

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE FORMULAÇÕES PARA O PROBLEMA DE CAMINHO MAIS CURTO ROBUSTO

João Carlos Abreu Júnior

Universidade Federal de Minas Gerais, DCC, Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, Brasil
joaojunior.ma@gmail.com

Amadeu A. Coco

Universidade Federal de Minas Gerais, DCC, Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, Brasil
amadeuac@dcc.ufmg.br

Thiago Ferreira Noronha

Universidade Federal de Minas Gerais, DCC, Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, Brasil
tfn@dcc.ufmg.br

Andréa C. Santos

ICD-LOSI, Université de Technologie de Troyes 12, rue Marie Curie, BP 2060, 10010, Troyes CEDEX, France.
andrea.duhamel@utt.fr

Resumo: Este trabalho trata do problema do caminho mais curto robusto (PCC-R) e compara seis modelagens e as respectivas formulações matemáticas para esse problema. Três dessas modelagens são para a versão onde os custos estão definidos em intervalos e três para a versão onde os custos são definidos em cenários discretos. O objetivo deste trabalho é identificar quais das versões do PCC-R são as mais difíceis de se resolver.

Palavras-Chave: Otimização robusta, Caminho mais curto robusto, Caminho mais curto com arrependimento

Abstract: This paper deals with robust shortest path problem(PCC-R) and compares six modeling and their mathematical formulations for this problem. Three of these modeling are for the version where the costs are set at intervals and three for the version where costs are defined by discrete scenarios. The objective of this paper is to identify which versions of PCC-R are the hardest to solve.

Key-Word: Robust optimization, Robust shortest path, Shortest path with repentance

1 Introdução

Seja um grafo direcionado, no qual V é um conjunto de vértices e E é um conjunto de arcos, onde cada arco está associado a um peso w . Dados $s, t \in V$, o Problema do Caminho Mais Curto (PCC) consiste em encontrar um caminho entre o vértice de origem s e o vértice de destino t em cujo somatório dos custos associados aos arcos no caminho seja mínimo. O PCC é estudado desde a década de 50 [29]. A complexidade computacional do PCC é $O(n^3)$ [12]. Quando o custo associado aos arcos é sempre positivo, o algoritmo mais utilizado para sua resolução é o de Dijkstra [14]. Quando existem arcos de custos negativos (sem a presença de ciclos absorventes), o algoritmo mais utilizado na literatura é o de Bellmann-Ford [7] com complexidade $O(n^3)$ [12].

O PCC modela diversos problemas de interesse prático e teórico [15]. Entretanto, muitos problemas reais não podem ser modelados como um PCC porque possuem incertezas associadas ao custo dos arcos. Por exemplo, uma das principais aplicações do PCC é no cálculo automático de rotas entre dois pontos em um mapa. Os vértices em V representam interseções entre ruas, os arcos em E representam seguimentos de ruas, e o custo associado a cada arco representa o comprimento ou o tempo necessário para se percorrer este seguimento de rua. O objetivo neste caso é sair de um ponto de partida s e chegar ao destino final t o mais rápido possível. O caminho de menor comprimento entre s e t potencialmente seria o caminho mais rápido entre s e t . Entretanto, diversos fatores, tais como engarrafamentos em horários de pico, acidentes, podem aumentar muito o tempo despendido no percurso entre s e t . Desta forma, o caminho p , inicialmente o mais rápido dentre todos os caminhos, pode tornar-se um caminho ruim, enquanto um outro caminho q a princípio pior, pode tornar-se o mais rápido na prática. As técnicas de otimização mais utilizadas atualmente para resolver este tipo de problema são conhecidas como *Otimização Estocástica* [30] e *Otimização Robusta* [8].

Na Otimização Estocástica, os custos dos arcos do grafo são dados por variáveis aleatórias. O Problema do Caminho Mais Curto Estocástico (PCC-E) [25] consiste em encontrar o caminho entre o vértice origem s e o vértice de destino t em cujo valor esperado do somatório de seus arcos é mínimo. Uma das limitações desta técnica está no fato de que muitas vezes a distribuição de probabilidade do custo dos arcos (ruas) não é conhecida. Além disso, algumas aplicações, tais como atendimento de emergência por ambulâncias, são muito sensíveis ao pior caso do caminho. Nestes casos, apesar do valor esperado de um caminho ser o menor, o pior caso deste caminho pode não ser aceitável para o usuário do serviço.

