

AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DO GRÁFICO DE CONTROLE DE Z EM PROCESSOS BIVARIADOS

Roberto Campos Leoni

Departamento de Produção, Universidade Estadual Paulista - UNESP
Guaratinguetá, 12516-410, SP, Brasil
e-mail: rcleoni@yahoo.com.br

Antonio Fernando Branco Costa

Departamento de Produção, UNESP
Guaratinguetá, 12516-410, SP, Brasil
e-mail: fbranco@feg.unesp.br

Marcela Aparecida Guerreiro Machado

Departamento de Produção, UNESP
Guaratinguetá, 12516-410, SP, Brasil
e-mail: marcela@feg.unesp.br

Resumo:

Os gráficos de controle são alguns dos métodos mais utilizados para monitorar processos e identificar variações derivadas de causas especiais. No controle estatístico de qualidade tradicional, assume-se que as observações consecutivas do processo são independentes e identicamente distribuídas; contudo, em muitos processos industriais, essa hipótese é violada por apresentar autocorrelação. Um processo pode envolver muitas variáveis e apresentar frequentemente autocorrelação. Este artigo avalia o efeito da autocorrelação em processos bivariados representados pelo modelo VAR(1). O desempenho dos gráficos de controle de Z, T^2 e MEWMA é afetado pela autocorrelação, sendo difícil diferenciar entre a presença de uma causa comum ou uma causa especial de variação no processo. Verificou-se que o gráfico de MEWMA obteve o melhor desempenho na maioria dos cenários, contudo, em processos com altos níveis de autocorrelação, o gráfico de Z é melhor quando o deslocamento no vetor de médias é igual em ambas as variáveis.

Palavras-chave: controle estatístico de processos (CEP); autocorrelação; modelo VAR(1)

Abstract:

The control charts has been one of the widely used methods to monitor processes and to aid in detecting variation caused by extrinsic factors (special cause variation). A basic assumption in traditional statistical quality control is that the observations are independently and identically distributed; however, this assumption may not be valid in many industry processes. Observations are often serially correlated; moreover, these processes involve multiple variables. In this paper we study the effect of the serial correlation in a bivariate process modeled by VAR(1) model; the performance of the Z, T^2 and MEWMA control charts was affect by serial correlation, making it difficult to differentiate between common causes and special causes of variation. It was found that the MEWMA control chart has the best performance in most cases; however, in processes with high serial correlation the Z chart is better than the T^2 and MEWMA control charts when the shift in the mean vector are identical in both the X and Y variables.

Keywords: statistical process control (SPC); autocorrelation; VAR(1) model

1. INTRODUÇÃO

O controle estatístico de processos auxilia gestores a compreender, monitorar e melhorar continuamente a qualidade de produtos e serviços. Na década de 30, Shewhart (1931) criou os gráficos de controle para monitorar processos e, ainda naquela época, reconheceu a necessidade de monitorar processos considerando o controle multivariado. Atualmente, o monitoramento de várias características de um processo se destaca no cenário industrial, pois podem afetar a qualidade final de um produto ou serviço.

Embora muito conhecido no ambiente fabril, as condições para uso dos gráficos de controle podem ser violadas em alguns casos. De acordo com Mason e Young (2002), muitas operações industriais de fluxo contínuo apresentam autocorrelação e uma das possíveis causas é o desgaste gradual de componentes críticos do processo. Kim et al. (2010) afirmam que a hipótese de independência entre as observações de uma variável pode ser violada pelas altas taxas de produção que geram correlação e dependência entre as observações de produtos vizinhos segundo o instante de fabricação.

O monitoramento de processos multivariados cujas observações são autocorrelacionadas aparece em publicações recentes. Mastrangelo e Forrest (2002) disponibilizaram um programa para gerar dados autocorrelacionados onde é possível simular deslocamento no valor da média da variável sob monitoramento. Pan e Jarrett (2007) e Jarrett e Pan (2007) propuseram o uso de resíduos do modelo $VAR(p)$ para monitorar processos autocorrelacionados. A técnica requer o ajuste do modelo aos dados do processo para posterior uso dos resíduos no gráfico de T^2 . Arkat et al. (2007) fazem uso de redes neurais artificiais para monitorar processos multivariados autocorrelacionados. Issam e Mohamad (2008) propõem o uso do método SVR (*support vector regression*) para monitorar mudanças no vetor de médias em processos autocorrelacionados através do gráfico de controle MCUSUM. Hwang e Wang (2010) estabelece o uso de redes neurais que são capazes de identificar deslocamentos no vetor de médias de processos autocorrelacionados. Há vários outros trabalhos sobre monitoramento de processos autocorrelacionados; Apley and Tsung (2002), Kalgonda e Kulkarni (2004), Jiang (2004), Vargas et al. (2009) e Chen e Nembhard (2011) são alguns deles.

Kalgonda e Kulkarni (2004) apresentaram o gráfico de controle de Z para monitorar observações que seguem um modelo $VAR(1)$. A vantagem do gráfico de Z é que ele identifica a característica de qualidade que sofre alteração em seu valor médio, ou seja, o gráfico sinaliza qual das características de qualidade foi afetada por uma causa especial que tenha provocado alteração no valor médio. Os autores expõem uma técnica para calcular de forma empírica o limite de controle do gráfico de Z , porém, não avaliam o desempenho do gráfico proposto e não o comparam com outro gráfico de controle multivariado.

Portanto, este artigo tem como objetivo avaliar o desempenho do gráfico de controle de Z para duas características de qualidade mensuráveis X e Y quando existe correlação entre as observações de X e Y e há dependência no tempo entre as observações de X e também entre as observações de Y e esta estrutura de correlação e autocorrelação é de um modelo $VAR(1)$; os resultados são comparados com dois esquemas concorrentes conhecidos no ambiente fabril: o gráfico de T^2 e o gráfico de $MEWMA$. Considerou-se na avaliação do desempenho dos gráficos de controle que o deslocamento na média seja o mais importante em todo o processo e que o vetor de médias e a matriz de covariância sejam conhecidos ou estimados com precisão. Utilizou-se como medida para avaliar o desempenho o número médio de amostras (NMA) até o sinal de um deslocamento no vetor de médias do processo.

