



SPOLM 2007

ISSN 2175-6295

Rio de Janeiro- Brasil, 08 e 09 novembro de 2007.

UM MODELO *ON-LINE* DO PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM COLETA REPARTIDA E JANELAS DE TEMPO PARA O PROCESSO DE COLETA EM ARMAZÉNS

Nari Louise TenKley

Universidade Federal de Minas Gerais
Avenida Presidente Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte
nari.tenkley@gmail.com

Bruno Takane

Universidade Federal de Minas Gerais
Avenida Presidente Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte
brtakane@gmail.com

Gilberto de Miranda Júnior

Universidade Federal de Minas Gerais
Avenida Presidente Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte
miranda@dep.ufmg.br

Luiz Ricardo Pinto

Universidade Federal de Minas Gerais
Avenida Presidente Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte
luiz@dep.ufmg.br

RESUMO

A coleta de produtos em armazéns é uma função essencial e valiosa para uma cadeia de suprimentos. Este artigo apresenta dois novos modelos para minimizar o número de veículos usado no processo de coleta, incluindo um modelo *on-line* que aproveita a informação atualizada, disponível em muitos armazéns hoje em dia. Os modelos representam novas aplicações e novas formulações para o problema de roteamento de veículos com coleta repartida e janelas de tempo, do inglês *vehicle routing problem with split pickup and time windows* (VRPSPTW).

Palavras chave: Roteamento de veículos em armazéns; Coleta *on-line* repartida; Janelas de tempo.

ABSTRACT

The picking of items in a warehouse is an essential and costly function for supply chains. This article presents two new models to minimize the number of vehicle needed in the picking process, including an *on-line* model which takes advantage of the up-to-date information commonly available in warehouses today. The models represent new applications and new formulations for the vehicle routing problem with split deliveries and time windows (VRPSDTW).

Keywords: Vehicle routing; Warehousing; Order picking; On-line; Split deliveries; Time windows.

1. Introdução

A operação de armazéns é uma atividade vital para qualquer cadeia de suprimentos. A competição que existe nos mercados e o investimento que os armazéns representam requerem que muita atenção e esforço sejam aplicados na melhoria dos armazéns (Gu et al., 2007). Dentro de um armazém, recolhe-se uma quantidade específica de um número de itens em locais conhecidos de acordo com os pedidos recebidos. Segundo Peterson & Aase (2004), a atividade de recolhimento de pedida conta normalmente com 50-75% do custo total de operação dentro de um armazém. Devido a este alto custo, o estudo de políticas de coleta e roteamento é de grande relevância na prática.

A situação aqui considerada é de um armazém com uma frota de veículos capacitada e homogênea. A política de coleta é de agrupamento dos pedidos. Com a política de agrupamento, cada pedido que chega pode ser dividido, ou seja, alguns itens de um pedido podem ser recolhidos junto com itens de outro pedido. Um veículo pode passar por qualquer ponto do armazém sem recolher um produto daquele ponto. É permitido também que um veículo recolha apenas uma fração da demanda total de um produto, se esta demanda for maior que a capacidade do veículo. Com esta política, não há restrição no tamanho de um pedido relacionado à capacidade do veículo. A coleta dos produtos deve ser completada dentro de um tempo previamente determinado, que é definido como o nível de serviço do armazém.

Dado isso, o problema a ser estudado é de dimensionamento de recursos (equipamento e / ou funcionários) dentro do armazém. Especificamente, o problema tem como objetivo determinar o número mínimo de recursos necessários para atender todos os pedidos dentro do tempo máximo de atendimento desejado (nível de serviço). Este objetivo é diferente dos problemas mais estudados na literatura que normalmente minimizam o custo (distância) das rotas. Com o alto custo de ativação de um veículo ou funcionário, deseja-se minimizar este custo, mantendo sempre um tempo de serviço satisfatório. A pergunta chave, então, é: Quantos veículos/funcionários eu preciso para garantir meu nível de serviço? A resposta conta com a determinação da seqüência em que os itens devem ser buscados, ou seja, o roteamento dos veículos necessários.