Na Otimização Robusta, os custos dos arcos de E são dados por intervalos contínuos ou por conjuntos discretos de valores (chamados comumente de cenários). O Problema do Caminho Mais Curto Robusto (PCC-R) consiste em encontrar o caminho p dentre todos os caminhos entre o vértice de origem s e o vértice de destino t em p , cujo custo no pior cenário possível para p seja mínimo. Esta abordagem é a mais empregada quando a distribuição de probabilidade do custo dos arcos não é conhecida

ou, principalmente, quando a aplicação em questão é muito sensível ao pior caso do caminho.

Um exemplo de aplicação do PCC-R ocorre durante a transferência de um arquivo entre duas máquinas dentro de uma rede. Como é impossível determinar o momento no qual o arquivo será enviado, não é possível determinar com exatidão o estado da rede no momento de envio. Este problema pode ser modelado através de um grafo onde a máquina que irá transmitir o arquivo é o vértice de origem, a máquina que receberá o arquivo é o vértice de destino, as outras máquinas na rede são os vértices de transbordo e os enlaces que ligam uma máquina a outra são os arcos do grafo. Em cada arco o valor mínimo é o *throughput* da rede e o valor máximo é o valor registrado no momento onde se passa a maior quantidade de dados naquele arco. O objetivo é obter uma rota entre origem e destino que garanta a chegada do arquivo no menor tempo possível no pior caso.

Otimização Robusta foi inicialmente aplicada a problemas de planejamento de investimentos financeiros [16] e problemas de tomada de decisões estratégicas [26]. Atualmente, entre os problemas mais estudados na literatura, estão o PCC-R [1, 2, 3, 5, 8, 10, 11, 13, 17, 21, 19, 18, 23, 24, 25, 9, 27, 28, 31, 32, 33] e o Problema da Árvore Geradora Mínima Robusta [2, 3, 4, 8, 10, 20, 22].

Existem diferentes estratégias de modelagem robusta do PCC-R na literatura. As mais comuns são a *modelagem por intervalos* [5, 11, 17, 21, 18, 23, 24, 27, 33] e a *modelagem por cenários* [13, 32]. Na primeira, cada arco pode assumir qualquer valor real no intervalo, independentemente dos valores assumidos pelos outros arcos em A . Já na modelagem por cenários, são definidos um conjunto de cenários possíveis, cada um deles consiste em uma atribuição única de diferentes valores para o custo de todos os arcos em A .

Este trabalho trata do PCC-R e compara seis modelagens e as respectivas formulações matemáticas para esse problema. Três dessas modelagens são para a versão onde os custos estão definidos em intervalos, presente na seção 2.1 e três para a versão onde os custos são definidos em cenários discretos, mostrados na seção 2.2. A diferença está nos diferentes objetivos de otimização que também são descritos em detalhes. O objetivo deste trabalho é identificar quais das versões do PCC-R são as mais difíceis de se resolver pelo estado da arte em resolvedores de programação inteira. A seção 3 apresenta os resultados computacionais obtidos e a seção 4 as considerações finais.

2 Modelagens e Formulações para o Problema do Caminho Mais Curto Robusto

Seja G um grafo direcionado, no qual V é um conjunto de vértices e E é um conjunto de arcos, onde cada arco e está associado a um conjunto de pesos. Busca-se, de acordo com um critério de otimização, o menor caminho entre o vértice de origem s e o vértice de destino t . A seção 2.1 apresenta três modelagens onde o conjunto de pesos é considerado um intervalo de valores e a seção 2.2 apresenta três modelagens onde esse conjunto é considerado um conjunto finito de valores.

2.1 Problema do Caminho Mais Curto Robusto Intervalar

Dado G , com V , o intervalo de valores que cada arco e pode assumir, defini-se um cenário ω como uma fixação de valores $w_e(\omega)$ para todos os arcos e e como o conjunto de todos os cenários possíveis. A Figura 1 mostra um grafo, com quatro vértices e seis

arcos, onde os custos de cada arco estão definidos em um intervalo de valores.