O artigo está organizado da seguinte forma: apresenta-se, na seção 2, o modelo que descreve as características de qualidade de um processo autocorrelacionado; na seção 3 os gráficos de controle de Z , T^2 e $MEWMA$ e o método utilizado para calcular o limite de

controle dos gráficos quando os dados seguem o modelo $VAR(1)$ e, na seção 4, avaliam-se os desempenhos dos gráficos na presença da autocorrelação.

2. MODELO QUE DESCREVE AS CARACTERÍSTICAS DE QUALIDADE

Os procedimentos clássicos de controle em processos multivariados consideram a hipótese básica de que as observações seguem distribuição normal multivariada e sejam independentes, com vetor de médias μ_0 e matriz de variância-covariância Σ_x .

$$X_t = \mu_0 + e_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1)$$

onde X_t representa as observações através de um vetor de ordem $p \times 1$ (p é o número de variáveis); e_t são vetores aleatórios independentes de ordem $p \times 1$ com distribuição normal multivariada cuja média é zero e matriz de variância-covariância Σ_e .

A hipótese de independência é violada em muitos processos de manufatura, o que torna a equação (1) inadequada para representar tais observações. Vetores autoregressivos de primeira ordem, ou $VAR(1)$, equação (2), vêm sendo usados para modelar processos multivariados com correlação temporal entre observações de uma mesma variável e correlação entre observações de diferentes características de qualidade (MASTRANGELO e FORREST, 2002; BILLER e NELSON, 2003; KALGONDA e KULKARNI, 2004; ARKAT e NIAKI, 2007; JARRETT e PAN, 2007; ISSAM e MOHAMAD, 2008; PFAFF, 2008; NIAKI e DAVOODI, 2009; HWARNG e WANG, 2010; KIM *et al.*, 2010; KALGONDA, 2012).

Em processos multivariados autocorrelacionados, o modelo $VAR(1)$ é assim representado:

$$X_t - \mu_0 = \Phi(X_{t-1} - \mu_0) + e_t \quad (2)$$

onde X_t é o vetor de dados de ordem $p \times 1$; μ_0 é o vetor de médias de ordem $p \times 1$ e Φ é uma matriz com os parâmetros autorregressivos de ordem $p \times p$ e e_t são vetores aleatórios independentes de ordem $p \times 1$ com distribuição normal multivariada cuja média é zero e matriz de variância-covariância Σ_e .

Se Φ é uma matriz nula, a equação (2) se reduz a equação (1), ou seja, tem-se o modelo clássico para dados independentes ao longo do tempo. Caso contrário, os dados serão dependentes ao longo do tempo e a estrutura de variação do modelo é representada pela matriz de covariância cruzada (SHUMWAY e STOFFER, 2006). Sob a hipótese de que processo seja estacionário, $E(X_t) = \mu_0$, para todo t , a matriz de covariância cruzada será:

$$E\left[(X_t - \mu_0)(X_{t-h} - \mu_0)'\right] = \Gamma_x(h) \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Ser estacionário significa que μ_0 é constante para todo X_t e a matriz de covariância cruzada não depende de t , depende apenas de h que representa o intervalo ao longo do tempo entre o vetor X_t e X_{t-h} .

A matriz $\Gamma_x(h)$ é formada pelos elementos $\gamma_{ij}(h)$ dados por:

$$\gamma_{ij}(h) = E\left[(X_{it} - \mu_0)(X_{jt-h} - \mu_0)'\right] \quad i, j = 1, 2, \dots, p \quad (4)$$

Como a matriz de covariância cruzada depende originalmente da unidade de medida das variáveis envolvidas, sua interpretação por vezes não é simples. Uma forma mais conveniente de avaliar a relação das variáveis no processo é dada pela utilização da matriz de correlação cruzada:

$$\rho_x(h) = D^{-1/2} \Gamma_x(h) D^{-1/2} \quad (5)$$

onde D é a matriz diagonal formada pelos elementos $\gamma_{ij}(h)$, para todo $i=j$, da matriz $\Gamma_x(h)$.

A matriz de covariância cruzada para $h=0$, $\Gamma_x(0)$, quando Φ e Σ_e são conhecidos, pode ser obtida pela relação de *Yule-Walker* (LTKEPOHL, 2005):

$$\Gamma_x(0) = \Phi\Gamma_x(0)\Phi' + \Sigma_e \quad (6)$$

Supondo que X_t seja um vetor de dados com distribuição p -variada e siga o modelo descrito na equação (2), de acordo com Kalgonda e Kulkarni (2004) e Kalgonda (2012),

$$X_t \sim N_p[\mu_0; \Gamma_x(0)] \quad (7)$$

Se o processo está em controle estatístico, X_t segue uma distribuição normal multivariada com vetor de médias μ_0 e matriz de covariância cruzada $\Gamma_x(0)$.

3. GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS

O gráfico de controle é um modo de se exibir dados (ou de uma estatística calculada a partir dos dados) graficamente com a finalidade de distinguir causas comuns das causas especiais de variação. Variabilidade é inevitável, pois quando produzimos diferentes unidades de um determinado produto, por mais bem controlada e projetada a produção, há a presença de um componente impossível de ser extinto que é a variabilidade natural do processo, fruto de causas comuns ou aleatórias que atuam durante o processo de produção. Este tipo de causa não exige nenhuma ação gerencial, pois o processo é dito estar em controle estatístico. Ocasionalmente, podem ocorrer mudanças que afetem a distribuição da variável aleatória monitorada, ou seja, alguma perturbação gerada por causas especiais acaba modificando a média (mudança do valor alvo) e aumentando o grau com que os dados estão dispersos. Causas especiais são problemas que devem ser diagnosticados e eliminados de um processo, pois neste caso há irregularidade. O seu surgimento pode ser provocado por vários fatores: desajuste no equipamento, falta de experiência dos operadores, matéria prima de outro fornecedor e etc.