O problema pode ser chamado em inglês de *Vehicle Routing Problem with Split Pickup and Time Windows* (VRPSPJT). O modelo estático deste problema a ser apresentado foi desenvolvido para utilização no início de um dia ou turno, quando o sistema encontra-se no estado inicial. Depois será apresentado um modelo *on-line* que é um modelo para a reotimização do sistema uma vez que os veículos já estão em andamento. O modelo *on-line* permite que a rota pré-determinada para um veículo seja alterada quando chegar um pedido novo. O uso de um modelo *on-line* aproveita a tecnologia disponível hoje em dia para armazéns, o que permite que o sistema tenha conhecimento da localização dos veículos e dos produtos que já foram coletados. Os dois modelos estão em processo de implementação e ainda requerem mais pesquisa, mas eles também representam grandes avanços para literatura. As formulações estática e *on-line* do VRPSPJT, são modelos novos na literatura.

2. Revisão de Literatura

A redução de tempos ou distâncias de rotas é um problema importante para a eficiência de armazéns. As quatro maneiras mais comuns de reduzir este tempo são: (1) achar rotas de

coleta mais eficientes; (2) dividir o armazém em zonas onde uma rota recolha produtos dentro de somente uma zona; (3) determinar o melhor local para estocar os itens; e (4) agrupar os itens onde vários pedidos podem ser recolhidos simultaneamente (CHEN & WU, 2006).

A otimização das rotas de recolhimento é um dos problemas estudados na literatura para reduzir o custo de operação de armazéns. O problema de roteamento de empilhadeiras tem como objetivo achar a melhor rota (menor tempo) para o recolhimento de todos os itens de todos os pedidos, ou seja, busca-se descobrir o caminho mínimo (DE KOSTER & VAN DER POORT 1998; ROODBERGEN & DE KOSTER 2001).

O algoritmo apresentado por Ratliff e Rosenthal (1983) trata o problema de roteamento para um armazém convencional com fileiras estreitas. Com base nesse algoritmo, De Koster e van der Poort estudaram o caso de armazéns com vários depósitos localizados nas fileiras e compararam os resultados do seu algoritmo com os resultados de heurísticas. Daniels et. al. (1998) desenvolveram um modelo para resolver simultaneamente o problema de roteamento e o problema de designação de local de estocagem. Roodbergen e de Koster (1998) estudaram roteamento em armazéns com até três fileiras atravessadas e demonstraram os efeitos com simulação.

A política de coleta é um fator de grande influência na determinação dos caminhos mínimos na operação de recolhimento. Várias políticas de coleta podem ser utilizadas, por exemplo, coleta por pedido, agrupamento de pedidos, *sort-while-pick*, *sort-after-pick*, coleta por pedido com zonas, e agrupamento com zonas (GU et al. 2007; YOON & SHARP 1996). Petersen e Aase (2004) mostram que o agrupamento de pedidos é a política que oferece mais economias, principalmente se o tamanho dos pedidos for pequeno.

A maioria dos modelos para resolução do problema de roteamento na literatura são variações do problema de roteamento de veículos (VRP – *Vehicle Routing Problem*), que trata do problema de criar rotas ligando um ou mais depósitos aos clientes. O VRP capacitado (CVRP) é um problema estudado com frequência na literatura durante os últimos 50 anos. Dror e Trudeau (1989) introduziram uma relaxação do conhecido CVRP onde a demanda de um cliente pode ser repartida entre dois ou mais veículos. Este problema é chamado, em inglês, de *Split Delivery Vehicle Routing Problem* (SDVRP). Mesmo sendo o problema uma relaxação do CVRP, o problema continua sendo \mathcal{NP} -difícil, e a divisão de demanda entre veículos pode resultar em economias significativas (DROR & TRUDEAU, 1989). Mullaseril (1997) apresentou uma heurística para um problema de caminhões em um rancho no Arizona, EUA. Belenguer et. al. (2000) mostraram um novo limite inferior para o problema. Archetti, et. al. (2006) desenvolveram um algoritmo de busca tabu. Jin et. al (2007) apresentam bons resultados com um novo algoritmo de duas etapas com desigualdades válidas para o SDVRP.

O SDVRP com janelas de tempo (VRPTWSD) é uma variação do SDVRP que até hoje foi pouco estudada. Frizell e Giffin (1995) consideraram o problema com janelas de tempo (VRPTWSD) e estudaram heurísticas para a resolução de problemas com uma estrutura de *grid network*. Ho e Haugland (2004) apresentam um método de busca tabu para este problema que acha o ótimo com menos de um segundo para instâncias com 15 ou menos clientes.