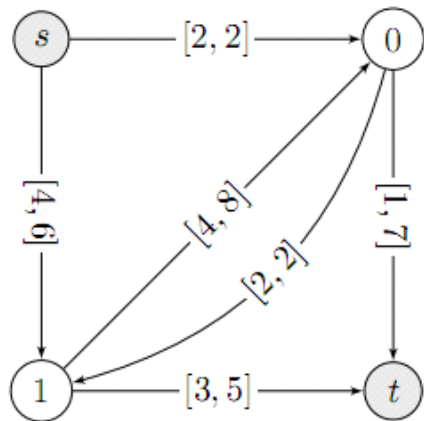


Figura 1: Exemplo de um grafo com os custos dos arcos definido por um intervalo de valores

Seja um caminho entre s e t em G . Abaixo são apresentados três modelagens para o PCC-R que divergem quanto ao critério de escolha do caminho robusto em grafos que possuem os custos dos arcos definidos em um intervalo de valores.

Problema do Caminho Mais Curto Robusto Intervalar Absoluto

Para cada cenário ω , possui um custo associado a esse cenário. Seja c_{\max} o maior custo que c pode assumir, entre todos os cenários, o Problema do Caminho Mais Curto Robusto Intervalar Absoluto (PCC-RI) consiste em encontrar o menor $\max_{\omega} c_{\omega}$ entre todos os caminhos, ou seja, a solução para o PCC-RI é o caminho mais curto entre s e t no cenário, onde todos os arcos estão com os custos fixados em c_{\max} e é encontrada em tempo polinomial. Esse problema foi modelado em [17] e pode ser resolvido pelo algoritmo de Dijkstra [14].

Problema do Caminho Mais Curto Robusto Intervalar com Arrependimento

O *desvio robusto* de π no cenário ω é definido como a diferença entre o custo do caminho π no cenário ω e o custo do menor caminho entre s e t no cenário ω , ou seja, é o quanto seria pior que o melhor caminho possível caso o cenário ω ocorresse. Denota-se por ω_{π} o cenário onde observa-se o pior desvio robusto para o caminho π . Está provado em [17] que ω_{π} pode ser gerado fixando-se c_{\max} , c_{\min} e c . Seja o *custo robusto* de um caminho definido como o desvio robusto de π em ω_{π} , o Problema do Caminho Mais Curto Robusto Intervalar com Arrependimento (PCC-RIA) consiste em encontrar o caminho com o menor custo robusto dentre todos os caminhos entre s e t . Esse problema é NP-Difícil [32].

O caminho com menor custo robusto no grafo da Figura 1 é o caminho $s \rightarrow 0 \rightarrow t$. A Figura 2 mostra o cenário ω_{π} , onde os arcos de $s \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow t$ estão com custos fixados em c_{\max} e os demais arcos do grafo estão com os custos fixados em c_{\min} . O custo de π no cenário ω_{π} é $c_{\max} + c_{\max}$, enquanto o custo do caminho mais curto entre s e t no cenário ω_{π} é c_{\min} . Portanto, o custo robusto de π é $c_{\max} + c_{\max} - c_{\min}$.

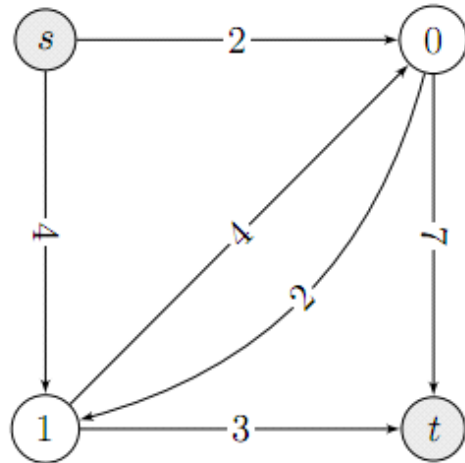


Figura 2: Exemplo de um cenário obtido a partir do grafo da Figura 1, onde

Uma formulação por programação linear inteira mista para o PCRI foi proposta em [17]. Existem dois conjuntos de variáveis na formulação, quando o arco faz parte do caminho mais curto robusto e caso contrário. As variáveis x_{ij} armazenam o custo do caminho mínimo entre o vértice origem i e o vértice j no cenário induzido pelo caminho mínimo robusto definido pelas variáveis y_{ij} .

$$(1)$$

$$(2)$$

$$(3)$$

$$(4)$$

$$(5)$$

$$(6)$$

A função objetivo (1) minimiza o custo robusto do caminho definido pelas variáveis x_{ij} . As inequações (2) garantem a consistência entre as variáveis x_{ij} e y_{ij} . As restrições (3) definem a conservação do fluxo entre s e t . O custo robusto associado ao nó de origem do caminho é definido na equação (4). As restrições (5) e (6) definem os domínios das variáveis x_{ij} e y_{ij} .

