



SPOLM 2007

ISSN 2175-6295

Rio de Janeiro- Brasil, 08 e 09 novembro de 2007.

## MODELAMENTO MATEMÁTICO E COMPUTACIONAL PARA UMA ABORDAGEM HEURÍSTICA DE BUSCA LOCAL A PROBLEMAS DE FLUXO MULTIPRODUTO INTEIRO

**Carlos Alexandre Silva**

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais  
Av. Amazonas, 7675 Nova Gameleira 30510-000 – Belo Horizonte, MG  
[carlos@dppg.cefetmg.br](mailto:carlos@dppg.cefetmg.br)

**Sérgio Ricardo de Souza**

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais  
Av. Amazonas, 7675 Nova Gameleira 30510-000 – Belo Horizonte, MG  
[sergio@dppg.cefetmg.br](mailto:sergio@dppg.cefetmg.br)

### Resumo

Os problemas de fluxo multiproduto figuram entre os mais difíceis problemas de programação linear. Sua larga variedade de aplicações, sobretudo nas áreas de telecomunicação e sistemas de transporte, motiva inúmeros investigadores a abordarem este tema em suas pesquisas desde o início da década de 60. Problemas que retratam uma aplicação real, em geral, apresentam uma elevada dimensão em relação à quantidade de variáveis e restrições, tornando os métodos exatos inapropriados, em razão da lenta convergência apresentada. Tal fato motiva a utilização de novas técnicas de resolução, como os procedimentos aproximados ou heurísticos, que, apesar de não garantirem a otimalidade, apresentam uma solução de boa qualidade e em tempo computacional razoável. Neste trabalho, será apresentada uma modelagem matemática e computacional do problema de fluxo multiproduto inteiro, fazendo uso das metaheurísticas de busca local *iterated local search (ILS)* e *simulated annealing (SA)*, percorrendo um espaço de busca gerado pela restrição de capacidade.

**Palavras-Chaves:** Fluxo Multiproduto Inteiro; Modelagem; Metaheurísticas; Busca Local; Restrição de Capacidade.

### Abstract

The multicommodity flow problems are almost more difficult problems of linear programming. Its wide variety of applications, over all, in the areas of telecommunication and system of transport, motivated unnumerable researchers to approach this subject in its research since the beginning of the decade of 60. Problems that prtray an application real, in general, present one high dimension, in relation the amount of the variable and restrictions, becoming the unavaliable accurate methods, in detriment of the slow presented convergence. Such fact, motivates the use new resolution techniques, as the approach procedures or heuristic, that althought not to guarantee the optimality, its present a solution of good quality and in reasonable computational time. In this work, will be presented a mathematical and

computational modeling of the integer multicommodity flow problem, making use of the metaheuristics of local search iterated local search (ILS) and simulated annealing (SA), covering a space of search generated for the capacity restriction.

**Keywords:** Integer Multicommodity Flow; Modeling; Metaheuristics; Local Search; Capacity Restriction.

## 1. INTRODUÇÃO

Os primeiros trabalhos relatados na literatura versando sobre o Problema de Fluxo Multiproduto (PFM) datam do início dos anos 60, com as contribuições de [6] e [7]. Em geral, essa classe de problemas envolve um grande número de variáveis e restrições, possuindo uma extensa variedade de aplicações, que inclui:

- determinação de compostos para refinaria de petróleo [10];
- roteamento de tráfego na internet [2];
- alocação de estudantes em escolas [3];
- seqüenciamento de suprimentos militares [12];
- produção de sistema portuário [5];

dentre outras de grande importância econômica e/ou social.

A modelagem do problema tratado neste trabalho incide sobre um grafo direcionado, estrutura composta por pontos (nós) ligados por retas (arestas) orientadas. Muitos problemas envolvendo situações reais podem ser representadas por grafos. Por exemplo, na modelagem de um problema aplicado à área de transporte, onde os nós representariam cidades de uma região, as arestas as rotas ligando as cidades e cada rota teria um determinado peso, o qual corresponderia à distância entre uma cidade a outra, e o objetivo seria transportar alguma mercadoria visando a menor trajetória.