3. Modelo Estático

O modelo matemático do problema estático seria utilizado quando o sistema tiver em estado inicial, ou seja, todos os veículos estão na doca. Este problema é definido em um grafo $G=(V, E)$ com conjunto de vértices $V=\{1, 2, \dots, n\}$. O vértice 1 representa a doca e os demais vértices são os locais dos quais os produtos devem ser recolhidos. O grafo consiste em um conjunto de arcos, E , onde o custo do arco (comprimento do arco) $custo_{ij}$ de um arco $(i, j) \in E$ é não-

negativo. Os veículos começam e terminam suas rotas na doca. Existe uma demanda inteira d_k para os produtos e os veículos podem atravessar um arco $(i, j) \in E$ onde tem demanda d_k no vértice j sem a obrigação de recolher qualquer fração da demanda d_k . Uma solução pode utilizar qualquer número de veículos c . Os veículos são capacitados, com capacidade máxima de cada veículo igual a Cap . Cada rota também tem uma restrição de custo, max_ct , que refere ao nível de serviço do armazém (tempo máximo para recolher os produtos). A solução deve recolher toda a demanda sem exceder a capacidade dos veículos ou o nível de serviço. Dado isso, o objetivo é minimizar o número de veículos necessários, com o objetivo secundário de minimizar a distância percorrida pelos veículos. A notação usada no modelo é definida a seguir.

3.1. Parâmetros

- I : conjunto de locais no armazém;
- K : conjunto de zonas de coleta;
- C : conjunto de veículos;
- E : conjunto de arcos (i, j) entre local i e j ;
- n : número máximo de veículos (limite superior)
- $custo_{ij}$: custo de atravessar arco (i, j) ;
- d^k : demanda do produto k ;
- Cap : capacidade de cada veículo;
- Max_ct : Custo máximo de cada rota – nível de serviço;
- C_{ativ}^c : Custo de ativação do veículo c (*número grande*).

3.2. Variáveis de Decisão

- x_{ij}^c : igual a 1 se o veículo c atravessa arco (i, j) ; 0 se não;
- y^c : igual a 1 se o veículo c é ativado; 0 se não;
- z^{ck} : fração da demanda d_k que o veículo c recolha, ≥ 0 ;
- f_{ij}^{kc} : fluxo global no arco (i, j) com veículo c com destino á zona k , ≥ 0 ;
- ct^c : custo total das rotas, ≥ 0 .

3.3. Modelo Matemático Estático

$$\text{Min } \sum_{c \in C} C_{ativ}^c * y^c + \sum_{c \in C} \sum_{(i,j) \in E} custo_{ij} x_{ij}^c \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij}^c = y^c \quad \forall c \in C \quad (2)$$

$$x_{ij}^c \leq y^c \quad \forall (i,j) \in E; c \in C \quad (3)$$

$$y^{c+1} \leq y^c \quad \forall c \in C; \quad (4)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij}^c - \sum_{(i,j) \in E} x_{ji}^c = 0 \quad \forall j \in V; c \in C; \quad (5)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} custo_{ij} * x_{ij}^c = ct^c \quad \forall c \in C; \quad (6)$$

$$ct^c \leq max_ct \quad \forall c \in C \quad (7)$$

$$\sum_{c \in C} z^{ck} = 1 \quad \forall k \in K; \quad (8)$$

$$z^{ck} \leq 1 \quad \forall k \in K; c \in C; \quad (9)$$

$$\sum_{k \in K} d^k * z^{ck} \leq Cap \quad \forall c \in C \quad (10)$$

$$\sum_{c \in C} y^c \geq \sum_{k \in K} d^k / Cap \quad (11)$$

$$\sum_{(j,i) \in E} f_{ji}^{kc} - \sum_{(i,j) \in E} x f_{ij}^{kc} = -d^k * z^{ck} \quad \forall k \in K, k > 1; c \in C; \quad (12)$$

$$\sum_{(i,k) \in E} f_{ik}^{kc} - \sum_{(k,i) \in E} f_{ki}^{kc} = d^k * z^{ck} \quad \forall k \in K, k > 1; c \in C; \quad (13)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} f_{ij}^{kc} - \sum_{(j,i) \in E} f_{ji}^{kc} = 0 \quad \forall k \in K, k > 1; c \in C; j \in V; \quad (14)$$

$$\sum_{k \in K} f_{ij}^{kc} \leq Cap * z^{ck} \quad \forall (i,j) \in E; c \in C; \quad (15)$$

$$f_{ij}^{kc} \leq d^k * z^{ck} \quad \forall (i,j) \in E; k \in K; c \in C; \quad (16)$$