Problema do Caminho Mais Curto Robusto Intervalar com Arrependimento Relativo

O *desvio robusto relativo* de π no cenário ω é definido como a razão entre a diferença do custo do caminho π no cenário ω e o custo do menor caminho entre s e t no cenário ω por o custo do menor caminho entre s e t no cenário ω_0 . O Problema do Caminho Mais Curto Robusto Intervalar com Arrependimento Relativo (PCC-RIAR) consiste em encontrar o caminho com o menor desvio robusto relativo dentre todos os caminhos entre s e t . Esse problema é NP-Difícil [6].

A Figura 3 mostra um possível cenário ω para o grafo da Figura 1. Seja π com custo $c(\pi, \omega)$, um caminho possível no cenário da Figura 3 e π_0 com custo $c(\pi_0, \omega_0)$, o caminho de menor custo para o cenário da Figura 3. Portanto, o desvio robusto relativo para o caminho π é igual a: $\frac{c(\pi, \omega) - c(\pi_0, \omega)}{c(\pi_0, \omega)}$, ou seja, o caminho π é pior que o menor caminho entre s e t , no cenário ω presente na Figura 3.

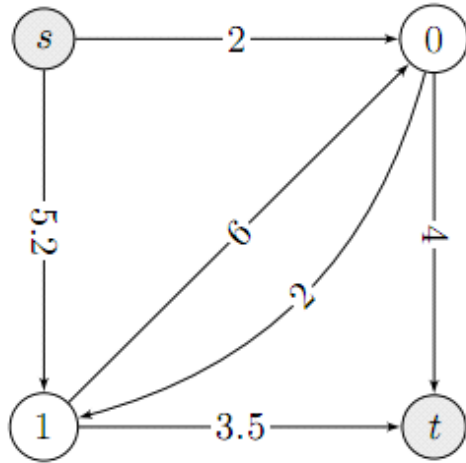


Figura 3: Um cenário para o grafo da Figura 1

A formulação para o PCC-RIAR proposta em [6] pode ser obtida da seção anterior, alterando-se a função objetivo e utiliza dois conjuntos de variáveis, quando ω_{ij} , o arco (i, j) faz parte do caminho mais curto robusto e caso contrário. As variáveis μ_{ij} armazenam o custo do caminho mínimo entre o vértice origem i e o vértice j no cenário induzido pelo caminho mínimo robusto definido pelas variáveis ω_{ij} .

$$(7)$$

A função objetivo (7) minimiza o custo robusto relativo do caminho definido pelas variáveis ω_{ij} . O espaço de soluções viáveis é definido nas equações de (2)-(6).

2.2 Problema do Caminho Mais Curto Robusto Discreto

Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado, no qual V é um conjunto de vértices e A é um conjunto de arcos, onde cada arco $(i, j) \in A$ está associado a um conjunto finito de pesos, com $|W_{ij}| = 3$. Conforme [3] um cenário ω é obtido fixando-se um valor ω_{ij} para cada arco $(i, j) \in A$. A Figura 4 mostra um grafo com quatro vértices e sete arcos, onde cada arco pode assumir três valores possíveis.

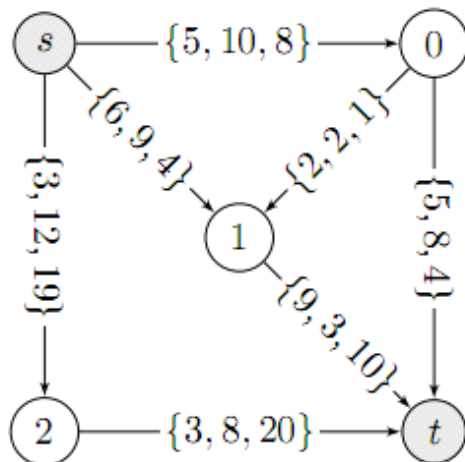


Figura 4: Exemplo de um Grafo com 3 cenários possíveis

Seja um caminho entre e em . Abaixo são mostradas três modelagens para o PCC-R que divergem quanto ao critério de escolha do caminho robusto em grafos que possuem os custos dos arcos definidos em um conjunto finito de valores.

Problema do Caminho Mais Curto Robusto Discreto Absoluto

Para cada cenário , possui um custo associado a esse cenário. Seja o maior custo que pode assumir, entre todos os cenários, o Problema do Caminho Mais Curto Robusto Discreto Absoluto(PCC-RD) consiste em encontrar o menor entre todos os caminhos possíveis. Esse problema é NP-Difícil [3].

