

OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA E O ÍNDICE DA MATRIZ LAPLACIANA SEM SINAL

Ana Claudia Carvalho de Freitas

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca - CEFET/RJ
Av. Maracanã, 229 - Maracanã - RJ
anaclafreitas@hotmail.com

Leonardo Silva de Lima

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca - CEFET/RJ
Av. Maracanã, 229 - Maracanã - RJ
leolima.geos@gmail.com

Carla Silva Oliveira

Escola Nacional de Ciência e Estatística - ENCE/IBGE
Rua André Cavalcante, 106 - Centro - RJ
carlinha.silva.oliveira@gmail.com

Resumo

Os autovalores de matrizes associadas a grafos informam sobre a estrutura do grafo e estão relacionados a diversos parâmetros de otimização combinatória. O presente artigo apresenta as relações do maior autovalor da matriz laplaciana sem sinal de um grafo com o número cromático, número de independência e o tamanho da maior clique de um grafo. Conjecturas envolvendo esses parâmetros também são apresentadas e testes computacionais com a ferramenta *Autographix* foram descritos.

Palavras-chave: Índice; limite superior; matriz laplaciana sem sinal.

Abstract

Information about topological structure of the graph can be obtained from the eigenvalues of graph matrices. Also, these eigenvalues are related to some optimization combinatorial parameters of the graph. In this paper, we present some relations of the spectral radius of the signless laplacian matrix to the chromatic and independence number, and to the size of the largest clique of a graph. Conjectures involving these parameters are also presented and computational tests using the software *Autographix* are described.

Keywords: Index; upper bound; signless laplacian matrix.

1 Introdução

A Teoria Espectral de Grafos (TEG) é uma área da Teoria de Grafos que relaciona a estrutura de um grafo com as propriedades obtidas da teoria de matrizes. Os estudos em TEG consideram a obtenção de propriedades sobre o espectro de matrizes e suas relações com os invariantes de grafos. Neste contexto, as matrizes associadas a grafos e mais utilizadas em TEG são as matrizes de adjacência, incidência, laplaciana e laplaciana sem sinal. Dentre as diversas questões abordadas sobre o espectro de matrizes associadas a grafos pode-se destacar a determinação de limites inferiores e superiores para o maior autovalor dessas matrizes. A matriz laplaciana sem sinal, dentre todas as mencionadas anteriormente, tem assumido papel relevante, pois há indícios experimentais de que o espectro do grafo associado à matriz laplaciana sem sinal descreve de forma mais adequada as propriedades estruturais da rede. Os problemas de determinar o número cromático, o tamanho da maior clique e o número de independência de um grafo pertencem a classe dos problemas computacionalmente difíceis de serem resolvidos, pois são NP-Difícil e NP-Completo, respectivamente. A motivação deste trabalho é reunir resultados da literatura, limites superiores e inferiores, que mostram como o maior autovalor da matriz laplaciana sem sinal pode ser útil para informar sobre a topologia da rede uma vez que está relacionado a vários parâmetros de otimização combinatória, tais como o número cromático, número de independência e o tamanho da maior clique. As relações desse autovalor com parâmetros de conectividade clássicos e espectral também são objetivos desse artigo. A seção seguinte apresenta as principais definições para a compreensão do texto.