No modelo, a função objetivo (1) minimiza o número de veículos ativados com um peso pequeno no custo das rotas para evitar sub-ciclos. Restrições (2) e (3) garantem que um veículo ativado sai só uma vez da doca, que apenas veículos ativados andem pelos arcos, e que um veículo atravessa um arco só uma vez na mesma direção. Conjunto (4) garante que os veículos são ativados em ordem. As restrições (5) garantem que um veículo que entra em um dado nó j sai do nó j . As restrições (6) calculam o custo total (tempo) de cada rota e as restrições (7) garantem que o custo total seja menor do que o custo máximo permitido (nível de serviço). Conjuntos (8) e (9) garantem que toda a demanda seja recolhida por um veículo ativado. As restrições (10) limitam o volume recolhido por cada veículo, que não pode estourar a capacidade máxima do veículo. As restrições (11) representam um limite inferior no número de veículos exigidos. Os conjuntos (12), (13) e (14) são restrições de conservação de fluxo de produto nos arcos. As restrições (15) e (16) limitam a capacidade de cada rota.

3.4. Problemas Teste

O modelo foi testado em varias instâncias de tamanhos diferentes, com o objetivo de verificar o esforço computacional que o modelo requer. Os problemas testes foram criado para armazéns de formato retangular onde a doca é situado em um canto do espaço. O armazém é dividido em seções pequenas, supondo-se que a demanda de uma seção seja agrupada. Deste modo, um recolhimento do produto k seria, na verdade, o recolhimento de todos os produtos na área de produtos k . Nos testes todos os arcos são bidirecionais, supondo-se então que os corredores têm espaço suficiente para dois veículos. Cada arco leva um custo de 1 unidade. O tempo de serviço para cada instância foi o tempo mais apertado possível, ou seja, o mínimo custo necessário para ir até o ponto mais distante e voltar. Problemas de 10, 15, 20, 25, e 30 nós foram testados. Estes problemas usam sempre um armazém com 5 nós de largura (fileiras com 5 nós), mudando só o número de fileiras de acordo com o tamanho do problema. A capacidade dos veículos é de 50 itens. A demanda em cada nó é mostrado abaixo na Tabela 1.

Tabela 1: Demanda presente em cada nó

nó:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
demanda:	1	25	14	3	1	23	5	16	6	6	15	4	6	10	12

nó:	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
demanda:	2	20	9	5	11	6	3	9	4	7	9	2	16	8	5

A Figura 1 abaixo mostra um exemplo ilustrativo deste tipo de armazém com 20 pontos (19 zonas de coleta, 1 doca). A demanda em cada ponto para este exemplo é de acordo com a Tabela 1 acima para nós 1 até 20.

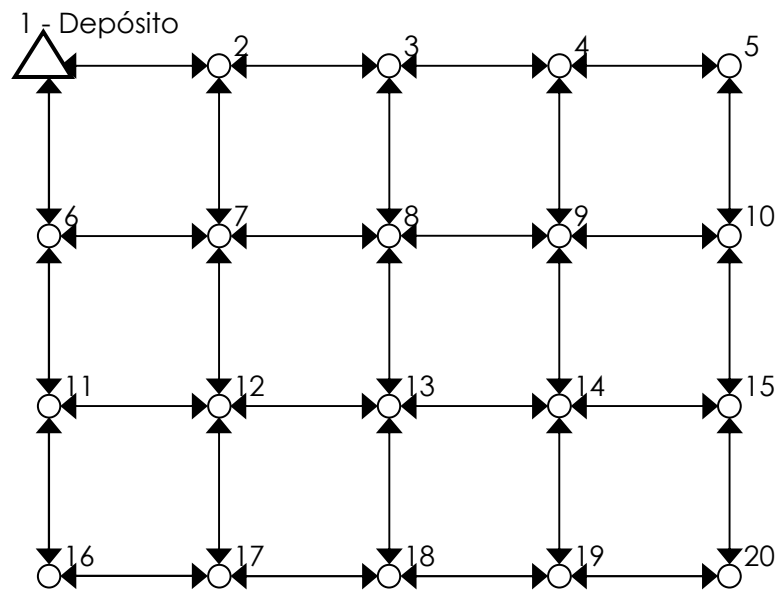


Figura 1. Armazém retangular de 20 pontos

O modelo gera as rotas para cada veículo ativado, com o objetivo de minimizar o número de veículos. Para o exemplo de 20, quatro veículos foram ativados, criando as rotas mostradas na Figura 2 e 3. A porcentagem da demanda que foi recolhido pelo veículo em cada ponto do armazém é mostrado também nas figuras. Como pode ser visto neste exemplo, todos os veículos começam e terminam na doca, um veículo pode passar por um ponto sem recolher itens, a demanda de um ponto pode ser dividida entre veículos, e a toda a demanda de cada nó é recolhida. Respeita-se também a capacidade dos veículos e o nível de serviço do armazém.