Na Tabela 1, considerando o grafo da Figura 4, temos um exemplo de cálculo do PCC-RD. A coluna 1 apresenta todos os caminhos da origem ao destino . Nas colunas 2, 3 e 4 são mostrados, respectivamente, o custo de cada caminho no cenário , e . É mostrado na coluna 5 o valor máximo do custo de cada caminho para o grafo mostrado na Figura 4, ou seja, o maior valor entre os valores das colunas 2, 3 e 4. Portanto, o caminho com o menor custo robusto absoluto para o grafo mostrado na Figura 4 é (linha 3 da Tabela 1) com custo 15.

Caminho	Custo em	Custo em	Custo em	Maior Custo
	10	18	12	18
	16	15	19	19
	15	12	14	15
	06	20	39	39

Tabela 1: Custos de todos os caminhos do grafo da Figura 4. Na coluna 5 temos o valor máximo entre as colunas 2, 3 e 4

A formulação do PCC-RD foi proposta em [3] e pode ser linearizada, conforme mostrado a seguir. Se o arco faz parte do caminho no cenário e , caso contrário. A variável é o custo do arco no cenário .

$$(8)$$

$$(9)$$

A função objetivo (8) minimiza o custo robusto entre e . As restrições (9) garantem que seja escolhido o pior cenário de cada caminho. O espaço de soluções viáveis é definido nas equações (3), (5) e (9).

Problema do Caminho Mais Curto Robusto Discreto com Arrependimento

O *desvio robusto* de no cenário é definido como a diferença entre (i) o custo do caminho no cenário e (ii) o custo do menor caminho entre e no cenário , representado por , ou seja, é o quanto seria pior que o melhor caminho possível caso o cenário ocorresse. O Problema do Caminho Mais Curto Robusto Discreto com Arrependimento(PCC-RDA) consiste em minimizar, entre todos os cenários, o

máximo desvio robusto e é NP-Difícil [3].

A Tabela 2, considerando o grafo da Figura 4, apresenta um exemplo de cálculo do PCC-RDR. Na coluna 1 são mostrados todos os caminhos de a . Nas colunas 2, 3 e 4 o custo de cada caminho no cenário ω , e ω' é apresentado. As colunas 5, 6 e 7 fornecem o valor do desvio robusto de cada caminho no cenário ω , e ω' e na coluna 8 tem-se o valor máximo dos desvios de cada caminho, ou seja, o maior valor entre os valores das colunas 5, 6 e 7. Portanto, o caminho com o menor custo robusto para o grafo mostrado na Figura 4 é (linha 1 da Tabela 2) com custo 6.

Caminho	Custo em			Desvio em			Maior Desvio
	ω	ω'	ω''	ω	ω'	ω''	
10-06	10	18	12	$10-06=04$	$18-12=06$	$12-12=00$	06
16-06	16	15	19	$16-06=10$	$15-12=03$	$19-12=07$	10
15-06	15	12	14	$15-06=09$	$12-12=00$	$14-12=02$	09
06-06	06	20	39	$06-06=00$	$20-12=08$	$39-12=27$	27

Tabela 2: Custos de todos os caminhos do grafo da Figura 4. Na coluna 8 temos o valor máximo entre as colunas 5, 6 e 7

A formulação do PCC-RDA foi proposta em [3] e pode ser linearizada, conforme mostrado abaixo. Quando o arco ij faz parte do caminho entre s e t no cenário ω e caso contrário.

$$(10)$$

$$(11)$$

A função objetivo (10) minimiza o custo robusto do caminho definido pelas variáveis x_{ij} . As restrições (11) escolhem o pior custo robusto de cada caminho, entre todos os cenários. O espaço de soluções viáveis é definido nas equações (3), (5) e (11).

Problema do Caminho Mais Curto Robusto Discreto com Arrependimento Relativo

O *desvio robusto relativo* de ω no cenário ω' é definido como a razão entre a diferença do custo do caminho ω no cenário ω' e o custo do menor caminho entre s e t no cenário ω' por o custo do menor caminho entre s e t no cenário ω . O Problema do Caminho Mais Curto Robusto Discreto com Arrependimento Relativo (PCC-RDAR) consiste em minimizar, entre todos os cenários, o máximo desvio robusto relativo.

