UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA MULTIOBJETIVO PARA O PROBLEMA DE SEQUENCIAMENTO E ALOCAÇÃO DE TRABALHADORES

Guido Pantuza Júnior

Instituto Federal de Minas Gerais - IFMG

guido.junior@ifmg.edu.br

Resumo

O presente trabalho apresenta um novo modelo de programação matemática dc /multiobjetivo para o problema de sequenciamento e alocação de trabalhadores (SPWA). Neste problema, objetiva-se minimizar o número de trabalhadores e o tempo total gasto para executar todas as tarefas (*makespan*). Para atender esses objetivos utilizou-se uma abordagem multiobjetivo, adotando o método clássico de resolução épsilon-restrito. Este método gera um conjunto de soluções eficientes, cabendo ao gestor escolher qual a solução deve ser adotada. Portanto, este trabalho propõe um novo método para resolução do problema proposto demostrando que é possível utilizar um número reduzido de funcionários e terminar todas as tarefas em tempo hábil, utilizando assim, os recursos de uma empresa de forma otimizada.

Palavras-Chaves: Otimização Multiobjetivo, Épsilon-Restrito, SPWA.

Abstract

This paper presents a new multiobjective mathematical programming model for the scheduling problem with worker allocation problem (SPWA). In this problem, the objective is to minimize the number of workers and the total time taken to perform all tasks (makespan). To meet these goals we used a multiobjective approach, adopting the classical method of solving epsilon-restricted. This method generates a set of efficient solutions, leaving the manager to choose which solution should be adopted. Therefore, this paper proposes a new method to solve the proposed problem showing that you can use a small number of employees and end all tasks in a timely manner, thereby, using the resources of a firm optimally.

Keywords: Multiobjective Optimization, Epsilon-Restricted, SPWA.

1. INTRODUÇÃO

O mercado mundial está cada vez mais competitivo e exigente. Além disso, as crises mundiais e a ameaça de uma recessão na Europa ameaçam a saúde financeira das empresas. Diante desse cenário, as empresas necessitam reduzir o seu custo produtivo. Uma forma de reduzir este custo é através do uso otimizado dos fatores de produção.

Entre os diversos fatores de produção, um dos que possuem maior impacto nos custos produtivos é a mão-de-obra. Isto se deve ao fato dos recentes aumentos dos salários acima da inflação, adicionados aos encargos sociais e benefícios. Logo, as empresas procuram a redução do número de funcionários sem afetar os prazos de entrega.

Esse problema enfrentado pelas empresas é conhecido como o problema de sequenciamento com alocação de trabalhadores (*scheduling problem with worker allocation* – SPWA). O problema consiste em alocar as tarefas aos trabalhadores de uma empresa, minimizando o instante de término da última tarefa executada e o número de funcionários utilizados.

Esse problema é composto por dois objetivos conflitantes, ou seja, não existe uma solução única que otimize todas elas ao mesmo tempo. Assim, adotamos o método de otimização multiobjetivo.

Esse método consiste na busca de um conjunto de soluções eficientes, o que torna o sistema mais flexível, uma vez que ele apresenta diversas soluções diferentes. Tal fato permite que o gestor escolha a solução que for mais conveniente.

Entre as diversas abordagens para a resolução de um problema multiobjetivo, este trabalho foca em um modelo de programação matemática utilizando o método ε-restrito.

O presente trabalho está organizado como segue. Na seção 2, descreve-se o problema em estudo. Na seção 3 o referencial teórico. Na seção 4, apresenta-se o modelo de programação linear utilizado. A apresentação das instâncias testes e dos resultados são feitas na seção 5. A conclusão é apresentada na seção 6.

2. O PROBLEMA DE SEQUENCIAMENTO COM ALOCAÇÃO DE TRABALHADORES

O problema de sequenciamento com alocação de trabalhadores também é conhecido como *scheduling problem with worker allocation* (SPWA).