Com o uso simultâneo dos gráficos de X para controlar duas ou mais características de qualidade é possível identificar qual delas tem sido afetada pela causa especial. Porém, quando as variáveis são dependentes, ou correlacionadas, a obtenção dos limites de controle dos gráficos de X deixa de ser trivial (MONTGOMERY, 2004), pois a probabilidade de que os valores de X_1, X_2, \dots, X_p , estejam dentro dos limites de controle não pode ser obtida por:

$$(1-\alpha)^p \quad (8)$$

onde p é o número de variáveis e α a probabilidade de alarme falso.

Portanto, calcular o LC de um gráfico sem considerar a presença da autocorrelação e/ou correlação entre as características de qualidade nos conduz a praticar uma taxa de alarmes falsos diferente da desejada. Nesta seção, apresentam-se os gráficos de controle de Z , T^2 e $MEWMA$ e o método utilizado para obter os limites de controle dos gráficos quando há presença de autocorrelação.

3.1 GRÁFICO DE CONTROLE DE Z

Kalgonda e Kulkarni (2004) propuseram um gráfico de controle denominado gráfico de Z para monitoramento do vetor de médias de processos multivariados autocorrelacionados. O gráfico mantém o erro global α e permite a identificação das variáveis cujas médias se alteraram com o surgimento de uma causa especial. Os autores adaptaram a técnica de controle estatístico do vetor de médias para observações independentes proposta por Hayter e Tsui (1994) e consideram que a autocorrelação no processo segue o modelo $VAR(1)$.

No instante de tempo t , a estatística de monitoramento Z_t do gráfico de Z é dada por

$$Z_t = \text{Max}_{1 \leq i \leq p} [Z_{it}], \text{ onde:}$$

$$Z_{it} = \frac{X_{it} - \mu_{i0}}{\gamma_{ii,0(0)}}; \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad t = 1, 2, \dots \quad (9)$$

sendo X_{it} o valor da i -ésima variável no instante de tempo t e $\gamma_{ii,0(0)}$ o i -ésimo elemento da diagonal da matriz de covariância cruzada para $h=0$.

Para um dado valor de α , o limite de controle (LC) do gráfico de Z é dado por:

$$\Pr\left[|Z_{it}| \leq LC; i = 1, 2, \dots, p \mid \mu_i = \mu_{i0}\right] = 1 - \alpha \quad (10)$$

O processo é considerado em controle estatístico se $Z_t \leq LC$. Caso contrário, há indícios que a média de pelo menos uma das p variáveis se alterou.

Kalgonda e Kulkarni (2004) obtiveram o LC através da distribuição empírica da estatística Z_t . No entanto, este método não garante a manutenção da taxa de alarmes falsos. Neste artigo, calculou-se o valor para o LC através dos passos apresentados no Apêndice A.

3.2 GRÁFICO DE CONTROLE DE T^2

Os gráficos de controle propostos por Hotelling (1947) são, possivelmente, os mais conhecidos e utilizados no ambiente fabril. São simples e podem ser vistos como uma extensão do gráfico para a média proposto por Shewhart quando há mais de uma característica de qualidade a ser monitorada.

A estatística de monitoramento T_t^2 usada no gráfico de controle de T^2 é definida por:

$$T_t^2 = (X_t - \mu_0)' \Sigma_e^{-1} (X_t - \mu_0) \quad (11)$$

onde X_t é o vetor com os dados monitorados; μ_0 é o vetor de médias com o processo em controle e Σ_e é matriz de variância-covariância.

Quando a estatística T_t^2 é menor que o LC, o processo mantém-se em controle estatístico e possui distribuição *qui-quadrado* com p graus de liberdade ($\chi_{(p)}^2$) quando o vetor de médias e a matriz de covariâncias são conhecidos.

Se uma causa especial atua na média do processo, deslocando-a para um novo patamar, o vetor $(X_t - \mu_0)$ sofrerá deslocamento de magnitude δ .

$$(X_t - \mu_0) = (X_t - \mu_0 + \mu_1 - \mu_1) = (X_t - \mu_1 + \delta) \quad (12)$$

onde μ_1 é a do processo fora de controle; μ_0 é a do processo em controle e $\delta = (\mu_1 - \mu_0)$ indica a magnitude do deslocamento na média. Com o deslocamento, a estatística T_t^2 possui distribuição *qui-quadrado* não central ($\chi_{(p,\lambda)}^2$).

Muitos trabalhos que tratam de esquemas de controle de processos multivariados utilizam o parâmetro de não centralidade (λ) como medida de deslocamento no vetor de médias do processo (ALT, 1985; APARISI, 1996; APARISI e HARO, 2001; MASON, e YOUNG, 2002).

$$\lambda = (\mu_1 - \mu_0)' \Sigma_e^{-1} (\mu_1 - \mu_0) \quad (13)$$

Esta medida possui distribuição *qui-quadrado* não central com p graus de liberdade e parâmetro de não centralidade λ . Observa-se que λ é função do deslocamento na média e da matriz de covariância. Desta forma, o desempenho do gráfico de controle de T^2 é calculado pela equação:

$$NMA = \left\{ 1 - \left[\Pr(\chi_{(p,\lambda)}^2) < LSC \right] \right\}^{-1} \quad (14)$$

Com a presença da autocorrelação no processo, o limite de controle do gráfico de T^2 não possui distribuição *qui-quadrado* com p graus de liberdade ($\chi_{(p)}^2$) quando o vetor de médias e a matriz de covariâncias são conhecidos. Da mesma forma, com o deslocamento, a estatística T_t^2 não possui distribuição *qui-quadrado* não central ($\chi_{(p,\lambda)}^2$). Utilizou-se, então, um método

alternativo denominado aqui por busca binária, em que diferentes valores para o LC são escolhidos até que um número médio de alarmes falsos (NMAF) desejado seja alcançado. Este método exige um grande esforço computacional, mas permite que o usuário obtenha um valor desejado para o NMAF que neste artigo foi fixado em 200. O método apresentado no Apêndice A foi usado com diferentes valores dos parâmetros da matriz de autocorrelação e da matriz de covariância do erro do modelo bivariado $VAR(I)$ para, através de simulação, calcular o LC e o desempenho do gráfico de controle.