2 Definições e Notação

Considere $G = (V, E)$ um grafo simples com conjunto de vértices $V(G)$ e cardinalidade n e conjunto de arestas $E(G)$ de cardinalidade m . Cada aresta é denotada por $\{v_i, v_j\} \in E(G)$, onde $v_i, v_j \in V(G)$. Denota-se o grau de um vértice v_i por d_i e a sequência de graus de G é $d(G) = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, sendo $\Delta(G) = d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n = \delta(G)$. O grafo K_n denota o grafo completo com n vértices. Um grafo r -partido G , denotado por K_{n_1, n_2, \dots, n_r} , é um grafo cujo conjunto de vértices V pode ser particionado em r partições V_1, \dots, V_r com cardinalidade $|V_1| = n_1, \dots, |V_r| = n_r$ tal que $\sum_{i=1}^r n_i = n$ e de modo que não há arestas entre vértices da mesma partição. Se $r = 2$ diz-se que G é bipartido; caso $r = 3$, G é dito tripartido. Quando todas as arestas possíveis estão presentes em um grafo r -partido, G é dito r -partido completo. É dito que um grafo com n vértices e r -partido completo é de *Turan* quando suas partições tem tamanho $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{r} \rceil$. O menor número de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo tal que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor é o número cromático do grafo e denotado aqui por $\chi(G)$; o tamanho da maior clique em um grafo G , denotado por $\omega(G)$, é dado pela ordem do maior subgrafo completo de G e, o número de independência, $\alpha(G)$, é dado pelo maior conjunto de vértices não-adjacentes entre si. Um emparelhamento perfeito é um conjunto de arestas não-adjacentes de um grafo que contém todos os vértices desse grafo.

A matriz diagonal de G , denotada por $D(G)$, é a matriz dos graus dos vértices de G ; a matriz $(0, 1)$ de adjacência de G , $A(G) = [a_{ij}]$, quadrada de ordem n , é definida por $a_{ij} = 1$, se $\{v_i, v_j\} \in E$ e $a_{ij} = 0$ caso contrário. As matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal de um grafo são definidas, respectivamente por, $L = L(G) = D(G) - A(G)$ e $Q = Q(G) = D(G) + A(G)$. O maior autovalor e raio espectral de Q , conhecido como *índice de Q* , é denotado por q_1 . Propriedades sobre esta matriz associada a grafos podem ser encontradas em [6]. O segundo menor autovalor da matriz $L(G)$, denotado por $a(G)$, é conhecido como

conectividade algébrica do grafo e frequentemente usado como medida espectral de vulnerabilidade de uma rede, vide [21] e [1]. Dois parâmetros clássicos de vulnerabilidade são as conectividades de vértice e aresta. A conectividade de vértice de um grafo, $w(G)$, é o menor de vértices que ao serem removidos desconectam G ou o tornam o grafo trivial; a conectividade de aresta, $w'(G)$, é o menor número de arestas que ao serem removidas desconectam G .

3 O índice de Q e invariantes combinatórios

Esta seção contém os principais resultados da literatura envolvendo os invariantes combinatórios número cromático, tamanho da clique e número de independência de um grafo. Os limites inferiores e superiores constituem importante aplicação para acelerar algoritmos e heurísticas relacionadas a esses parâmetros.

3.1 Número cromático e tamanho da clique

O problema da coloração em grafos consiste em obter o menor número de cores de vértices de modo que cada dois vértices adjacentes tenham cores distintas. Esse problema é NP-Difícil e a obtenção de limites superiores e inferiores em função de invariantes de fácil obtenção consiste num tema de interesse da comunidade acadêmica. Um fato fundamental relacionando $\chi(G)$ a um parâmetro espectral foi inicialmente provado em 1967 por Wilf [27],

$$\chi(G) \leq \lambda_1 + 1,$$

onde λ_1 é o maior autovalor da matriz $A(G)$. Algumas outras notáveis contribuições para esse tópico foram obtidas por Hoffman [16], Cvetkovic [7] and Nikiforov [22]. Recentemente, vários autores têm relacionado q_1 a $\chi(G)$. Antes de apresentar os resultados, a seguinte definição de classes de grafos é necessária.

Definição 1. [13] *O grafo Kite é um grafo obtido por uma clique de tamanho ω com um caminho pendente de comprimento $n - \omega$ e é denotado por $Ki_{n,\omega}$.*

A definição do grafo acima corresponde a definição do grafo K_z^l apresentada por Yu *et al.* em [32] onde $z = \omega$ e $l = n - \omega$.