O problema é composto por um conjunto de trabalhadores, *Worker*, e um conjunto de tarefas, *Job*. Ele consiste em alocar as tarefas aos trabalhadores e propor uma sequencia de execução, respeitando as restrições de qualificação. Ou seja, um trabalhador só pode executar uma tarefa se ele for qualificado. Além disso, cada trabalhador, para executar uma mesma tarefa, necessita de tempos diferentes de acordo com suas habilidades.

O objetivo do SPWA é minimizar o instante de término da última tarefa executada e minimizar o número total de funcionários utilizados.

Neste trabalho consideramos as seguintes restrições: Todas as tarefas devem ser executadas. Não consideramos o tempo de deslocamento dos funcionários ou o tempo de espera em fila. O horizonte de planejamento da alocação dos trabalhadores é fixo. Cada tarefa é executada por apenas um único funcionário. O excesso de trabalho para os trabalhadores não é considerado, ou seja, não consideramos que os trabalhadores ficarão sobrecarregados com excesso de trabalho. Todas as tarefas tem o mesmo nível de esforço. Todos os funcionários possuem o mesmo custo (salário). Cada colaborador possui uma habilidade diferente, ou seja, cada um executa a mesma tarefa com um tempo diferente.

Na literatura encontramos alguns trabalhos que abordam este problema. Iima e Sannomiya (2001), propuseram uma heurística para resolução do SPWA fundamentada no Algoritmo Genético chamada *Module Type Genetic Algorithm* (MTGA).

Iima e Sannomiya (2002), também utilizaram o MTGA, porém consideraram que cada trabalhador possui o mesmo nível de qualificação para executas as diferentes tarefas.

Osawa e Ida (2005), também utilizaram Algoritmo Genético, porém propuseram um novo método de seleção da população sobrevivente.

Todos os trabalhos citados anteriormente adotaram abordagens mono-objetivas. Não é de conhecimento do autor deste trabalho uma abordagem multiobjetivo para o SPWA.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

O SPWA é composto por dois objetivos conflitantes (minimizar o número de funcionários e o instante de término da última tarefa executada). Assim, não existe uma solução única que otimize todas elas ao mesmo tempo. Por exemplo, com um número reduzido de funcionários não é possível executar todas as tarefas em tempo hábil.

Segundo Arroyo (2002), problemas dessa natureza são chamados de problemas de otimização multiobjetivo. Esses problemas envolvem minimização (ou maximização) simultânea de um conjunto de objetivos satisfazendo a um conjunto de restrições. Deve-se, assim, buscar um conjunto de soluções eficientes. Neste caso, a tomada de decisão será de responsabilidade do gestor, que poderá escolher a solução que melhor se adapta às necessidades de produção dentre as soluções eficientes.

O conjunto de soluções eficientes também é conhecido como soluções Pareto-ótimas. Segundo Pareto (1896), o conceito de Pareto-ótimo constitui a origem da busca na otimização multiobjetivo.

Por definição, um conjunto de soluções S é Pareto-ótimo se não existe um outro conjunto de soluções viáveis S^* que possa melhorar algum objetivo, sem causar uma piora em pelo menos um outro objetivo. Em outras palavras, uma solução s pertence ao conjunto de soluções Pareto-ótimo S se não existe solução s^* que domine s.

Considerando um problema de minimização, temos:

- s domina s^* se, e somente se, $s \leq s^*$ para todos os objetivos;
- s e s^* são indiferentes ou possuem o mesmo grau de dominância se, e somente se, s não domina s^* e s^* não domina s.

Para a resolução de problemas multiobjetivos, diversos métodos exatos podem ser utilizados, tais como:

- Método da soma ponderada.
- Método de programação por metas.
- Método ε-restrito.

O método da soma ponderada consiste na transformação do problema multiobjetivo em um problema mono-objetivo através da atribuição de pesos para cada objetivo. Para se alcançar as soluções Pareto-ótimas, este problema deve ser resolvido iterativamente.