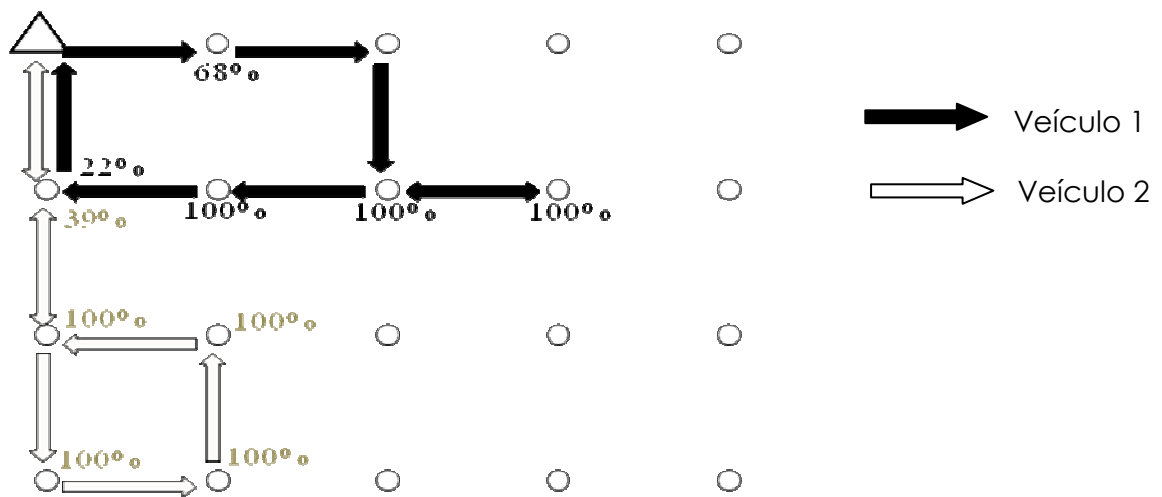


Figura 2. Rotas e Demanda Recolhido por Veículos 1 e 2

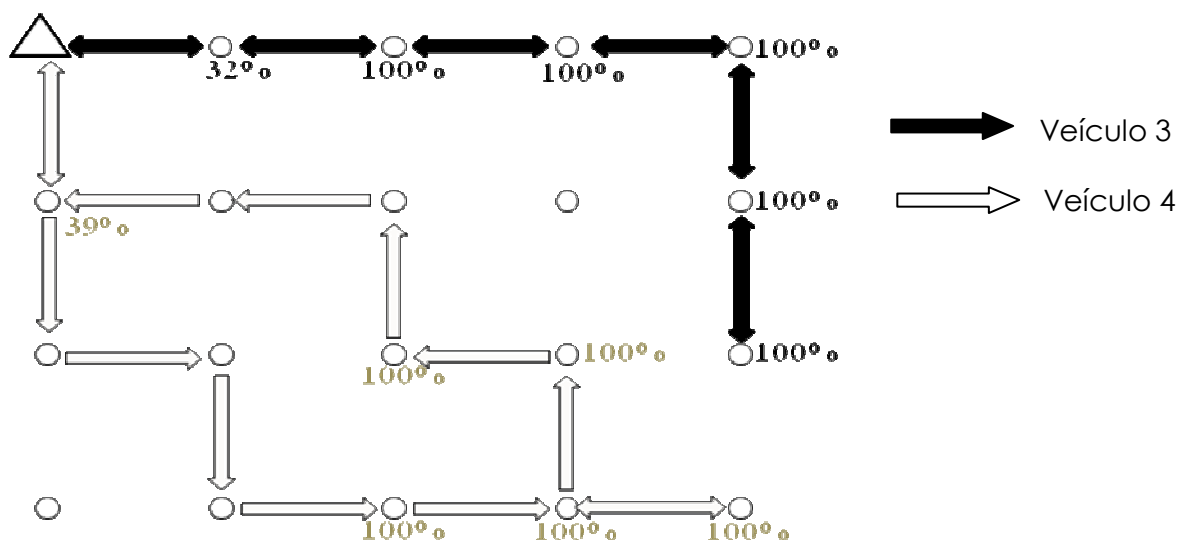


Figura 3. Rotas e Demanda Recolhido por Veículos 3 e 4

3.5. Resultados: Modelo Estático

Problemas teste do tipo explicado acima foram criados com 10, 15, 20 e 25 nós. Os problemas foram testados em um computador com processador Pentium (R) D 3.00GHz, 2.00 Gb de memória RAM e sistema operacional Windows XP Professional v.2002. O modelo foi programado no *software* XPRESS 2006 da Dash Optimization.