Em 2009, Hansen e Lucas [14], obtiveram um limite superior para q_1 em função do número cromático χ de um grafo conexo com n vértices.

$$q_1(G) \leq 2n \left(1 - \frac{1}{\chi} \right). \quad (1)$$

Eles provaram que a igualdade é atingida se G é um grafo χ -partido regular completo.

Porém, Yu *et al.* [32], provaram um resultado mais geral mostrando que os grafos extremais em relação a q_1 são os grafos de *Turán*, o que naturalmente inclui os grafos extremais obtidos por Hansen e Lucas [14].

Teorema 1. *Seja G um grafo conexo com n vértices e número cromático χ . Então,*

$$q_1(G) \leq q_1(T_{n,\chi}).$$

A igualdade é atingida se e somente se $G \cong T_{n,\chi}$.

Mais recentemente, em 2012, Zhang *et al.* [15] melhoraram o limite superior (1) obtido por Hansen e Lucas [14]. Um resultado clássico da literatura estabelece que o número cromático é sempre maior ou igual ao tamanho da maior clique, ou seja, $\omega(G) \leq \chi(G)$. É fácil ver que $(1 - \frac{1}{\omega}) \leq (1 - \frac{1}{\chi})$. Utilizando esse fato, o Teorema 2 melhora o limite superior (1).

Teorema 2. *Seja G um grafo conexo com n vértices e tamanho de clique ω . Então,*

$$q_1(G) \leq 2n \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)$$

Além disso, se $\omega \neq 2$, o limite superior é atingido se e somente se G é ω -partido completo regular.

Liu *et al.* provaram em [20] um limite inferior para o número da clique envolvendo a quantidade de vértices, o grau máximo e q_1 . Organizando a desigualdade de modo que q_1 fique isolado, obtém-se o limite superior a seguir.

Teorema 3. *Seja G um grafo com n vértices, grau máximo Δ e tamanho da maior clique ω . Então,*

$$q_1(G) \leq n + \Delta - \frac{n}{\omega}$$

Zhang *et al.* [15] também obtiveram alguns limites inferiores e superiores para q_1 em termos do número da clique.

Teorema 4. *Seja G um grafo conexo com n vértices e tamanho da maior clique $\omega \geq 2$ tal que $n = y\omega + r$, $0 \leq r < \omega$. Então,*

$$q_1(G) \leq \frac{(3\omega-4)y+3r-2+\sqrt{y^2\omega^2+[(2r+4)\omega-8r]y+(r-2)^2}}{2}$$

Além disso, a igualdade é verdadeira se e somente se G é grafo bipartido completo para $\omega = 2$ ou o grafo Turán, $T_{n,\omega}$ para $\omega \geq 3$.

O seguinte resultado segue do Teorema 4 e envolve o número cromático.

Proposição 1. *Seja G um grafo conexo com n vértices e número cromático $\chi \geq 3$. Se $n = y\chi + r$, $0 \leq r < \chi$ Então,*

$$q_1(G) \leq \frac{(3\chi-4)y+3r-2+\sqrt{y^2\chi^2+[(2r+4)\chi-8r]y+(r-2)^2}}{2}$$

A igualdade é verdadeira se e somente se G é grafo Turán $T_{n,\chi}$.

A seguir, são apresentados os principais limites inferiores para q_1 em função de $\chi(G)$ e $\omega(G)$. As Proposições 2 e 3, obtidos por Yu *et al.* [32], fornecem limites inferiores para q_1 de acordo com certas restrições sobre o número cromático.

Proposição 2. *Seja G um grafo conexo com $\chi \geq 4$ e $n = \chi + 1$. Se G contém K_χ como subgrafo, então*

$$q_1(G) \geq q_1(K_\chi^1).$$

A igualdade é atingida se e somente se $G \cong K_\chi^1$.