3.3 GRÁFICO DE CONTROLE DE MEWMA

O gráfico de controle de *MEWMA* é uma extensão multivariada do gráfico univariado médias móveis com ponderação exponencial (*EWMA*). O gráfico de *MEWMA* foi inicialmente proposto por Lowry et al. (1992) e é baseado nas informações históricas do processo, o que o faz capaz de detectar mudanças menores no vetor de médias do processo.

A estatística de monitoramento do gráfico de controle de *MEWMA* é dada por:

$$T_t^2 = (E_t - \mu_0)' \Sigma_E^{-1} (E_t - \mu_0) \quad (15)$$

em que,

$$E_t = \lambda X_t + (1 - \lambda) E_{t-1} \quad (16)$$

e

$$\Sigma_E = \frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2t}] \Sigma_e \quad (17)$$

onde λ ($0 < \lambda < 1$) é uma constante que torna a estatística E_t uma média ponderada de dados passados. Valores grandes para λ fazem com que as observações recentes possuam maiores pesos no cálculo E_t . Nos valores pequenos para λ , os dados históricos, ou seja, anteriores a última observação, têm peso grande no cálculo de E_t .

Para avaliação do desempenho do gráfico de *MEWMA* na presença de autocorrelação, utilizou-se o método apresentado no Apêndice A. O LC foi calculado por uma busca binária, condicionando o valor do NMAF=200 e o desempenho foi calculado por simulação.

4. DESEMPENHO DO GRÁFICO DE Z , T^2 E *MEWMA* NA PRESENÇA DE AUTOCORRELAÇÃO

O desempenho de um gráfico de controle pode ser avaliado em função do número de amostras que o gráfico utiliza para detectar um deslocamento na característica que se deseja monitorar. Baseando-se no modelo $VAR(I)$, o vetor de médias do processo quando em controle (μ_0) pode sofrer deslocamentos da ordem de δ para um novo patamar (μ_1), onde δ é um vetor de ordem $(px1)$ e cada elemento representa a magnitude do deslocamento no valor médio da p -ésima variável. Para se ter uma ideia do que ocorre na média do processo após um deslocamento, o modelo $VAR(I)$ é aqui representado em função do vetor de erros (e_t) e do vetor de médias (μ_0).

$$X_t = \mu_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^i e_{t-i} \quad (18)$$

Se o deslocamento ocorrer no vetor de médias do processo em controle, em algum instante de tempo $t = T$, então a média de X_t mudará de μ_0 para:

$$\mu_0 + \delta \quad (19)$$

Sem perda de generalidade, considerando-se $\mu_0 = 0$, a mudança no vetor de médias pode ser representada em três estágios:

$$X_t = \begin{cases} \Phi X_{t-1} + e_t & t < T \\ \delta + \Phi X_{t-1} + e_t & t = T \\ (I - \Phi)\delta + \Phi X_{t-1} + e_t & t > T \end{cases} \quad (20)$$

O gráfico de melhor desempenho será o que detectar com maior rapidez, a partir de um instante de tempo $t = T$, alteração no valor médio das características de qualidade que estão sendo monitoradas.

Na avaliação do desempenho dos gráficos de controle, considerou-se que o deslocamento seja descrito pela equação (19). Por exemplo, em um processo bivariado, a ocorrência de uma causa especial desloca o vetor de médias $\mu_0 = (\mu_{01} = 0; \mu_{02} = 0)$ para um novo patamar $\mu_1 = (\mu_{01} + \delta_{1\mu}; \mu_{02} + \delta_{2\mu})$.

No Apêndice B, apresentam-se as Tabelas B1 e B2 com as estatísticas de desempenho dos gráficos apresentados na seção 3. Na avaliação do desempenho através do modelo $VAR(1)$ optou-se por valores de a e b da matriz $\Phi = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ variando de 0,0 a 0,9 e $\rho = 0,5$ na matriz $\Sigma_e = \begin{bmatrix} 1 & \rho = 0,5 \\ \rho = 0,5 & 1 \end{bmatrix}$. Os deslocamentos considerados neste trabalho são todos inferiores a 2 ($\delta \leq 2,0$).

A Figura 1 ilustra o desempenho dos gráficos de Z , T^2 e $MEWMA$. Vinte e cinco tipos de deslocamentos (cenários) no vetor de médias foram considerados, veja o Apêndice B. De um modo geral, observa-se que o aumento do grau de autocorrelação aumenta o NMA, afetando o desempenho dos gráficos em todos os cenários.

Por exemplo, considere o deslocamento no vetor de médias da ordem de $\mu_1 = (\mu_{01} + 0,5; \mu_{02} + 1,0)$, o NMA do gráfico de Z é igual a 36,54 para $a=0,0$ e $b=0,0$; 54,53 para $a=0,5$ e $b=0,5$ e 152,08 para $a=0,9$ e $b=0,9$. A queda no desempenho também pode ser observada nos gráficos de T^2 e $MEWMA$ (ver as Tabelas B1 e B2 do Apêndice B).