A Tabela 2 mostra o número de veículos que foram ativados, o tempo de rota de cada veículo, e o tempo computacional para resolver o problema.

Tabela 2. Resultados do modelo estático

Tamanho de Problema	No. de Vcls.	Custo (tempo) da Rota por Veículo						Tempo Computacional (segundos)
		Vcl. 1	Vcl. 2	Vcl. 3	Vcl. 4	Vcl. 5	Vcl. 6	
10	2	6	10	-	-	-	-	1,0
15	3	8	12	10	-	-	-	4,0
20	4	8	14	12	8	-	-	31,0
25	5	12	16	4	12	10	-	633,0
30	6	10	18	16	14	4	10	2046,0

Os problemas de tamanho 10 e 15 foram resolvidos em menos de 5 segundos. O problema de tamanho 20 utilizou 31 segundos, o de 25 usou 633 segundos e o de 30 utilizou 2046 segundos. Apesar dos atuais tempos de máquina, espera-se reduzir o esforço computacional ao melhorar a qualidade da implementação e ao se aplicar técnicas especializadas para geração de limites superiores e inferiores de melhor qualidade.

4. Modelo On-Line

O modelo *on-line* trabalha com as rotas geradas anteriormente, ou seja, que estão sendo executadas, e altera essas rotas para incluir novos pedidos. Os produtos a serem recolhidos por um veículo *c* não podem ser retirados da rota do veículo porque é justamente essa rota anterior que vai garantir o nível de serviço para os itens nessa rota. A rota do veículo,

contudo, pode ser aumentada para incluir produtos dos pedidos recém-chegados. Com isso, a capacidade e tempo de sobra dos veículos em rota podem ser aproveitados ao invés de esperar o veículo voltar para a doca para receber uma rota completamente nova. O modelo foi desenhado para, sempre que puder, colocar nova demanda em uma rota existente. Quando um item não cabe em um veículo em andamento, o modelo busca ativar um veículo *stand-by* que é um veículo que não está ativo no momento, mas que já foi ativado. Quando nenhuma dessas duas opções está viável o modelo ativa um veículo *extra*, ou seja um novo veículo, com custo elevado.

4.1. Parâmetros

O modelo utiliza alguns dos parâmetros do modelo estático, mas conta com a entrada de vários parâmetros extras. Entre elas estão algumas informações geradas previamente de demanda, rota anterior e a entrada das informações atualizadas, como, por exemplo, a localização atual dos veículos. Os parâmetros para o modelo *on-line* seguem.

- y^c : Veículos em rota;
- atv : número de veículos já mobilizados;
- stb : número de veículos *stand-by* disponíveis;
- p_{ij}^c : arcos (i,j) já atravessados pelo veículo c ;
- do^k : demanda original dos produtos (da otimização anterior);
- dn^k : demanda nova dos produtos;
- ds^{ck} : demanda original que já foi recolhido;
- da^k : demanda total atual (demanda original + demanda nova);
- z^{ck} : porcentagem da demanda original do produto k atribuído ao veículo c .
- C_{atv}^e : custo de ativação de um veículo *extra*;
- Cs_{atv}^e : custo de ativação de um veículo *stand-by*.

4.2. Variáveis de Decisão

- x_{ij}^c : igual a 1 se o veículo c atravessa arco (i, j) na continuação da rota; 0 se não;
- g^{ck} : fração da demanda dn^k que o veículo c recolha, ≥ 0 ;
- e^c : igual a 1 se o veículo *extra* (nunca utilizado), c , for ativado; 0 se não;
- s^c : igual a 1 se o veículo *stand-by* (já utilizado mas não esta em rota no momento), c , for ativado; 0 se não;