Se G não possui K_χ como subgrafo, a relação a seguir é válida baseada na Proposição 2.

Proposição 3. *Seja G um grafo conexo com n vértices e $\chi \geq 8$. Se G não contém K_χ como subgrafo, então*

$$q_1(G) \geq q_1(K_\chi^{n-\chi}).$$

A igualdade é atingida se e somente se $G \cong K_\chi^{n-\chi}$.

Além disso, Yu *et al.* [32] obtiveram limites inferiores eficientes para q_1 na classe dos grafos tais que $\chi \neq (4, 5, 6, 7)$.

Teorema 5. *Seja G um grafo conexo com n vértices e $\chi \neq (4, 5, 6, 7)$. Então,*

- *Se $\chi = 2$, então $q_1(G) \geq q_1(P_n)$. A igualdade é atingida se e somente se $G \simeq P_n$.*
- *Se $\chi = 3$ e n é ímpar, então $q_1(G) \geq q_1(C_n)$. A igualdade é atingida se e somente se $G \simeq C_n$.*
- *Se $\chi = 3$ e n é par, então $q_1(G) \geq q_1(C_{n-1}^1)$. A igualdade é atingida se e somente se $G \simeq C_{n-1}^1$, onde C_{n-1}^1 é obtido a partir de um ciclo C_{n-1} adicionando uma aresta pendente.*
- *Se $\chi \geq 8$, então $q_1(G) \geq q_1(K_\chi^l)$. A igualdade é atingida se e somente se $G \simeq K_\chi^l$.*

O resultado a seguir estabelece uma importante relação entre $\omega(G)$ e $\chi(G)$ e é apresentado em [28].

Proposição 4. *Para todo grafo G , tem-se*

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Como consequência do fato de $\Delta(G) + 1 \leq q_1$, para G conexo e $n \geq 4$, [3] e [8], pode-se obter o resultado a seguir.

Proposição 5. *Para G conexo, com $n \geq 4$,*

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq q_1(G).$$

Abreu *et al.* em [3], apresentaram o seguinte resultado onde é levado em consideração apenas o número da clique.

Proposição 6. *Se G é um grafo conexo, então*

$$q_1(G) \geq 2\omega - 2$$

Para $\omega > 2$, $2(\omega - 1)$ é sempre maior que ω . Portanto, o limite apresentado acima é melhor que o apresentado na Proposição 5.

Outros resultados envolvendo q_1 e $\omega(G)$ também são apresentados em [15]. O Teorema a seguir, obtido por [15], determina limites superiores para q_1 quando $\omega(G) = 2$ e $\omega(G) \geq 3$.

Teorema 6. *Seja G um grafo conexo com n vértices e maior clique de tamanho ω .*

- (i) *Se $\omega = 2$, então $q_1(G) \geq 2 + 2 \cos \frac{\pi}{n}$. A igualdade é atingida se e somente se $G \simeq P_n$;*
- (ii) *Se $\omega \geq 3$, então $q_1(G) \geq q_1(Ki_{n,\omega})$. A igualdade é atingida se e somente se $q_1(G) \simeq q_1(Ki_{n,\omega})$*

Uma consequência do Teorema 6 é apresentada a seguir.

Proposição 7. *Seja G conexo e $\omega \geq 3$. Então,*

$$q_1(G) \geq \frac{2\omega - 1 + \sqrt{4\omega^2 - 12\omega + 17}}{2}.$$

A igualdade é atingida se e somente se $G \simeq Ki_{n,n-1}$ e $\omega = n - 1$.

Os resultados a seguir relacionam q_1 com o número de independência de G . Defina o autovetor normalizado $u_1 = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ associado ao autovalor q_1 de G . Em [20], Liu *et al.* apresentam um limite inferior para q_1 envolvendo o parâmetro U dado por $U = \sum_{i=1}^n r_i$ e o grau mínimo $\delta(G)$.

