FARVOLDEN, J.; POWELL, W. & LUSTIG, I. *A Primal Partitioning Solution for the Arc-Chain Formulation of a Multicommodity Network Flow Problem*, Operations Research, Vol. 41, n. 41, p. 669 – 693, 1993.
JONES, K.; LUSTIG, I.; FARVOLDEN, J. & POWELL, W. *Network Flows: The Impact of Formulation on Decomposition*, Mathematical Programming, Vol. 62, p. 95 – 117, 1993.
KARMARKAR, N. *A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming*, Combinatorica, Vol. 4, p. 373 – 395, 1984.
KELLER, C.; GOULD, N. & WATHEN, A. *Constraint Preconditioning for Indefinite Linear Systems.* SIAM Journal Matrix Analysis and Applications, Vol. 21, p. 1300 - 1317, 2000.

KENNINGTON, J. *A Survey of Linear Cost Multicommodity Network Flows*, Operations Research, Vol. 26, p. 209 – 236, 1978.
KENNINGTON, **J**. & **HELGASON, R.** *Algorithms for Network Programming*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1980.
LUSTIG, I. & LI, G. *An Implementation of a Parallel Primal-Dual Interior Point Method for Block – Structured Linear Programs*, Computational Optimization and Applications, Vol. 1, p. 141 – 161, 1992.
MEHROTRA, S. *On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point* , SIAM Journal on Optimization, vol. 2, p. 575 – 601, 1992.
MÉSZÁROS, C. *The Cholesky Factorization in Interior Point Methods,* Computers and Mathematics with Applications, vol. 50, p. 1157 – 1166, 2005.
NAGURNEY, A. *Comparative Tests of Multimodal Traffic Equilibrium Methods*, *Transportation Research*, Vol.18B, p. 469 - 485, 1984.
NOCEDAL, J. & WRIGHT, S. *Numerical Optimization*, Springer,1999.
PORTUGAL, L.; RESENDE, M.; VEIGA, G. & JÚDICE. J. *A Truncated Primal-Infeasible Dual-Feasible Network Interior Point Method*, Networks, Vol. 35, n. 2, p. 91 – 108, 2000.
PORTUGAL, L.; RESENDE, M.; VEIGA, G.; PATRICIO, J. & JÚDICE, J. *FORTRAN Subroutines for Network Flow Optimization using an Interior Point Algorithm,* Pesquisa Operacional, Vol. 28, n. 2, p. 243 – 261, 2008.
SCHNEUR, R. & ORLIN, J. *A Scaling Algorithm for Multicommodity Flow Problems*, Operations Research, Vol. 42, n. 2, p. 231 – 246, 1998.
VANDERBEI, R. *Linear Programming*, 3rd. Ed. Springer, Boston, 2008
WRIGHT, **S**. *Primal-Dual Interior-Point Methods,* SIAM, Philadelphia, 1997.