Comparando os três gráficos através de um deslocamento no vetor de médias da ordem de $\mu_1 = (\mu_{01} + 1,0; \mu_{02} + 1,5)$, o NMA é igual a 11,57 (Z), 15,12 (T^2) e 4,22 ($MEWMA$) para $a=0,0$ e $b=0,0$; 21,76 (Z), 27,02 (T^2) e 13,97 ($MEWMA$) para $a=0,5$ e $b=0,5$ e 105,96 (Z), 125,18 (T^2) e 116,06 ($MEWMA$) para $a=0,9$ e $b=0,9$. O gráfico de controle de $MEWMA$ tem desempenho superior quando $a \leq 0,5$ e $b \leq 0,5$.

Na medida em que o grau de autocorrelação aumenta ($a \geq 0,5$ e $b \geq 0,5$), o gráfico de controle de $MEWMA$ deixa de ser sempre o melhor esquema, perdendo em alguns casos para o gráfico de controle de Z . Por exemplo, um deslocamento no vetor de médias da ordem de $\mu_1 = (\mu_{01} + 1,5; \mu_{02} + 2,0)$, o NMA é igual a 74,59 (Z), 89,52 (T^2) e 84,60 ($MEWMA$) para $a=0,9$ e $b=0,9$.

Outro ponto a ser observado é que se o deslocamento for idêntico em ambas as variáveis e o nível de autocorrelação for alto ($a=b=0,9$), o desempenho do gráfico de Z é sempre melhor que os demais gráficos aqui avaliados.

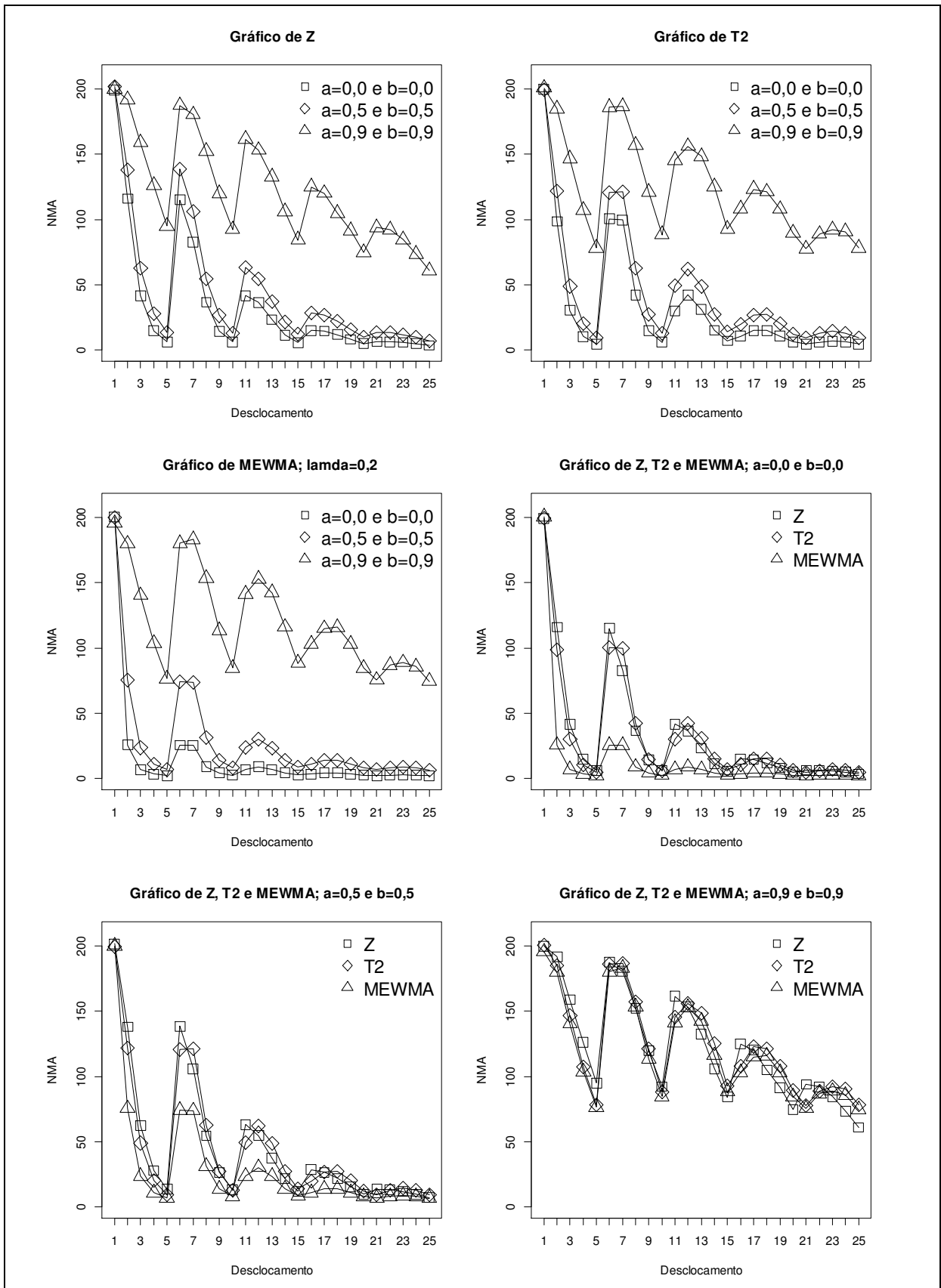


Figura 1 – Desempenho dos gráficos de Z, T^2 e MEWMA. (NOTA: os valores dos deslocamentos 1 a 25 são apresentados na Tabela B1 do Apêndice B)

5. CONCLUSÃO

Este artigo avaliou o efeito da autocorrelação nos gráficos de controle de Z , T^2 e $MEWMA$. A presença da autocorrelação em processos multivariados afeta o desempenho dos gráficos de controle tradicionais, reduzindo a capacidade em detectar desvios no vetor de médias.