4.3. Modelo Matemático On-line

$$\text{Min } \sum_{c \in C} C_{atv}^e * e^c + \sum_{c \in C} Cs_{atv}^e * s^c + \sum_{c \in C} \sum_{(i,j) \in E} custo_{ij} * x_{ij}^c \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij}^c = e^c + s^c \quad \forall c \in C \quad (2)$$

$$x_{ij}^c \leq y^c + e^c + s^c \quad \forall (i,j) \in E; c \in C \quad (3)$$

$$e^{c+1} \leq e^c \quad \forall c \in C, c > (stb + atv), c < n; \quad (4)$$

$$s^{c+1} \leq s^c \quad \forall c \in C, c > atv, c < n; \quad (5)$$

$$y^c + s^c + e^c \leq 1 \quad \forall c \in C, c < n; \quad (6)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} p_{ij}^c * x_{ij}^c - \sum_{(i,j) \in E} p_{ji}^c * x_{ji}^c = 0 \quad \forall j \in V; c \in C; \quad (7)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} custo_{ij} * x_{ij}^c + \sum_{(i,j) \in E} custo_{ij} * p_{ij}^c = ct^c \quad \forall c \in C; \quad (8)$$

$$ct^c \leq \max_ct \quad \forall c \in C \quad (9)$$

$$\sum_{c \in C} g^{ck} = 1 \quad \forall k \in K; \quad (10)$$

$$z^{ck} \leq y^c + e^c + s^c \quad \forall k \in K; \quad c \in C; \quad (11)$$

$$\sum_{k \in K} dn^k * g^{ck} + \sum_{k \in K} do^k * z^{ck} \leq Cap \quad \forall c \in C \quad (12)$$

$$\sum_{c \in C} (y^c + e^c + s^c) \geq \left\lceil \frac{\sum_{k \in K} d^k}{Cap} \right\rceil \quad (13)$$

$$g^{ck} \leq \sum_{(l,k) \in E} x_{lk}^c \quad \forall k \in K, k > 1; \quad c \in C; \quad (14)$$

$$\sum_{(j,1) \in E} f_{j1}^{kc} - \sum_{(1,j) \in E} x_{1j}^{kc} = -dn^k * g^{ck} - do^k * z^{ck} \quad \forall k \in K, k > 1; \quad c \in C; \quad (15)$$

$$\sum_{(l,k) \in E} f_{lk}^{kc} - \sum_{(k,i) \in E} f_{ki}^{kc} = dn^k * g^{ck} + do^k * z^{ck} \quad \forall k \in K, k > 1; \quad c \in C; \quad (16)$$

$$\sum_{(l,j) \in E} f_{lj}^{kc} - \sum_{(j,i) \in E} f_{ji}^{kc} = 0 \quad \forall k \in K, k > 1; \quad c \in C; \quad j \in V, j > 1; \quad (17)$$

$$\sum_{k \in K} f_{ij}^{kc} \leq Cap * (p_{ij}^c + x_{ij}^c) \quad \forall (l,j) \in E; \quad c \in C; \quad (18)$$

$$f_{ij}^{kc} \leq dn^k * g^{ck} + do^k * z^{ck} \quad \forall (l,j) \in E; \quad k \in K; \quad c \in C; \quad (19)$$

No modelo, a função objetivo (1) minimiza o número de veículos *stand-by* e *extra* ativados, com um pequeno peso também no custo das rotas para evitar sub-ciclos. Restrições (2) e (3) garantem que um veículo ativado sai só uma vez da doca, que apenas veículos ativados andem pelos arcos, e que um veículo atravessa um arco só uma vez na mesma direção. Conjuntos (4), (5) e (6) garantem que os veículos são ativados em ordem. As restrições (7) garantem que um veículo que entra em um dado nó j sai do nó j . As restrições (8) calculam o custo total (tempo) de cada rota e as restrições (9) garantem que o custo total seja menor do que o custo máximo permitido (nível de serviço). Conjuntos (10) e (11) garantem que toda a demanda seja recolhida por um veículo ativado. As restrições (12) limitam o volume recolhido por cada veículo, que não pode estourar a capacidade máxima do veículo. As restrições (13) representam um limite inferior no número de veículos exigidos. As restrições (14) garantem que a demanda é atribuída a veículos que passam pelo ponto de demanda. Os conjuntos (15), (16) e (17) são restrições de conservação de fluxo de produto nos arcos. As restrições (18) e (19) limitam a capacidade de cada rota.

4.4. Problemas Teste

Os problemas testes para o modelo *on-line* foram criados com o mesmo desenho de armazém que foi descrito para o modelo estático (veja secção 3.4). Foi dado como entrada que tem dois veículos *stand-by* e os demais veículos que precisam ser ativados pelo modelo serão veículos *extras*. Usou-se o resultado do modelo estático como entrada para o modelo *on-line*, onde cada veículo já atravessou os primeiros três arcos e recolheu toda a demanda original dos nós onde passou se estava programado para recolher itens naqueles nós. Considera-se que demanda nova chegou para todos os nós conforme mostrado na Tabela 3.