Neste caso, devem-se considerar diferentes pesos de acordo com a importância dos objetivos. Sendo, geralmente, a soma dos pesos igual a 1. Segundo Arroyo (2002), a principal desvantagem deste método é que ele não consegue gerar todas as soluções Pareto-ótimas quando o espaço objetivo é não convexo.

O método de programação por metas, semelhante ao método da soma ponderada, também consiste na transformação do problema multiobjetivo em um problema mono-objetivo. Isto se dá através da atribuição de pesos para cada objetivo.

Para esse o método, considera-se que cada meta possui uma importância diferente na otimização representada através de pesos. Quanto maior a importância da meta, maior será o seu peso.

O método exato ε-restrito, utilizado neste trabalho, consiste na otimização do objetivo mais importante sujeitando-se às restrições dos outros objetivos.

Considerando, em um problema de minimização, f_1 como sendo o objetivo mais importante, temos:

$$\text{minimizar} \qquad f_1(x) \tag{1}$$

$$\text{Sujeito a:} \qquad f_i(x) \leq \varepsilon_i \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, q \tag{2}$$

na qual, ε_i é o limite superior do objetivo f_1 e q o número de objetivos.

Para construir o conjunto Pareto-ótimo, mesmo quando o espaço objetivo é não convexo, deve-se apenas variar o limite superior ε_i. Porém, se este limite não é adequado, o subconjunto de possíveis soluções obtido pode ser vazio, ou seja, não existe solução viável.

4. MODELO DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Para a resolução do SPWA utilizando o método ε-restrito adotamos como objetivo principal o instante de término da última tarefa executada. O número de funcionários é tido como objetivo secundário, por isso, a cada execução do modelo matemático proposto, o número máximo de funcionários que pode ser utilizado (ε) é reduzido. Para este modelo, consideramos os seguintes parâmetros de entrada:

Job : Conjunto de tarefas.

$Worker$: Conjunto de trabalhadores.

T_{ij} : Tempo necessário para o funcionário j executar a tarefa i.

ε : Número máximo de trabalhadores.

Sejam as seguintes variáveis de decisão:

σ : Instante de término da última tarefa executada.

$$x_{ij} : \begin{cases} 1 \text{ se o funcionário } i \text{ executa a tarefa } j. \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_i : \begin{cases} 1 \text{ se o funcionário } i \text{ é utilizado.} \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

O modelo de programação matemática proposto relativo ao SPWA é apresentado pelas equações (3) a (10):

Função Objetivo

A Eq. (3) visa minimizar o instante de término da última tarefa.

$$\min f = \sigma \tag{3}$$

Restrições

A Eq. (4) garante que toda tarefa *j* será executada apenas uma vez por um único trabalhador *i*.

$$\sum_{i \in \text{Worker}} x_{ij} = 1 \qquad \forall\, j \in Job \tag{4}$$

A Eq. (5) estipula o número máximo de trabalhadores *i* que podem ser utilizados. O valor de **ε** é reduzido a cada iteração do modelo proposto.

$$\sum_{i \in \text{Worker}} y_i \leq \varepsilon \tag{5}$$

A Eq. (6) determina o instante de término da última tarefa *j* executada pelo operador *i*.

$$\sum_{j \in \text{Job}} T_{ij} x_{ij} \leq \sigma \qquad \forall i \in Worker \tag{6}$$

A Eq. (7) define se o trabalhador *i* está executando alguma tarefa *j*.

$$\frac{\sum_{j \in Job} x_{ij}}{|\text{Job}|} \leq y_i \qquad \forall i \in Worker \tag{7}$$

As Eq. (8) a (10) asseguram o domínio das variáveis de decisão.