No problema em tela, a rede é identificada por um grafo, cujos nós dizem respeito a um ponto de oferta ou demanda de um determinado produto ou simplesmente representa um ponto de transbordo. As arestas do grafo representam os meios pelos quais trafegam os produtos pela rede, sendo que cada aresta possui uma certa capacidade, limitando o fluxo de produtos que transitam por ela. Há um custo associado a cada produto em cada aresta, sendo o somatório desses custos a função objetivo a ser minimizada. As variáveis de interesse representam o fluxo dos produtos pelos arcos da rede e pertencem ao conjunto dos inteiros positivos.

Existem quatro restrições de interesse: restrição de conservação de fluxo, a qual é responsável pelo gerenciamento do fluxo dos produtos pelos nós da rede, conseqüentemente pelos arcos; restrição de capacidade, onde o fluxo dos produtos em cada arco não deve exceder sua capacidade; restrição de integralidade, proibindo o fracionamento dos produtos em partes não inteiras; e, por fim, a restrição de positividade, onde o fluxo mínimo é representado pelo fluxo nulo.

Em suma, o problema fica caracterizado pela determinação do fluxo dos produtos pelos arcos da rede, mediante a um conjunto de restrições, visando a obtenção de um custo mínimo. Este problema é modelado como um problema de Programação Linear Inteira (PLI), considerando a matriz de incidência da rede pela formulação nó-arco.

Os problemas de fluxo multiproduto apresentam uma alta complexidade combinatorial, caracterizando-o como NP-difícil, ou seja, não há algoritmo polinomial que o resolva. Motivado por este fato, técnicas heurísticas apresentam uma boa aceitação na tentativa de solucionar o problema. As instâncias utilizadas para os testes foram produzidas por um gerador aleatório (GenMCF), desenvolvido por Carina Pimentel e Filipe Alvelos do Departamento de Produção e Sistemas da Universidade do Minho, Portugal [1].

## 2. ABORDAGEM HEURÍSTICA

### 2.1. MÉTODOS APROXIMADOS

Os algoritmos baseados em métodos aproximados não necessariamente produzem uma solução ótima, mas soluções que estão dentro de um certo fator da solução ótima. O desenvolvimento desses algoritmos é motivado pela grande dificuldade em se resolver satisfatoriamente vários problemas de otimização combinatorial.

O paradigma dos algoritmos de aproximação pode ser entendido como a perda da otimalidade em detrimento à eficiência, pois, apesar do sacrifício à otimalidade, ainda sim é possível dar boas garantias sobre o valor da solução obtida, procurando ganhar o máximo em termos de eficiência computacional.

Os procedimentos heurísticos são bastante utilizados na abordagem de problemas NP-difíceis, como por exemplo, algoritmos para construção de soluções, técnicas de busca local e metaheurísticas. Pode-se dizer que uma metaheurística consiste na combinação de heurísticas mais simples, com o objetivo de encontrar soluções melhores, ou seja, procura-se reduzir as chances de que o algoritmo fique preso a ótimos locais tal qual em uma busca local.

Existem quatro características importantes a serem definidas na utilização de uma metaheurística aplicada a um problema, são elas:

- critério de escolha de uma solução inicial;
- definição da vizinhança  $N(s)$  de uma solução  $s$ ;
- critério de seleção de uma solução vizinha dentro de  $N(s)$ ;
- critério de término.

Para a escolha da solução inicial, foi utilizada a metaheurística *simulated annealing*. A região de vizinhança  $N(s)$  foi construída a partir da restrição de capacidade presente na formulação do problema. As soluções vizinhas geradas procuram modificar a solução corrente, na tentativa de melhorar sua qualidade, compreendendo as restrições do modelo e a função objetivo de minimização. A técnica empregada para a resolução do problema de fluxo multiproduto inteiro fundamenta-se na metaheurística *iterated local search*.

### 2.2. BUSCA LOCAL

Os procedimentos heurísticos *simulated annealing* e *iterated local search* fazem uso de uma busca local para gerar novas soluções. São comuns a estes procedimentos algumas características, como:

- busca na vizinhança de uma ou mais soluções;
- fácil entendimento;
- rapidez na obtenção de soluções;
- não é necessário conhecimento aprofundado do problema.