É possível estimar o limite de controle dos gráficos aqui apresentados através de extensa pesquisa binária, escolhendo-se diferentes valores para o limite de controle até que o NMAF desejado seja alcançado. Baseando-se nessa técnica, o desempenho dos gráficos foi analisado através do número médio de amostras até o sinal de um deslocamento no vetor de médias do processo.

Apesar de o gráfico de controle de $MEWMA$ possuir melhor desempenho na maioria dos cenários aqui apresentados, o gráfico de controle de Z é uma alternativa simples, pois permite ao usuário identificar qual característica de qualidade sofre deslocamento em seu valor médio e, em alguns casos, possui desempenho superior aos demais gráficos, principalmente quando o nível de autocorrelação for elevado.

6. REFERÊNCIAS

- ALT. F. B. Multivariate control charts. Encyclopedia of Statistical Sciences. Kotz. S. Johnson. N. L. Eds.; Wiley. 1985.
- APARISI. F. Hotelling's T^2 control chart with adaptive sample sizes. International Journal of Production Research. v.34. p.2853-2862. 1996.
- APARISI. F.; HARO. C.L. Hotelling's T^2 control chart with variable sampling intervals. International Journal of Production Research. v.39. p.3127-3140. 2001.
- APLEY D.W.; TSUNG F. The autoregressive T^2 chart for monitoring univariate autocorrelated processes. Journal of Quality Technology.; v. 34. p. 80-96. 2002.
- ARKAT. J.. NIAKI. S. T. A.. ABBASI. B. Artificial neural networks in applying MCUSUM residuals charts for AR(1) processes. Applied Mathematics and Computation. v. 189. p.1889-1901. 2007.
- BILLER. B.. NELSON. B. Modeling and generating multivariate time-series input processes using a vector autoregressive technique. ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation. v. 13. n.3. p. 211-237. 2003.
- CHEN, S; NEMBHARD, H. B. Multivariate cuscore control charts for monitoring the mean vector in autocorrelated process. IIETransactions. v. 43. p. 291-307. 2011.
- HAYTER, A. J.; TSUI, K. L. Identification and quantification in multivariate quality control problems. *Journal of Quality Technology*. v. 26, n. 3, p. 197-208. 1994.
- HOTELLING, H. Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bombsights. Techniques of Statistical Analysis. p.111-184. New York, McGraw Hill. 1947.
- HWARNG. H. B.; WANG. Y. Shift detection an source identification in multivariate autocorrelated process. International Journal of Production Research. v.48. n. 3. p.835-859. 2010.
- ISSAM. B. K.; MOHAMAD. L. Support vector regression based residual MCUSUM control chart for autocorrelated process. Applied Mathematics and Computation. v. 201. p. 565-574. 2008.
- JARRETT. J. E.. PAN. X. The quality control chart for monitoring multivariate autocorrelated processes. Computational Statistics & Data Analysis. v.51. p. 3862-3870. 2007
- JIANG, W. Multivariate control charts for monitoring autocorrelated processes. Journal of Quality Technology. v. 36. p.367-379. 2004.
- KALGONDA. A. A. A Note on generalization of Z Graph. Journal of Academia and Industrial Research. v.1. n.6. p. 286-289. 2012.

KALGONDA. A. A.; KULKARNI. S. R. Multivariate quality control chart for autocorrelated processes. *Journal of Applied Statistics*. v. 31. p. 317-327. 2004.

KIM. S. B.; JITPITAKLERT. W.; SUKCHOTRAT. T. One-Class Classification-Based Control Charts for Monitoring Autocorrelated Multivariate Processes. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*. v. 39. n.3. p. 461-474. 2010.

LOWRY. C. A.; WOODALL. W. H.; CHAMP. C. W.; RIGON. S. E.; A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart. *Technometrics*. v. 34. p. 46-53. 1992.

LTKEPOHL. H. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. New York: Springer. 2007.

MASON. R.; YOUNG. J.C.. *Multivariate statistical process control with industrial applications*. Alexandria. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2002.

MASTRANGELO, C. M.; FORREST, D. R. Multivariate Autocorrelated Processes: Data and Shift Generation. *Journal of Quality Technology*. v. 34, n. 2. p. 216-220. 2002.

MONTGOMERY. D. C. *Introduction to statistical quality control*. John Wiley & Sons. Inc.. New York. New York. 2004.

NIAKI. S. T. A.; DAVOODI. M. Designing a multivariate-multistage quality control system using artificial neural networks. *International Journal of Production Research*. v. 47. p. 251-271. 2009.

PAN. X; JARRETT. J.E. Using vector autoregressive residuals to monitor multivariate processes in the presence of serial correlation. *International Journal of Production Economics*. v. 106. p. 204-216. 2007.

PFAFF. B. VAR, SVAR and SVEC models: implementation within r package vars. *Journal of Statistical Software*. v. 27. n. 4. p. 204-216. 2008.

SEREL. D. A.; MOSKOWITZ. H.; TANG. J. Univariate X control charts for individual characteristics in a multinormal model. *IIE Transactions*. v. 32. p. 1115-1125. 2000.

SHEWHART, W. A. *Economic control of quality of manufactured product*. 1^a Ed. New York: D. Van Nostrand Company. 1931.

SHUMWAY. R. H.; STOFFER. D. S. *Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples*. 2^a Ed. New York: Springer. 2006.

VARGAS, M; ALFARO, J. L.; MONDÉJAR, J. On the run length of a state-space control chart for multivariate autocorrelated process data. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*. v. 38. p. 1823-1833. 2009.

WOODALL. W. H.; FALTIN. F. W. Autocorrelated data and SPC. *ASQC Statistics Division Newsletter*. v.13. p.18-21. 1993.