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in Worker \text{ e } \forall j \in Job \tag{8}$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in Worker \tag{9}$$

$$\sigma \in \mathbb{R} \tag{10}$$

5. RESULTADOS

Para testar os modelos propostos foram utilizadas 4 instâncias-teste. Elas podem ser encontradas em http://www.4shared.com/zip/m7xmUfpi/Instance_-_SPWA.html. Elas diferem entre si pelo número de trabalhadores e de tarefas. A tabela 1 apresenta algumas características das instâncias. As colunas ***#Worker*** e ***#Job*** mostram, respectivamente, o número de trabalhadores e o número de tarefas que precisam ser executadas.

Tabela 1: Características das instâncias-teste

	#Worker	***#Job***
Instância 1	5	10
Instância 2	10	50
Instância 3	15	100
Instância 4	25	100

O modelo de programação matemática desenvolvido na Seção 4 foi implementado no aplicativo de otimização LINGO 10.0, interfaceando com planilhas do EXCEL 2010. Os testes foram realizados em um microcomputador com processador Intel *Core* 2 *Duo* 2.0 GHz com 4 GB de RAM.

O conjunto de soluções *S*, Pareto-ótimas, encontrado, utilizando o método ε-restrito, para a Instância 1, é apresentado na tabela 2. A coluna ***Epsolon*** apresenta o valor adotado para ε, que representa o número máximo de funcionários. A coluna #Worker apresenta o número de funcionários utilizados. A coluna Tempo Máx apresenta, em minutos, o instante de término da última tarefa. A coluna Tempo de Exec. Apresenta, em segundos, o tempo necessário para encontrar a solução.

Tabela 2: Resultados do Método Exato para a Instância 1.

	Solução	***Epsolon - ε***	***#Worker***	***Tempo Máx (min)***	***Tempo de Exec. (seg)***
Instância 1	1	0	5	8	1
	2	1	4	10	1
	3	2	3	13	1
	4	3	2	20	1
	5	4	1	43	1

De acordo com a tabela 2, para a **Instância 1**, temos 5 soluções diferentes. Na solução 1, adotamos o valor **ε** = 0. Utilizaremos 5 trabalhadores que executarão todas as tarefas em 8 minutos. Para a solução 5, adotamos o valor **ε** = 4. Utilizaremos 1 trabalhador que executará todas as tarefas em 43 minutos. Cada solução foi obtida com 1 segundo de execução, sendo necessários 5 segundos para encontrar o conjunto de soluções *S*.

A tabela 3 apresenta o conjunto de soluções Pareto-ótimas, utilizando o método ε-restrito, para a **Instância 2**. Nesta instância adotamos 10 soluções diferentes. O valor de ε varia de 0 a 9 (número máximo de funcionários disponíveis). Para encontrar todas as 10 soluções foram gastos 147 segundos (soma do tempo de execução, coluna ***Tempo de Exec.,*** para cada solução).

Tabela 3: Resultados Método Exato para a Instância 2.

Instância 2	***Solução***	***Epsolon - ε***	***#Worker***	***Tempo Máx (min)***	***Tempo de Exec. (seg)***
	1	0	10	20	2
	2	1	9	22	12
	3	2	8	25	5
	4	3	7	28	16
	5	4	6	33	17

	6	5	5	39	43
	7	6	4	49	23
	8	7	3	65	14
	9	8	2	98	15
	10	9	1	215	2

A tabela 4 apresenta os resultados do modelo exato para a **Instância 3**. O conjunto de soluções Pareto-ótimas é formado por 7 soluções diferentes. O valor de ε varia de 0 a 14, sendo reduzido em duas unidades para cada solução. Para encontrar todas as 7 soluções foram gastos 1972 segundos.

Tabela 4: Resultados Método Exato para a Instância 3.