Teorema 7. *Seja G um grafo com grau mínimo δ e número de independência α . Então,*

$$q_1 \geq \sqrt{\frac{U^2 + \alpha\delta}{\alpha} - 1}$$

Em [33] é apresentado um limite superior para um grafo G unicyclico envolvendo o número de independência α .

Proposição 8. *Seja G um grafo unicyclico com n vértices e número de independência α . Então,*

$$q_1(G) < \alpha + 2 + \frac{n+5-\alpha}{\alpha^2-2\alpha+2}$$

3.2 Conectividade de vértices, arestas e algébrica

Nesta seção, relacionam-se os parâmetros de conectividade clássicos e espectral com o índice da matriz Q . Em 1973, Fiedler [12] provou que $a(G) = 0$ se e somente se G é desconexo. Em seu artigo, Fiedler também prova o bem conhecido resultado para todo grafo $G \neq K_n$:

$$a(G) \leq w(G) \leq w'(G) \leq \delta(G).$$

Em [30], Ye *et al.* caracterizaram grafos com q_1 máximo fixado o número de vértices e dando a conectividade de vértices ou de arestas. Com isso, obtém-se um limite superior para este índice em termos da conectividade. Este limite é apresentado a seguir.

Proposição 9. *Seja G grafo com n vértices e conectividade de vértices ou de arestas w , onde $1 \leq w \leq n-2$. Então,*

$$q_1(G) \leq \frac{2n+w-4+\sqrt{(2n-w-4)^2+8w}}{2}$$

A igualdade é atingida se e somente se $G \simeq K(n-1, w)$, onde $K(n-1, w)$ é obtido de K_{n-1} com adição de um vértice ligado a w vértices de K_{n-1} .

O resultado apresentado em [3], estabelece relação entre q_1 e a conectividade algébrica de G .

Proposição 10. *Se G é grafo simples e conexo com n vértices, então*

$$q_1(G) \geq 2a(G)\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

4 Conjecturas

Quatro conjecturas envolvendo os limites para o Q -índice de G são apresentadas nesta seção. Em todos os casos, o valor de q_1 está relacionado com o número de vértices do grafo e um parâmetro de otimização combinatória. Sobre conjecturas a respeito de q_1 alguns trabalhos publicados podem ser destacados, como por exemplo, [13] e [8].

Para este trabalho foram feitos diversos testes computacionais com essas conjecturas e em duas foram encontrados contra-exemplos. Todos os testes foram realizados com o auxílio do *software* AGX e as famílias testadas foram $K_n, C_n, P_n, T, K_{r,s}, K_{r,s,t}, K_{1,s}, K_{i_n,w}$, ponte de ligação e as operações k -soma em grafos cujas definições são apresentadas por Nikiforov et al. em [19] e alguns grafos conexos aleatórios extraídos de [24], para $4 \leq n \leq 10$.

A desigualdade (2) da seguinte conjectura foi refutada e os contra-exemplos são apresentados.

Conjectura 1. *Seja G um grafo conexo com n vértices, $n \geq 4$ e número de independência α . Então*

$$4 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq q_1 + \alpha, \quad (2)$$

$$2n - 2 \leq q_1 \alpha, \quad \text{para } n \text{ ímpar.} \quad (3)$$

O limite (2) é atingido se e somente se $G \cong C_n$, com n ímpar. Além disso, se n é par, então $q_1 + \alpha$ é mínimo para grafos com $n \geq 8$ vértices obtido por dois ciclos de cardinalidade $2\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1$ ligados por um caminho. O limite (3) é atingido se e somente se $G \cong K_n$ ou $G \cong C_n$, com n ímpar.

A Figura 1 mostra dois casos que contradizem a desigualdade (2).