APÊNDICE A - Método utilizado na simulação de série temporal multivariada com processo de geração VAR(1) e cálculo do NMA

Simulação de uma série temporal multivariada com dimensão p e tamanho T :

- 1) Criam-se erros com distribuição multivariada Gaussiana de ordem p , $e_t \sim N_p(0; \Sigma_e)$, através da multiplicação da matriz P de ordem $(p \times p)$ com o vetor $V = (v_1, \dots, v_p)$ de ordem $(p \times 1)$, onde $PP' = \Sigma_e$ e $V \sim N(0, I)$.

$$e_t = P \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} \quad (A1)$$

Por exemplo, se $p=2$:

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (A2)$$

- 2) O passo 1 é repetido T vezes para a geração de uma série de erros.
- 3) Com os valores de e_t , obtêm-se X_t de forma recursiva através da equação A3 fazendo $t=1, 2, \dots, T$.

$$X_t - \mu_0 = \Phi(X_{t-1} - \mu_0) + e_t \quad (A3)$$

onde: X_t é uma matriz de ordem $(p \times 1)$; μ_x é uma matriz de médias de ordem $(p \times 1)$; Φ é a matriz de autocorrelação de ordem $(p \times p)$.

- 4) Com os vetores gerados em 3), obtêm-se as estatísticas de interesse:

$$\text{Gráfico de } Z: Z_t = \text{Max}_{1 \leq i \leq p} \left[|Z_{it}| \right]$$

$$\text{Gráfico de } T^2: T_t^2 = (X_t - \mu_0)' \Gamma_x(0)^{-1} (X_t - \mu_0)$$

$$\text{Gráfico de MEWMA: } T_t^2 = (E_t - \mu_0)' \Gamma_x(0)^{-1} (E_t - \mu_0)$$

- 5) O LC do gráfico de Z , T^2 ou $MEWMA$ é calculado por uma busca binária até que o número médio de alarmes falsos seja igual ao valor desejado.
- 6) O processo é simulado 10.000 vezes para obtenção dos NMAs; os deslocamentos no vetor de média são iguais a $\delta = (\delta_1 \leq 2, 0; \delta_2 \leq 2, 0)$.

APÊNDICE B – NMA dos gráficos de controle de Z, T^2 e MEWMA ($\lambda=0,2$)

Tabela B1- Desempenho dos gráficos de Z, T^2 e MEWMA ($\lambda=0,2$); $a= b$; $\rho=0,5$

LC			3,0201	10,5931	1,0780	3,0119	10,5911	1,4427	3,0008	10,4368	2,2848	2,9483	10,0813	3,2199	2,7238	8,6426	4,6860
			Z	T^2	M	Z	T^2	M	Z	T^2	M	Z	T^2	M	Z	T^2	M
(a, b)			(0, 0)			(0,2, 0,2)			(0,5, 0,5)			(0,7, 0,7)			(0,9, 0,9)		
Deslocamento	δ_1	δ_2															
1	0,00	0,00	199,08	199,61	200,48	198,08	198,83	203,05	201,50	199,51	199,93	198,27	199,33	196,34	199,83	200,69	195,45
2	0,00	0,50	115,97	98,55	25,70	120,93	103,03	37,47	138,04	121,97	75,51	159,15	145,44	119,81	191,66	184,64	179,79
3	0,00	1,00	41,49	30,40	6,83	44,94	33,48	10,19	62,38	49,01	23,52	92,68	76,47	52,83	158,90	146,56	140,40
4	0,00	1,50	14,74	10,41	3,42	16,90	11,98	4,95	27,83	20,09	11,00	50,68	39,56	26,39	126,05	107,11	103,84
5	0,00	2,00	6,31	4,51	2,16	7,44	5,26	3,10	13,50	9,45	6,72	28,22	20,07	15,96	95,01	78,15	76,28
6	0,50	0,00	114,99	100,42	25,53	121,90	103,76	37,81	138,29	120,46	74,02	158,83	145,76	121,09	187,36	186,06	180,03
7	0,50	0,50	82,80	99,57	25,37	86,13	104,81	37,56	105,86	121,37	73,81	131,55	146,66	120,18	180,41	186,46	182,90
8	0,50	1,00	36,54	42,25	8,84	39,59	45,34	13,14	54,53	62,59	31,07	83,66	90,98	65,75	152,08	157,07	153,48
9	0,50	1,50	14,34	14,79	4,21	16,63	16,88	6,03	26,43	27,29	14,01	47,32	50,17	32,87	119,64	121,17	113,58
10	0,50	2,00	6,18	6,02	2,55	7,30	7,21	3,63	12,94	12,76	8,03	27,71	26,07	18,66	92,26	88,32	84,39
11	1,00	0,00	41,58	30,10	6,78	44,41	33,30	10,14	63,09	49,23	23,58	92,59	75,30	52,71	161,38	145,27	141,48
12	1,00	0,50	36,33	42,08	8,90	39,34	46,03	13,42	54,72	62,29	30,25	84,03	91,37	65,52	153,13	156,00	152,78
13	1,00	1,00	23,24	30,88	6,91	25,59	33,20	10,09	37,29	48,51	23,47	61,40	75,21	52,35	132,45	148,34	142,26
14	1,00	1,50	11,57	15,12	4,22	13,26	17,17	6,15	21,76	27,02	13,97	39,35	49,05	32,93	105,96	125,18	116,06
15	1,00	2,00	5,72	6,96	2,72	6,75	8,04	3,90	11,99	14,20	8,63	24,37	28,55	20,45	84,35	92,54	88,37
16	1,50	0,00	15,00	10,76	3,42	16,90	11,92	4,92	28,70	19,88	11,04	50,67	38,10	26,29	124,89	108,03	103,04
17	1,50	0,50	14,50	14,87	4,19	16,25	16,72	6,06	26,49	26,74	13,97	48,20	48,53	32,68	120,18	123,13	114,91
18	1,50	1,00	11,85	14,83	4,18	13,40	16,72	6,09	21,92	27,30	13,95	39,44	48,23	32,50	104,92	121,27	115,90
19	1,50	1,50	8,11	10,55	3,40	8,99	11,90	4,93	15,60	20,23	11,05	29,11	38,70	26,13	91,37	107,91	102,97
20	1,50	2,00	4,89	6,14	2,52	5,52	7,15	3,67	9,64	12,42	7,96	20,06	26,52	19,09	74,59	89,52	84,60
21	2,00	0,00	6,36	4,48	2,16	7,51	5,28	3,09	13,49	9,54	6,73	27,72	20,25	15,81	93,93	77,61	75,48
22	2,00	0,50	6,34	6,04	2,52	7,40	7,27	3,66	13,18	12,75	8,01	27,22	26,06	18,91	91,96	88,78	87,02
23	2,00	1,00	5,90	6,90	2,72	6,72	7,97	3,86	11,87	14,32	8,58	24,14	28,85	20,47	84,47	92,22	88,80
24	2,00	1,50	4,84	6,19	2,56	5,48	7,02	3,64	9,71	12,67	8,08	19,70	26,15	19,09	73,57	90,66	85,73
25	2,00	2,00	3,54	4,43	2,15	4,06	5,22	3,10	7,14	9,42	6,68	15,43	20,27	15,73	60,95	78,19	74,42