Instância 3	***Solução***	***Epsolon - ε***	***#Worker***	***Tempo Máx (min)***	***Tempo de exec. (seg)***
	1	0	15	27	16
	2	2	13	31	75
	3	5	10	39	231
	4	7	8	49	639
	5	9	6	65	772
	6	12	3	130	230
	7	14	1	430	9

Os resultados do modelo exato, utilizando o método ε-restrito, para a **Instância 4** é apresentado na tabela 5. Nesta instância adotamos 10 soluções diferentes. O valor de ε varia de 0 a 24, sendo reduzido em três unidades para cada solução. O tempo de execução para a solução 1 foi de 41 segundos, e para a solução 2 foi de 24 segundos. Para encontrar as demais soluções, adotou-se o tempo máximo de 900 segundos.

Tabela 5: Resultados Método Exato para a Instância 4.

Instância 4	***Solução***	***Epsolon- ε***	***#Worker***	***Tempo Máx (min)***	***Tempo de exec. (seg)***
	1	0	25	16	41
	2	3	22	18	900
	3	6	19	22	900
	4	9	16	25	900

	5	12	13	31	900
	6	15	10	40	900
	8	18	7	57	900
	9	21	4	100	900
	10	24	1	433	24

Note que para a **Instância 4**, ao contrário das demais instâncias (**1, 2 e 3**), não encontrou-se um conjunto de soluções Pareto-ótimas. Isto se deve ao fato do problema SPWA ser NP-difícil (TAN *et* a*l.,* 2009). Ou seja, para problemas com dimensões maiores, não é possível encontrar a solução ótima global em tempo computacional hábil.

6. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um modelo de programação matemático para a resolução do problema de sequenciamento com alocação de trabalhadores *(scheduling problem with worker allocation* – SPWA).

O modelo proposto foi baseado em um método clássico de resolução de problemas multiobjetivos. O método de resolução multiobjetivo ε-restrito baseia-se na otimização do objetivo mais importante sujeitando-se às restrições dos outros objetivos.

Como, a cada resolução obtém-se um conjunto de soluções eficientes, as quais ou priorizam alguma meta ou, então, estão equilibradas entre os diversos valores dos objetivos, o gestor, responsável pela tomada de decisão, torna-se responsável pela escolha de qual alternativa mais se adapta à realidade operacional da empresa naquele instante. A aplicação de métodos de otimização multiobjetivo na resolução do SPWA em pauta é, de conhecimento do autor, inédita.

Os resultados mostram que é possível otimizar o número de funcionários e o tempo máximo de execução das tarefas. Ao apresentar várias soluções atendendo a diferentes objetivos, disponibilizam-se ao gestor, alternativas para sua tomada de decisão. Dessa forma, é possível escolher a solução que melhor se adapta á realidade operacional da empresa.

7. AGRADECIMENTOS

O autor agradece à FAPEMIG e ao IFMG pelo apoio financeiro, imprescindível para a realização deste projeto de pesquisa.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **ARROYO, J. E. C**. *Heurísticas e metaheurísticas para otimização combinatória multiobjetivo*. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Unicamp, Campinas, SP, 2002.

[2] **IIMA, H. e SANNOMIYA, N.** Module Type Genetic Algorithm for Modified Scheduling Problems with Worker Allocation. *Anais do American Control Conference.* Arlington, VA, 2001.

[3] **IIMA, H. e SANNOMIYA, N.** Proposition of Module Type Genetic Algorithm and Its Application to Modified Scheduling Problems with Worker Allocation. *IEEE Japan*, v.122-C, p. 409-416, 2002.

[4] **OSAWA, A. e IDA, K.** Scheduling Problem with Worker Allocation using Genetic Algorithm. *Japan-Australia workshop on intelligent and evolutionary systems*, pp.1-8, 2005.

[5] **PARETO, V..** *Cours D'Economie Politique*, vol. 1, F. Rouge, 1896.

[6] **TAN, SICONG; WENG, WEI e FUJIMURA, SHIGERU**. Scheduling of Worker Allocation in the Manual Labor Environment with Genetic Algorithm. *Anais do International MultiConference of Engineers and Computer Scientists – IMECS.* Hong Kong, v. 1, 2009.