Dentre os algoritmos que utilizam a busca local, pode-se citar *Multistart*, *Tabu Search*, *Iterated Local Search (ILS)* e *Simulated Annealing (SA)*, sendo os dois últimos utilizados como ferramentas para resolver o problema abordado nesta proposta de trabalho. O algoritmo **ILS** foi proposto por Lourenço et al. [9] em 2002 e o **SA** por Kirkpatrick et al. [8] em 1983. Na Tabela 1 estão algumas características dos métodos que foram utilizados.

Tabela 1: Características dos métodos.

Metaheurísticas	Características
<b>ILS</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• soluções obtidas por perturbações na solução ótima local;</li><li>• perturbação forte permite exploração de diferentes soluções;</li><li>• perturbação fraca evita o reinício aleatório.</li></ul>
<b>SA</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• analogia com processo físico de resfriamento de sólido superaquecido;</li></ul>

Metaheurísticas	Características
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• busca não-determinística;</li> <li>• quão pior a solução, menor a chance de ser aceita.</li> </ul>

### 2.3. ITERATED LOCAL SEARCH

O método *Iterated Local Search* (ILS) se baseia na idéia de que um procedimento de busca local pode ser melhorado, produzindo soluções obtidas de perturbações na solução ótima local. A perturbação não pode ser muito restrita, pois, nesse caso, pode-se não sair do ótimo local e, ao mesmo tempo, não deve ser muito ampla, senão pode provocar um reinício aleatório.

A Figura 1 ilustra o efeito da perturbação em uma dada solução  $s^*$ .

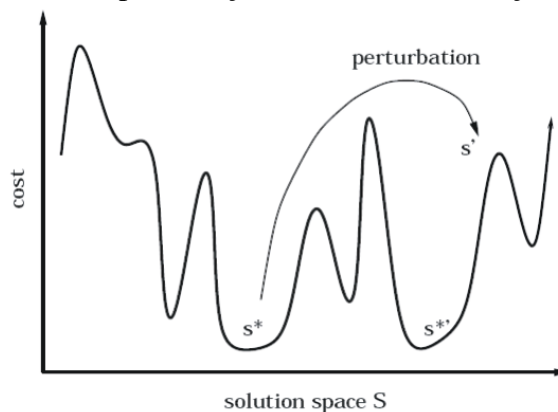


Figura 1: Perturbação sobre uma solução  $s^*$  [9]

Para a aplicação do algoritmo **ILS** em um dado problema, é necessário especificar quatro componentes:

- *GeraSolucaoInicial*( $\cdot$ ): gera uma solução inicial  $s_0$ ;
- *BuscaLocal*( $\cdot$ ): retorna uma solução melhorada  $s''$ ;
- *Perturbacao*( $\cdot$ ): modifica a solução corrente  $s$ , guiando-a a uma solução intermediária  $s'$ ;
- *CriterioAceitacao*( $\cdot$ ): decide de qual solução a próxima perturbação será aplicada.

A Figura 2 mostra a rotina computacional básica do **ILS**.

```

procedimento ILS
1  $s_0 \leftarrow \text{GeraSolucaoInicial}(\cdot)$ ;
2  $s \leftarrow \text{BuscaLocal}(s_0)$ ;
3 enquanto (os critérios de parada não estiverem satisfeitos) faça
4  $s' \leftarrow \text{Perturbacao}(\text{historico}, s)$ ;
5  $s'' \leftarrow \text{BuscaLocal}(s')$ ;
6  $s \leftarrow \text{CriterioAceitacao}(s, s'', \text{historico})$ ;
7 fim-enquanto;
fim ILS

```

Figura 2: Pseudocódigo da metaheurística *Iterated Local Search* [4].

O desempenho do **ILS** em relação à qualidade da solução final e velocidade de

convergência depende fortemente do método de busca local utilizado. O critério de aceitação decide qual solução continuará a ser explorada e qual perturbação será aplicada.

#### 2.4. SIMULATED ANNEALING

O procedimento *Simulated Annealing* (SA) é uma técnica de busca local probabilística, proposta por [8], baseada na termodinâmica, ao simular o resfriamento de um conjunto de átomos aquecidos. Partindo de uma solução inicial qualquer, o procedimento gera aleatoriamente, em cada iteração, um único vizinho  $s'$  da solução corrente  $s$ .