A Tabela 3, considerando o grafo da Figura 4, mostra um exemplo de cálculo do PCC-RDAR. Na coluna 1 é mostrado todos os caminhos de a . As colunas 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente, o custo de cada caminho no cenário ω , e ω' . Nas colunas 5, 6 e 7 estão os valores do desvio relativo de cada caminho no cenário ω , e ω' e na coluna 8 o valor máximo dos desvios relativos de cada caminho, ou seja, o maior valor entre os valores das colunas 5, 6 e 7. Portanto, o caminho com o menor custo robusto relativo para o grafo mostrado na Figura 4 é (linha 1 da Tabela 3) com custo 0.66.

Caminho	Custo em			Desvio relativo em			Maior
	ω	ω'	ω''	ω	ω'	ω''	

	10	18	12	$(10-6)/6=0.66$	$(18-12)/12=0.50$	$(12-12)/12=0.00$	0.66
	16	15	19	$(16-6)/6=1.66$	$(15-12)/12=0.25$	$(19-12)/12=0.58$	1.66
	15	12	14	$(15-6)/6=1.50$	$(12-12)/12=0.00$	$(14-12)/12=0.16$	1.50
	06	20	39	$(6-6)/6=0.00$	$(20-12)/12=0.66$	$(39-12)/12=2.25$	2.25

Tabela 3: Custos de todos os caminhos do grafo da Figura 4. A coluna 8 apresenta o máximo desvio robusto relativo de cada caminho

A formulação do PCC-RDAR foi proposta em [6] e pode ser obtida através da seção anterior, substituindo a função objetivo e usa dois conjuntos de variáveis. Quando o arco faz parte do caminho entre e no cenário e caso contrário. A variável representa o custo do menor caminho entre e no cenário .

$$(12)$$

$$(13)$$

A função objetivo (12) minimiza o máximo desvio robusto relativo do caminho definido pelas variáveis . As restrições (13) escolhem o pior custo robusto relativo de cada caminho, entre todos os cenários. O espaço de soluções viáveis é definido nas equações (3), (5) e (13).

3 Experimentos Computacionais

Todas as formulações apresentadas foram codificados no ILOG CPLEX 12.3, com exceção da formulação para o PCC-RI que é resolvida em tempo polinomial e a formulação para o PCC-RIAR que não pode ser linearizada facilmente, pois tem divisão de variáveis reais. Para avaliá-los, eles foram executados, com um tempo máximo de execução de duas horas, uma vez em uma máquina Intel Core 2 Duo com 2.00 GHz de clock e 4 GB de memória RAM.

Foram gerados dois conjuntos de testes, um para o problema PCC-RIA e um para os problemas do PCC-D, ambos contém onze instâncias, sendo cada instância um grafo do tipo GRID. Para o problema PCC-RIA, o intervalo de custos associados a cada arco é definido da seguinte maneira: os limites inferiores são gerados aleatoriamente no intervalo e os limites superiores são definidos em . Para os problemas do PCC-D, foram gerados, a partir de cada instância para o PCC-RIA, uma instância com dez cenários. Cada cenário corresponde a fixar o custo das arestas em um número aleatório gerado entre e . Para todas as instâncias os nós de origem e destino estão, respectivamente, localizados na margem esquerda baixa e na margem direita alta.

Os resultados para o problema PCC-RIA, estão na tabela 4. Cada linha corresponde a uma instância de teste. A coluna 1 tem o nome da instância e suas características. A coluna 2 mostra o limite inferior(LB) e o limite superior(UB), apenas um é mostrado quando esses valores são iguais, do custo do caminho robusto. A coluna 3 mostra a quantidade de nós na árvore do Branch-and-Bound que o CPLEX utilizou para encontrar o LB e UB e a coluna 4 tem os tempos gastos até se chegar a solução ótima ou o tempo máximo ser atingido.

	PCC-RIA	
--	---------	--

	LB/UB	#Nós	t(s)
g_3x30	309935	4521	6.69
g_4x25	269865	1378	3.82
g_4x40	419837	7374	15.02
g_5x20	229788	544	1.51
g_5x50	529576	10566	51.01
g_6x17	209888	280	1.51
g_6x60	639748	18080	180.40
g_7x70	749676	40037	754.05
g_8x80	859803	52433	2073.42
g_9x90	925988.56/970261	83767	7199.99
g_10x100	1027501.40/1080339	50818	7200.15

Tabela 4: Comparação entre os tempos para o problema PCC-RIA

Os resultados para os problemas do PCC-D, estão na tabela 5. Cada linha corresponde a uma instância de teste. A coluna 1 tem o nome da instância e suas características. As colunas 2, 3 e 4 são referentes ao PCC-RD, as colunas 5, 6 e 7 são referentes ao PCC-RDA e as colunas 8, 9 e 10 são referentes ao PCC-RDAR. As colunas 2, 5 e 8 mostram o valor ótimo encontrado. As colunas 3, 6 e 9 mostram a quantidade de nós na árvore do Branch-and-Bound que o CPLEX utilizou para encontrar o ótimo e as colunas 4, 7 e 10 tem os tempos gastos até se chegar a solução ótima.