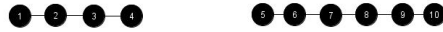


Figura 1: $q_1(P_4) = 3, 41; \alpha(G) = 2$ e
 $q_1(P_6) = 3, 73; \alpha(G) = 3$

Os grafos da Figura 1 são os caminhos P_4 e P_6 . Observando que $4 + \lfloor \frac{4}{2} \rfloor > 3, 41 + 2$, e, $4 + \lfloor \frac{6}{2} \rfloor > 3, 73 + 3$, pode-se concluir que nenhum dos dois grafos satisfaz a relação da inequação (2). Além disso, de acordo com testes realizados no AGX em P_n , sendo n par e $4 \leq n \leq 14$, a desigualdade (2) também não foi verificada. A Tabela 1 mostra esses resultados.

Na Tabela 1, é possível observar que a diferença entre os valores da segunda coluna e o da terceira tende a zero. Isso aponta para a existência de um possível valor de n par, cuja desigualdade seja válida. Testes realizados no AGX para P_n , sendo $46 \leq n \leq 54$, reforçam a veracidade da desigualdade (2) para estes valores de n . Essas informações motivam um estudo mais aprofundado em torno desta desigualdade.

Tabela 1: P_n

P_n	$4 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$q_1 + \alpha$	$(4 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) - (q_1 + \alpha)$
P_4	6	5,41	0,59
P_6	7	6,73	0,27
P_8	8	7,85	0,15
P_{10}	9	8,9	0,1
P_{12}	10	9,93	0,07
P_{14}	11	10,95	0,05

Após diversos testes computacionais, a desigualdade (3) foi reforçada devido ao fato de não apresentar contra-exemplos. Isso motiva um esforço maior para provar esse resultado.

Conjectura 2. *Seja G um grafo conexo com n vértices, $n \geq 4$ e número da maior clique ω . Então*

$$q_1 - \omega \leq \frac{3}{2}n - 4, \quad (4)$$

$$\frac{q_1}{\omega} \leq \frac{n}{2} \text{ se } n \text{ par.} \quad (5)$$

O limite para (4) é atingido se e somente G é o complementar de um emparelhamento perfeito quando n é par e $n \geq 6$. Além disso, quando n é ímpar e $n \geq 9$, $q_1 - \omega$ é máximo se e somente G é o complementar de um emparelhamento perfeito com $n - 3$ vértices e um triângulo com 3 vértices restantes. O limite para (5) é atingido se, e somente se, $G \cong K_{r,s}$.

Testes feitos no *AGX* mostram que o limite (4) é falso. A Figura 2 apresenta dois exemplos onde este resultado não é verificado.



Figura 2: $q_1(G_1) = 5,24$; $\omega(G_1) = 3$ e $q_1(G_2) = 6,56$; $\omega(G_2) = 3$

Conjectura 3. *Seja G um grafo conexo com n vértices, $n \geq 6$ e número cromático χ . Então,*

$$q_1 - \chi \leq \frac{3}{2}n - 4, \text{ se } n \text{ é par.} \quad (6)$$

O limite é atingido se e somente se G é o complementar de um emparelhamento perfeito com n par. Além disso, para n ímpar e $n \geq 9$, $q_1 - \chi$ é máximo se e somente se G é o complementar de um emparelhamento perfeito com $n - 3$ vértices e um triângulo com os três vértices restantes.

Paralelamente a esta presente pesquisa, He *et al.* [15] investigaram as Conjecturas 2 e 3.

Proposição 11. [15] *Seja G um grafo conexo com $n \geq 10$ e tamanho de clique ω . Então,*

- (i) *Se $\omega \leq 4$ ou $\omega \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, então $q_1(G) \leq \frac{3n}{2} + \omega - 4$. A igualdade é atingida se e somente se G é o grafo Turan $T_{n,4}$ e $n = 4k$ ou o grafo Turan $T_{n,k}$ e $n = 2k$;*
- (ii) *Se $5 \leq \omega \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, então $q_1(T_{n,\omega}) > \frac{3n}{2} + \omega - 4$;*
- (iii) *$\frac{q_1(G)}{\omega} \leq \frac{n}{2}$.*

A Proposição 11 segue do Teorema 4 e indica em que casos a Conjectura 2 é verdadeira. De forma análoga, a partir da Proposição 1, pode-se concluir em que casos a Conjectura 3 é verdadeira.