APÊNDICE B – NMA dos gráficos de controle de Z, T^2 e MEWMA ($\lambda=0,2$) (continuação).

Tabela B2 - Desempenho dos gráficos de Z, T^2 e MEWMA ($\lambda=0,2$); $a \neq b$; $\rho=0,5$

LC			3,0113	10,5031	1,8044	3,0104	10,4967	1,8008	2,9910	10,3176	2,4834	2,9878	10,3163	2,4903			
			Z	T^2	M	Z	T^2	M	Z	T^2	M	Z	T^2	M			
(a, b)			(0, 0,5)			(0,5, 0)			(0,2, 0,7)			(0,7, 0,2)					
Deslocamento	δ_1	δ_2															
1	0,00	0,00	198,63	198,22	203,77	198,67	197,74	196,53	204,93	199,58	200,70	197,96	200,71	201,50			
2	0,00	0,50	139,09	125,83	67,02	115,11	103,17	62,56	162,43	152,03	110,50	113,85	105,74	90,87			
3	0,00	1,00	63,64	52,19	20,82	40,83	33,78	12,93	98,26	82,38	47,14	42,84	37,18	22,28			
4	0,00	1,50	28,88	22,43	10,14	14,69	11,88	5,56	53,51	43,15	24,26	16,28	14,00	8,91			
5	0,00	2,00	13,87	10,47	6,29	6,33	5,11	3,33	29,38	23,41	14,68	7,19	6,22	5,05			
6	0,50	0,00	117,73	103,78	63,15	136,54	125,02	65,49	115,94	107,75	90,96	160,17	149,88	111,42			
7	0,50	0,50	90,78	105,19	59,01	91,96	106,69	58,46	105,55	114,54	92,38	102,12	114,53	92,94			
8	0,50	1,00	52,55	60,80	24,62	38,01	42,64	16,61	73,25	82,94	51,03	40,66	44,24	27,77			
9	0,50	1,50	26,14	28,73	12,22	14,52	15,16	6,54	44,07	50,22	28,04	15,85	16,38	10,07			
10	0,50	2,00	13,09	13,91	7,39	6,23	6,20	3,67	26,81	28,36	16,95	7,18	7,22	5,48			
11	1,00	0,00	40,95	33,40	13,15	63,57	52,59	20,51	42,86	36,49	22,52	97,89	82,35	47,53			
12	1,00	0,50	37,23	42,23	16,69	52,28	59,24	24,37	40,72	44,31	27,39	71,59	82,66	51,61			
13	1,00	1,00	28,93	35,87	14,69	28,68	35,03	14,34	35,23	42,04	26,23	34,54	41,87	26,22			
14	1,00	1,50	18,51	22,74	10,07	13,14	15,54	6,89	27,49	33,13	20,22	14,97	17,67	10,81			
15	1,00	2,00	10,94	12,99	7,05	5,96	6,97	3,96	19,36	23,40	14,58	7,06	7,88	5,80			
16	1,50	0,00	14,90	11,87	5,57	28,05	22,81	10,01	16,24	13,90	8,87	53,08	42,92	24,28			
17	1,50	0,50	14,17	15,29	6,56	24,97	28,17	12,07	16,16	16,64	10,02	44,76	49,05	27,86			
18	1,50	1,00	13,01	15,45	6,89	18,60	22,89	10,09	15,22	17,73	10,89	27,41	33,41	19,98			
19	1,50	1,50	10,47	13,14	6,37	10,68	12,96	6,33	13,65	16,42	10,57	13,62	16,60	10,52			
20	1,50	2,00	7,55	9,35	5,46	5,49	6,71	4,00	11,35	14,07	9,64	6,60	7,98	6,02			
21	2,00	0,00	6,33	5,07	3,34	13,48	10,53	6,17	7,26	6,01	4,99	28,95	23,31	14,86			
22	2,00	0,50	6,37	6,20	3,68	13,05	13,85	7,22	7,17	7,31	5,46	26,32	28,53	16,97			
23	2,00	1,00	6,05	6,92	3,95	10,84	13,14	6,96	7,11	7,93	5,79	19,34	23,41	14,66			
24	2,00	1,50	5,45	6,69	4,03	7,51	9,33	5,44	6,74	8,15	5,96	11,38	13,77	9,57			
25	2,00	2,00	4,64	5,65	3,80	4,56	5,70	3,85	6,06	7,50	5,99	6,03	7,44	6,00			