Instância	PCC-RD			PCC-RDA			PCC-RDAR		
	Ótimo	#Nós	t(s)	Ótimo	#Nós	t(s)	Ótimo	#Nos	t(s)
z_3x30	166559	29	0.06	46186	99	0.17	0.3830308	48	0.14
z_4x25	143418	77	0.11	43231	133	0.23	0.4353798	148	0.25
z_4x40	215279	82	0.31	64086	234	0.44	0.4384951	263	0.30
z_5x20	121399	122	0.14	43295	371	0.53	0.5696707	206	0.34
z_5x50	271916	417	0.84	81174	997	3.54	0.4209891	661	2.68
z_6x17	109926	333	0.41	46080	480	0.30	0.7473055	479	0.22
z_6x60	328325	1450	6.57	105720	3039	7.44	0.4800624	1736	4.96
z_7x70	381055	2530	10.64	124200	3644	11.64	0.4850564	3012	9.22
z_8x80	436326	13715	44.55	143300	50992	122.15	0.4863160	54799	103.60
z_9x90	491440	117938	372.89	167502	204570	560.84	0.5191885	204421	432.39
z_10x100	546056	262779	955.66	193300	528052	6498.00	0.5492019	180573	518.66

Tabela 5: Comparação entre os tempos e quantidade de nós na árvore Branch-and-Bound para os problemas do PCC-D

Comparando os resultados obtidos nas tabelas 4 e 5, conclui-se que o PCC-RDA é mais rápido para se resolver do que o PCC-RIA, isso se deve ao fato de que, no PCC-RDA temos apenas uma variável de decisão, porque os valores de foram computados previamente e no PCC-RDA temos duas variáveis de decisão.

4 Considerações Finais

Nesse trabalho foram mostradas seis modelagens para o problema do caminho mais curto robusto. As modelagens que possuem formulação linear mista e não são resolvidas em tempo polinomiais, foram codificadas no ILOG CPLEX e o tempo até encontrar o ótimo, limitado em duas horas, foi comparado.

O tempo para encontrar a solução ótima não depende apenas se está

considerando o caso discreto ou intervalar, mas também o critério de otimização utilizado. Entre as versões lineares mistas do PCC-R, a que apresentou os maiores tempos de resolução foi PCC-RIA. O desempenho do CPLEX se explica possivelmente em virtude do problema central (caminhos mais curtos) ser resolvido rapidamente. Isto ocorre porque o CPLEX possui diversos cortes que tratam bem as restrições utilizadas nos modelos apresentados anteriormente. Entretanto, a medida que o tamanho das instâncias aumenta, mais complicado será a resolução. Para a instância "z_10x100", o tempo de execução já é de aproximadamente 1h e 40 minutos.

5 Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico(CNPq), Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referências

[1] D. Adjiashvili and R. Zenklusen. An s-t connection problem with adaptability. *Discrete Applied Mathematics*, 159:695--705, 2011.

[2] H. Aissi and C. Bazgan and D. Vanderpooten. Approximation complexity of min-max (regret) versions of shortest path, spanning tree, and knapsack. *Annales du LAMSADE*, pages 862-873 __markedentry =, 2005.

[3] H. Aissi and C. Bazgan and D. Vanderpooten. Min-max and min-max regret versions of combinatorial optimization problems: A survey. *European Journal of Operational Research*, 197:427--438, 2009.

[4] I. D. Aron and P. V. Hentenryck. On the complexity of the robust spanning tree problem with interval data. *Operations Reserach Letters*, 32:36--40, 2004.

[5] I. Averbakh and V. Lebedev. Interval data minmax regret network optimization problems Igor Averbakh. *Discrete Applied Mathematics*, 138:289--301, 2004.

[6] Igor Averbakh. Computing and minimizing the relative regret in combinatorial optimization with interval data. *Discrete Optimization*, 2:273-287, 2005.