Conjectura 4. *Seja G um grafo conexo com n vértices, $n \geq 5$ e conectividade algébrica $a(G)$. Então*

$$2 + 2 \cos \frac{2\pi}{n} \leq (q_1 - a(G)) \leq n - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{4n^2 - 20n + 33}}{2} \quad (7)$$

O limite inferior é atingido se e somente se G é um ciclo e o limite superior é atingido se e somente se G é o grafo Kite $Ki_{n,n-1}$.

Diversos testes foram realizados na Conjectura 4, porém ainda não foram encontrados contra-exemplos. Isso reforça a conjectura e motiva a busca de prova. Outras conjecturas podem existir na literatura e a meta deste trabalho é continuar a busca desses resultados e investigá-los a medida que forem encontrados.

5 Conclusão

Neste trabalho foram descritos os principais resultados envolvendo o maior autovalor da matriz laplaciana sem sinal e os parâmetros de otimização combinatória: número cromático, tamanho da maior clique e número de independência. A importância dessas desigualdades consiste no fato de que esses parâmetros podem ser usados para acelerar algoritmos exatos e heurísticos para determinação destes invariantes combinatórios.

Referências

- [1] Abreu,N.M.M.; *Old and new results on algebraic connectivity of graphs, Linear Algebra and its Applications*, v.423, pp. 53-73, 2007.
- [2] Abreu, N.M.M. ; Del-Vecchio,R.R.; Stevanovic,D.; Vinagre, C.T.M.; *Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional*, 2007.
- [3] Abreu, N.M.M.; Oliveira,C.S.; Lima,L.S.; *Conjecturas geradas automaticamente pelo sistema Auto-graphix: provas de algumas desigualdades para o índice da Matriz Laplaciana Sem Sinal, Anais do XXXIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2007.
- [4] Aouchiche, M.; Hansen,P; *A survey of automated conjectures in spectral graph theory, Linear Algebra and its Applications*, v.432, pp. 2293-2322, 2010.
- [5] Ayoobi, F.; Omid, G.R.; Tayfeh-Rezaie, B.; *A note on graphs whose signless Laplacian has three distinct eigenvalues, Linear and Multilinear Algebra*, V. 59, pp.701-706, 2011.
- [6] Cvetković, D., Spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, Research Report, (2010), available at: http://www.mi.sanu.ac.rs/projects/signless_L_reportApr11.pdf.
- [7] Cvetković, D., Doob, M. and Sachs, H., *Spectra of Graphs*, Academic Press, 1980.
- [8] Cvetković,D.; Rowlinson,P; Simić, S.; *Eigenvalue bounds for the Signless Laplacian, Publications de L'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 81(95)*, 2007, pp. 11-27.
- [9] Cvetković, D.; Simić, S.; *Towards a spectral theory of graphs based on signless Laplacian, I, Publications de L'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 85(99)*, 2009, pp. 19-33.
- [10] Cvetković,D.; Simić, S.; *Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, II, Linear Algebra and its Applications*, v. 432, 2010, pp. 2257-2272.
- [11] Feng, L.; Yu,G.; Ilić, A.; *The Laplacian spectral radius for unicyclic graphs with given independence number, Linear Algebra and its Applications*, V. 433, pp. 934-944, 2010.
- [12] Fiedler, M.; *Algebraic connectivity of graphs, Czechoslovak Mathematical Journal*, 23 (98), 1973, Praha
- [13] Hansen,P; Lucas,C.; *Bounds and conjectures for the signless Laplacian index of graphs, Linear Algebra and its Applications*, v.432, pp. 3319-3336, 2010.
- [14] Hansen, P.; Lucas, C.; *An inequality for the signless laplacian index of a graph using the chromatic number, The Mathematical Association of America, Graph Theory Notes of New York, LVII*, pp. 39-42, 2009.
- [15] He, B.; Jin, Y-L.; Zhang, X-D.; *Sharp bounds for the signless laplacian spectral radius in terms of clique number, Linear Algebra and its Applications*, In Press, 2011, doi:10.1016/j.laa.2011.10.008.
- [16] Hoffman, A. J., *On eigenvalues and colorings of graphs*, Academie Press, 79-91, 1970.
- [17] Hoffman A.J.; Smith J.H.; *On the spectral radii of topologically equivalent graphs, Recent Advances in Graph Theory*, ed. M. Fiedler, Academia Praha, 1975, pp. 273-281.