Considere  $\Delta$  a variação de valor da função de avaliação ao se mover para uma solução vizinha candidata, ou seja,  $\Delta = f(s') - f(s)$ . O método aceita o movimento e a solução vizinha passa a ser a nova solução corrente se  $\Delta \leq 0$ , caso contrário ( $\Delta \geq 0$ ), a solução vizinha candidata poderá ser aceita, mas, neste caso, assumindo uma probabilidade  $e^{-\Delta/T}$ , na qual  $T$  representa um parâmetro do método, denominado de temperatura.

A temperatura  $T$  assume inicialmente um valor  $T_0$ , que, após um número fixo de iterações (até o sistema atingir o equilíbrio térmico em uma dada temperatura), é gradativamente diminuída por uma razão de resfriamento  $\beta$ , tal que  $T_k \leftarrow \beta \times T_{k-1}$ , com  $\beta \in (0,1)$ . O pseudocódigo do método é descrito na Figura 3.

```

1   $s^* \leftarrow s$ ;
2   $IterT \leftarrow 0$ ;
3   $T \leftarrow T_0$ 
4  enquanto ( $T > 0$ ) faça
5      enquanto ( $IterT < SA \text{ max}$ ) faça
6           $IterT \leftarrow IterT + 1$ ;
7          Gere um vizinho qualquer  $s' \in N(s)$ ;
8           $\Delta = f(s') - f(s)$ ;
9          se ( $\Delta < 0$ )
10             então
11                  $s \leftarrow s'$ ;
12                 se ( $f(s') \leftarrow f(s^*)$ ) então  $s^* \leftarrow s'$ ;
13             senão
14                 Tome  $x \in [0,1]$ ;
15                 se ( $x < e^{-\Delta/T}$ ) então  $s \leftarrow s'$ ;
16         fim-se;
17     fim-enquanto;
18      $T \leftarrow \beta \times T$ ;
19      $IterT \leftarrow 0$ ;
20 fim-enquanto;
21  $s \leftarrow s^*$ ;
22 Retorne  $s$ ;

```

Figura 3 – Algoritmo *Simulated Annealing* [14]

### 3. MODELAGEM MATEMATICA

Nesta seção será apresentada a modelagem matemática para a formulação do problema de fluxo multiproduto inteiro (PFMI) abordado. Serão exibidas as estruturas matemáticas presentes no modelo, bem como o significado de cada uma delas, sendo

posteriormente utilizadas para a modelagem computacional, que, em conjunto às técnicas heurísticas de busca local apresentadas, constituem uma ferramenta para a resolução do problema em questão.

Seja  $R = \{N, A, F\}$  uma rede representada por um grafo  $G = \{N, A\}$  pela qual passa um fluxo  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_{|A|}\}$  por suas  $|A|$  arestas e seja  $P$  um conjunto de produtos inseridos em  $R$ . Alguns elementos do conjunto  $N$  são denominados de nó fonte e nó sumidouro, representando, respectivamente, pontos de oferta e de demanda para os produtos envolvidos na rede. O processo de distribuição dos produtos não é realizado obrigatoriamente de um ponto de oferta a um ponto de demanda. Isso faz com que os demais elementos de  $N$  sejam também utilizados. Existe um custo associado a cada produto em cada aresta, além de se ter uma limitação quanto à capacidade das mesmas. O PFM é caracterizado quando vários produtos compartilham os arcos de  $R$  e competem por suas capacidades, sendo o objetivo determinar  $F$ , de maneira que o custo seja o menor possível.

Na Figura 4, é exibida uma rede de fluxo multiproduto, onde 3 tipos de produtos ( $P_A, P_B, P_C$ ), utilizando 6 unidades de cada tipo, devem ser distribuídos pela rede, saindo de seus respectivos nós-origens e chegando em seus nós-destinos. Cada aresta apresenta uma certa capacidade, limitando o fluxo dos produtos que transitam por ela, além de um custo associado, neste caso independente do produto.