[7] R. Bellman. On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16:87--90, 1958.

[8] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust optimization -- methodology and applications. *Math. Programming*, 92:453--480, 2002.

[9] C. Büsing. Recoverable Robust Shortest Path Problems. *Networks*,

59:181--189, 2012.

[10] C. Büsing. The Exact Subgraph Recoverable Robust Shortest Path Problem. In Ravindra K. Ahuja and Rolf H. Möhring and Christos D. Zaroliagis, editors, *Robust and Online Large-Scale Optimization*, chapter The Exact Subgraph Recoverable Robust Shortest Path Problem, pages 231--248. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009.

[11] D. Catanzaro and M. Labbé and M. Salazar-Neumann. Reduction approaches for robust shortest path problems. *Computers & Operations Research*, 38:1610--1619, 2011.

[12] T. H. Cormen and C. E. Leiserson and R. L. Rivest and C. Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 3rd edition, 2009.

[13] L. C. Dias and J. N. Climaco. Shortest path problems with partial information: Models and algorithms for detecting dominance. *European Journal Of Operational Research*, 121:16--31, 2000.

[14] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connection with graphs. *Numerische Mathematik*, 1:269--271, 1959.

[15] G. Gallo and S. Pallottino. Shortest Path Methods: A Unifying Approach. *Mathematical Programming Study*, 26:38--64, 1986.

[16] S. K. Gupta and J. Rosenhead. Robustness in sequential investment decisions. *Management science*, 15:B18--B29, 1968.

[17] O. E. Karasan and H. Yaman and M. C. Pinar. The robust shortest path problem with interval data. Technical report, Bilkent University, Department of Industrial Engineering, 2001.

[18] A. Kasperski and P. Zieliski. Minmax regret approach and optimality evaluation in combinatorial optimization problems with interval and fuzzy weights. *European Journal of Operational Research*, 200:680--687, 2010.

[19] A. Kasperski and P. Zieliski. On the approximability of minmax (regret) network optimization problems. *Inf. Process. Lett.*, 109:262--266, 2009.

[20] A. Kasperski and P. Zieliski. On the approximability of robust spanning tree problems. *Theoretical Computer Science*, 412:365--374, 2011.

[21] A. Kasperski and P. Zieliski. The robust shortest path problem in series--parallel multidigraphs with interval data. *Operations Reserach Letters*, 34:69--76, 2006.

[22] R. Montemanni and L. M. Gambardella. A branch and bound algorithm for the robust spanning tree problem with interval data. *European Journal of Operational Research*, 161:771--779, 2005.

- [23] R. Montemanni and L. M. Gambardella. The robust shortest path problem with interval data via Benders decomposition. *A Quarterly Journal of Operations Research*, 3:315--328, 2005.
- [24] R. Montemanni and L. M. Gambardella and A. V. Donati. A branch and bound algorithm for the robust shortest path problem with interval data. *Operations Reserach Letters*, 32:225--232, 2004.
- [25] Y. Nie and X. Wu. Shortest path problem considering on-time arrival probability. *Transportation Research Part B*, 43:597--613, 2009.
- [26] M. J. Rosenhead and M. Elton and S. K. Gupta. Robustness and Optimality as Criteria for Strategic Decisions. *Operational Research Quarterly*, 23:413--430, 1972.
- [27] M. Salazar-Neumann. The robust shortest path and the single-source shortest path problems : interval data. *Annales du LAMSADE , Paris*, 7:237--251, 2010.
- [28] R. Seshadri and K. K. Srinivasan. Algorithm for Determining Most Reliable Travel Time Path on Network with Normally Distributed and Correlated Link Travel Times. *Transportation Research Record*, 2196:83--92, 2010.
- [29] A. Shimbel. Structure in Communication Nets. *Proceedings of the symposium on information Networks, New York.*, pages 199--203, 1955.
- [30] J. C. Spall. *Introduction to Stochastic Search and Optimization*. Wiley, 2003.
- [31] X. Wu and Y. Nie. Implementation Issues for the Reliable a Priori Shortest Path Problem. *Transportation Research Record*, 2081:51--60, 2010.
- [32] G. Yu and J. Yang. On the robust shortest path problem. *Computers & Operations Research*, 25:457--468, 1997.
- [33] P. Zieliski. The computational complexity of the relative robust shortest path problem with interval data. *European Journal of Operational Research*, 158:570--576, 2004.