- [18] Li, R.; Shi, J.; *The minimum signless Laplacian spectral radius of graphs with given independence number*, *Linear Algebra and its Applications*, v. 433, pp. 1614-1622, 2010.
- [19] Lima, L.S.; Oliveira, C.S.; Abreu, N.M.M.; Nikiforov, V.; *The smallest eigenvalue of the signless Laplacian*, *Linear Algebra and its Applications*, v. 435, pp. 2570-2584, 2011.
- [20] Liu, J.; Fujian; Liu, B.; Guangzhou; *The maximum clique and the signless laplacian eigenvalues*, *Czechoslovak Mathematical Journal*, v.58, n. 4, pp. 1233-1240, 2008.
- [21] Merris, R.; *Laplacian Matrices of Graphs: A Survey*, *Linear Algebra and its Applications*, v.197/198, pp. 143-176, 1994.
- [22] Nikiforov, V., *Chromatic number and spectral radius*, *Linear Algebra and its Applications*, **426**, 155-171, 2007.
- [23] Oliveira, A.J.; Lima, L.S.; Abreu, N.M.M.; *Spread versus número cromático de um grafo*, *XLISBPO, Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2010.
- [24] Read, R.C.; Wilson, R.J.; *An Atlas of Graphs*, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [25] Spectral Graph Theory Homepage. Disponível em <http://www.sgt.pep.ufrj.br>. Acesso em: 02 de janeiro de 2011.
- [26] Wang, J.; Huang, Q.; *Maximizing the signless Laplacian spectral radius of graphs with given diameter or cut vertices*, *Linear and Multilinear Algebra*, 59:7, 733-744, 2011.
- [27] Wilf, H. S., *The eigenvalues of a graph and its chromatic number*, *J. London Math. Soc*, **42**, 330–332, 1967.
- [28] Wilson, R.A.; *Graphs, Colourings and the Four-colour Theorem*, Oxford Science Publications, 2002
- [29] Yan, C.; *Properties of spectra of graphs and line graphs*, *Applied Mathematics - A Journal of chinese Universities*, v.17, n. 3, pp.371-376, 2002.
- [30] Ye, M-L.; Fan, Y-Z.; Wang, H-F.; *Maximizing signless Laplacian or adjacency spectral radius of graphs subject to fixed connectivity*, *Linear Algebra and its Applications*, v.433, pp. 1180-1186, 2010.
- [31] Yu, G.; *On the maximal signless Laplacian spectral radius of graphs with given matching number*, *Proceedings of the Japan Academy, Ser: A Mathematical Sciences* v. 84, n. 9, pp.163-166, 2008.
- [32] Yu, G. ; Wu, Y.; Shu, J; *Signless Laplacian spectral radii of graphs with given chromatic number*, *Linear Algebra and its Applications*, v.435, pp. 1813-1822, 2011.
- [33] Zhang, X.D.; *The signless Laplacian spectral radius of graphs with given degree sequences*, *Discrete Applied Mathematics*, v. 157, pp. 2928-2937, 2009.