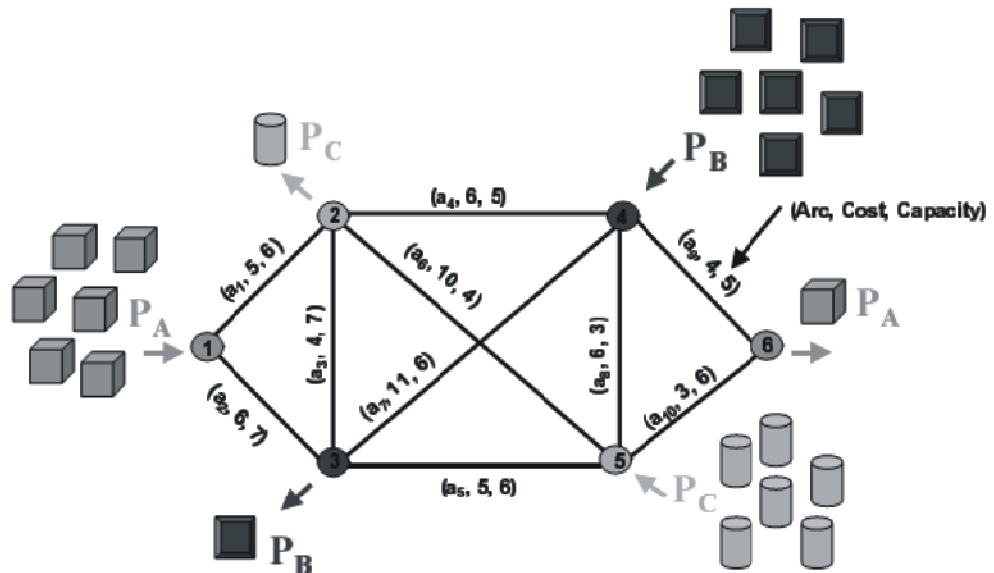


Figura 4: Exemplo de rede de fluxo multiproduto [11]

O modelo de programação linear objetivando um custo mínimo do problema abordado é apresentado pelas expressões de (1) a (4) abaixo:

$$\min \sum_{k \in P} \sum_{ij \in A} c_{ij}^k x_{ij}^k \quad (1)$$

$$\text{suj. a } \sum_{k \in P} x_{ij}^k \leq u_{ij}, \forall ij \in A, \quad (2)$$

$$Bx^k = b^k, \forall k \in P, \quad (3)$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \forall ij \in A, \forall k \in P. \quad (4)$$

sendo:

$$c_{ij}^k = \text{custo do produto } k \text{ no arco } (i, j);$$

$$x_{ij}^k = \text{fluxo do produto } k \text{ no arco } (i, j);$$

- $u_{ij}$  = capacidade do arco  $(i, j)$  ;  
 $B$  = matriz de incidência nó-arco;  
 $b^k$  = vetor de oferta/demanda do produto  $k$  ;

A expressão (1) representa a função objetivo a ser minimizada. Pode-se considerar o custo associado a cada produto em cada arco, pela matriz  $C \in \mathbb{R}^{|P| \times |A|}$ .

$$C = \begin{bmatrix} c_1^1 & L & c_1^{|A|} \\ M & O & M \\ c_{|P|}^1 & L & c_{|P|}^{|A|} \end{bmatrix} \quad (5)$$

na qual cada  $c_j^i$  representa o custo do produto  $j$  quando este passa pelo arco  $i$ . A variável de interesse  $x$  pode ser representada pela seguinte matriz  $X \in \mathbb{R}^{|A| \times |P|}$ .

$$X = \begin{bmatrix} x_1^1 & L & x_1^{|P|} \\ M & O & M \\ x_{|A|}^1 & L & x_{|A|}^{|P|} \end{bmatrix} \quad (6)$$

na qual cada  $x_j^i$  representa o fluxo do produto  $i$  no arco  $j$ . Com estas representações, a função objetivo (1) é subentendida como sendo o Traço do produto  $CX$ .

Há três importantes restrições neste problema, no que se refere à capacidade dos arcos da rede, à conservação do fluxo envolvendo os produtos e à natureza das variáveis representando o fluxo a ser determinado. A restrição (2) é denominada restrição de aglutinação ou simplesmente de capacidade, pois garante que o fluxo dos produtos que trafegam pelos arcos da rede não ultrapasse a capacidade dos mesmos. Essa limitação costuma ser representada por um número real ou por um intervalo. Neste caso, é necessário que o fluxo seja maior que um limite mínimo e menor que um limite máximo. Em situações que não existam essa limitação, é dito que o arco possui capacidade infinita.

Afim de tornar mais claro o modelamento matemático do problema, bem como prepará-lo adequadamente para a modelagem computacional inerente às técnicas heurísticas utilizadas, foram adicionadas matrizes identidades de ordem  $|A| \times |A|$  para realizar a imposição da restrição de capacidade. Desta forma, a matriz das variáveis de interesse, somente para esta adaptação, foi transformada em um vetor composto por  $|P|$  vetores de ordem  $|A| \times 1$ , cada um destes referindo-se a um produto. A restrição de capacidade adaptada pode ser entendida como:

$$\begin{bmatrix} I_{|A| \times |A|} & L & I_{|A| \times |A|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{|A| \times 1}^1 \\ M \\ X_{|A| \times 1}^{|P|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ M \\ u_{|A|} \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde,  $X_{|A| \times 1}^j$  representa o vetor de fluxo do produto  $j$  pelos arcos da rede, e  $u_i \in \mathbb{R}$  representa a capacidade do arco  $i$ .

A restrição (3) diz respeito à conservação de fluxo. A matriz  $B$  é responsável pela regra de comunicação entres os pontos da rede, lhe conferindo a gerência sobre o tráfego dos produtos. Essa matriz é construída utilizando-se a relação nó-arco, ou seja, cada linha da matriz representa um nó e cada coluna um arco. Os elementos da matriz pertencem ao conjunto  $\{-1, 0, 1\}$ ; logo se  $(i, j) = 1$ , então a atribuição de  $i$  pertence à atribuição de  $j$ , assumindo um papel de fonte, caso  $(i, j) = -1$ , então a atribuição de  $i$  pertence à atribuição

de  $j$  assumindo um papel de sumidouro; e se  $(i, j) = 0$ , então a atribuição de  $i$  não pertence à atribuição de  $j$ .

O vetor  $b$  indica o fluxo gerado nos nós, ou seja, identifica o nó como ponto de oferta, demanda ou transbordo.

$$b_i = \begin{cases} b_i > 0, & \text{se o nó } i \text{ é um nó de fornecimento;} \\ b_i < 0, & \text{se o nó } i \text{ é um nó de demanda;} \\ b_i = 0, & \text{se o nó } i \text{ é um nó de transbordo;} \end{cases} \quad (8)$$

A informação de oferta/demanda do problema pode ser representada pela seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} b_1^1 & L & b_1^{|P|} \\ M & O & M \\ b_{|N|}^1 & L & b_{|N|}^{|P|} \end{bmatrix} \quad (9)$$

onde, para cada produto  $j$ ,  $b_i^j$  tem o significado de (8).

Por fim, a restrição (4), a qual impõe às variáveis de interesse, a natureza de integralidade e positividade, ou seja, os produtos envolvidos devem ser distribuídos sem fracionamentos e o fluxo mínimo é representado pelo fluxo nulo. De forma geral, a nova modelagem matemática pode ser descrita pela expressão (10).

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Tr } CX \\ \text{sa} \quad & BX = b \\ & I.X \leq u \\ & X \geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

#### 4. MODELAGEM COMPUTACIONAL

Nesta seção, serão apresentadas as estruturas de dados utilizadas para o modelamento computacional, referentes às implementações das heurísticas de busca local *iterated local search* e *simulated annealing* propostas para a resolução do problema de fluxo multiproduto inteiro.

Uma solução  $s$  para o PFMI, representado por uma rede com  $|N|$  nós,  $|A|$  arcos e  $|P|$  produtos, consiste em uma lista de vetores de fluxo, sendo que o valor contido na posição  $k$ , supondo  $k \neq \alpha|P|, \alpha \in \mathbb{Y}$ , representa a quantidade do produto  $k \bmod |P|$  no arco  $(k \div |P|) + 1$ ; caso  $k$  seja múltiplo da quantidade de produtos, então, o valor contido nessa posição representa a quantidade do produto  $|P|$  no arco  $(k \div |P|)$ . A Figura 5 ilustra a estrutura de uma solução  $s$ .



Figura 5: – Estruturação de uma solução

O vetor de custo segue a mesma configuração das variáveis de fluxo a serem determinadas, porém, cada posição de um vetor da lista de vetores, representa o custo do produto associado ao arco, sendo estes valores, pré-determinados pelas instâncias utilizadas. A determinação da função objetivo fica facilitada por este modelamento de estruturas, já que ela pode ser obtida pelo somatório do produto das variáveis de mesma posição entre o vetor



de custo e vetor de fluxo. Um pseudocódigo de determinação da função objetivo  $f_o$  é exibido na Figura 6, considerando  $k = (j-1)|P| + i$ :

$$\begin{array}{l}
 f_o = 0 \\
 \text{para } i = 1 \text{ até } |P| \\
 \quad \text{para } j = 1 \text{ até } |A| \\
 \quad \quad f_o = f_o + c[k]x[k]
 \end{array}$$

Figura 6: Pseudocódigo para função de avaliação

onde,  $c[k]$  e  $x[k]$  representam respectivamente o vetor de custo e o vetor de fluxo na posição  $k$ .

As demais estruturas são representadas como listas de vetores. Essa nova estrutura linear do problema permite maior flexibilidade a procedimentos inerentes às heurísticas, como a determinação de novas soluções por movimentos aleatórios de trocas, como os descritos em [15] que fazem uso de um espaço solução gerado por uma das restrições do problema, e utilizada para os teste realizados neste trabalho. Esta mesma modelagem matemática-computacional foi utilizada para a implementação de um algoritmo iterativo polinomial [13], com a funcionalidade de pré-condicionamento para um PFMI, obtendo bons resultados dependendo da rede utilizada.

## 5. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

A fim de testar a modelagem proposta neste trabalho, juntamente aos procedimentos heurísticos de busca local descritos anteriormente, foram utilizadas instâncias [1] constituídas de redes de 32 nós, tendo a quantidade de arcos variando entre 96 e 320 e a quantidade de produtos especificadas em 48, 192 e 320, respectivamente. Para cada produto, há um custo associado, dependente do arco pelo qual ele trafega.

O algoritmo híbrido **SA-ILS** [14] e o algoritmo **ILS** [15], adaptados ao espaço de restrição de capacidade, foram desenvolvidos em linguagem C, usando o compilador Borland C++ Builder 5.0 e testado em um microcomputador com processador Pentium IV, 2.4 GHz, com 256 MB de memória RAM, sob sistema operacional Windows XP. Na Tabela 2 são apresentados os resultados computacionais, obtidos pelos dois algoritmos aplicados em instâncias que variam de acordo com a quantidade de arcos e produtos.

Instâncias	ILS	SA-ILS	t_ILS	t_SA-ILS	PD	PDt
	f	f				
96-48	3279462	3265437	26.05	36.86	0.43	29.31
320-48	10517523	10017484	34.75	64.8	4.75	46.37
320-192	13029738	12509966	94.22	138.76	3.98	32.09
96-192	5625599	4441846	21.7	32.07	21.04	32.33
320-320	19144988	13504288	100.17	126.91	29.46	21.07
<b>Média</b>					11.93	32.23

Tabela 2: Resultados computacionais [12]

A coluna “**f**” representa o valor ótimo da função de avaliação utilizada. A coluna “**PD**” representa a diferença em porcentagem sobre os métodos em relação à função de avaliação; as colunas “**t\_ILS**” e “**t\_SA-ILS**”, representam o tempo em segundos, despendido em processamento computacional pelos algoritmos **ILS** e **SA-ILS**, respectivamente; por fim, a coluna “**PDt**” indica a diferença em porcentagem dos tempos computacionais obtidos pelos algoritmos.

Uma análise mais detalhada dos resultados computacionais presentes na Tabela 2

pode ser encontrada em [14]. Apesar destes resultados não serem o foco desta proposta, eles representam um avanço na análise do comportamento de heurísticas de busca local aplicadas a problemas de fluxo multiproduto inteiro. A hibridação heurística junto à restrição do espaço de busca utilizado perante a restrição de capacidade constituem uma boa metodologia para a resolução do problema, comparada à procedimentos heurísticos clássicos, ou seja, sem hibridação e sem restrição do espaço de busca.

## 6. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta um modelamento matemático e computacional para uma abordagem através de procedimentos heurísticos que fazem uso de busca local, aplicado a problemas de fluxo multiproduto inteiro. A motivação para a modelagem desta classe de problemas se encontra nas inúmeras aplicações de forte impacto econômico e na grande dificuldade de resolvê-los, em virtude de sua alta complexidade combinatorial. O tratamento linear obtido pelo modelamento computacional facilita a busca de novas soluções em regiões de vizinhança pré-determinadas, já que a busca é feita localmente, tornando simples a manipulação das variáveis durante o processamento. A formulação matemática do problema se torna mais coesa e melhor preparada para uma implementação computacional, com o detalhamento das estruturas presentes provindas de suas restrições e objetivação. Os resultados computacionais obtidos de publicações em eventos de alta relevância para a pesquisa operacional e métodos numéricos, nacionalmente e internacionalmente, consolidam a validação do modelamento apresentado neste trabalho. Como trabalho futuro, espera-se adaptar o modelamento matemático-computacional descrito nesta proposta, aplicado ao problema de fluxo multiproduto inteiro, segundo uma abordagem a heurísticas bio-inspiradas, ou seja, que fazem uso de uma busca populacional e não local.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALVELOS, F. P. *Branch-and-Price and Multicommodity Flows*. **Tese de Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas**, Área de Investigação Operacional, Universidade do Minho, Portugal, 2005.
- [2] BURIOL, L. S. *Roteamento do Trafego na Internet: Algoritmos para Projeto e Operação de Redes com Protocolo OSPF*. **Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica – FEEC/UNICAMP**, 2003.
- [3] CLARK, S.; SURKIS, J. *An Operations Research Approach to Racial Desegregation of School Systems*. **Socio-Econo. Plan. Sci.**, 1968.
- [4] COELHO, A. M. *Uma Abordagem via Algoritmos Memeticos para a Solução do Problema de Horário Escolar*. **Dissertação de Mestrado, Modelagem Matemática e Computacional**, CEFET-MG, Belo Horizonte, 2006.
- [5] DRUMOND, F. P. *Sistema de Apoio à Decisão para Planejamento da Produção de um Sistema Portuário*. **Dissertação de Mestrado em Ciência da Computação**, UFMG, 1998.
- [6] FORD, L. R.; FULKERSON, D. R. *Flows in Network*. **Princeton University Press**, 1962.
- [7] HU, T. C. *Multicommodity Network Flows*. **Operations Research**, v.11, p. 344–360, 1963.
- [8] KIRKPATRICK, S.; GELLAT, J. C. D.; VECCHI, M. P. *Optimization by Simulated Annealing*, **Science**, vol. 220, pp. 671-680, 1983.

- [9] LOURENCO, H. R.; MARTIN, O.; STUETZLE, T. *Iterated Local Search*. In: F. Glover and G. Kochenberger, editors, **Handbook of Metaheuristics**, pp. 321-353, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 2002.
- [10] MILIDIU et al. *Um Algoritmo GRASP para o Problema de Transporte de Derivados de Petróleo em Oleodutos*. In Anais do **XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, pp. 237-246, 2001.
- [11] **Revista Científica Periodica de Telecomunicacoes** – ISSN 1516-2328, pp. 54, 2004.
- [12] SCHULTZ, G. L.; MEYER, R. R. *An Interior Point Method for Block Angular Optimization*. **SIAM Journal on Optimization**, vol. 42, n 4, nov 1991.
- [13] SILVA, C. A.; SOUZA, S. R. *Pré-Otimização via Resolução de Sistemas Lineares Homogêneos Iterados para Problemas de Fluxo Multiproduto Inteiro*. **XXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, Porto/Portugal, 2007.
- [14] SILVA, C. A.; SOUZA, S. R. *Uma Aplicação da Metaheurística Híbrida Simulated Annealing – Iterated Local Search ao Problema de Fluxo Multiproduto sob o Espaço Capacitado*. **XXX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, Florianópolis, 2007.
- [15] SILVA, C. A.; SOUZA, S. R. *Uma Aplicação da Metaheurística Iterated Local Search ao Problema de Fluxo Multiproduto Inteiro sob o Espaço de Restrição de Capacidade*. **XXXIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, Fortaleza, 2007.