Tabela 3: Demanda nova presente em cada nó

nó:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
demanda:	1	25	14	3	1	23	5	16	6	6	15	4	6	10	12

nó:	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
demanda:	2	20	9	5	11	6	3	9	4	7	9	2	16	8	5

Com o objetivo de mostrar o resultado típico do modelo *on-line*, vamos examinar o caso do exemplo dado na seção 3.4 do armazém com 20 pontos de coleta. Especificamente, vamos olhar a rota original do veículo 3, que foi mostrado na Figura 4. Como entrada do modelo *on-line*, sabemos que o veículo localiza-se atualmente no nó 4, e que já recolheu 100% da demanda original de nós 3 e 4 e 32% da demanda original do nó 2 (total de 25 unidades de capacidade). Também sabemos que o veículo ainda vai buscar 100% da demanda original nos nós 5, 10 e 15 (total de 34 unidades de capacidade) já que o modelo não permite tirar demanda do veículo que já foi atribuído. Com isso, fica claro que o veículo tem 16 unidades de capacidade livre sem estourar o limite de 50, e lembramos também que tem limite no tempo da rota total com respeito ao nível de serviço. O resultado do modelo *on-line*, então, encaixou a demanda nova do produto 14 (10 unidades) no veículo 3, mudando a rota conforme visto na Figura 4. Como pode ser visto, o veículo ainda passa em todos os pontos originais para recolher a demanda que foi atribuído originalmente.

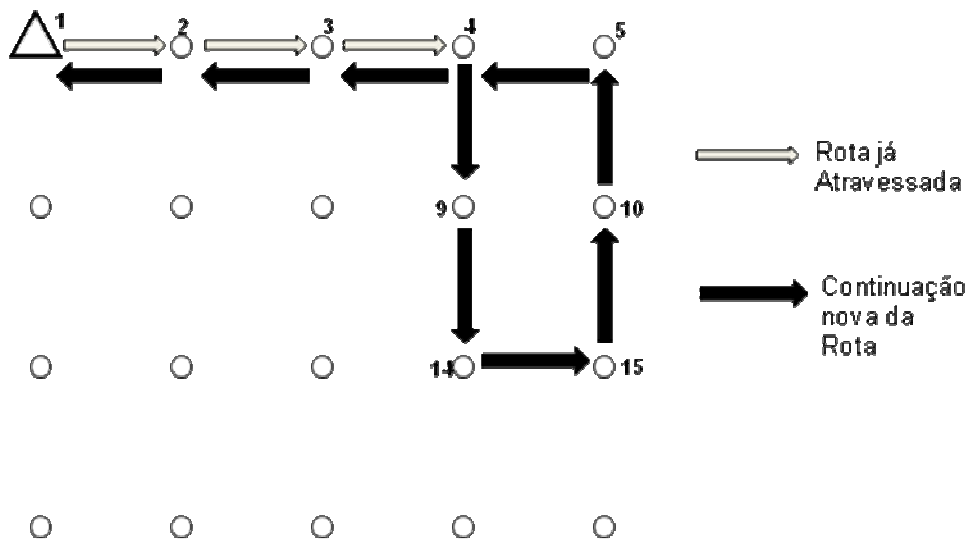


Figura 4. Rota do veículo 3 criada pelo modelo *on-line*

Como o modelo estático precisou de 4 veículos e cada veículo já estava utilizando a maioria da capacidade total, o modelo *on-line* precisou ativar mais três veículos para recolher toda a demanda nova. Dois veículos *stand-by* foram oferecidos como entrada, e então o modelo ativou os dois veículos *stand-by* e um veículo *extra*.

4.5. Resultados: Modelo On-line

Os problemas testes do tipo explicado acima foram criados com 10, 15, 20, 25 e 30 nós. A Tabela 4 mostra o número de veículos *stand-by* e *extra* que foram ativados e o tempo computacional para resolver o problema. Conforme visto na tabela, os tempos computacionais são elevados em comparação ao modelo estático. Como o modelo *on-line* limita o espaço de soluções viáveis consideravelmente, o modelo gasta muito tempo procurando uma solução viável. O exemplo com 25 zonas de coleta, por exemplo, apresentou um GAP de otimalidade de 0,022% e o exemplo com 20 zonas de coleta teve um GAP de otimalidade de 0,018%. Com este resultado, percebe-se que o modelo tem um limite inferior justo e que gasta muito tempo computacional para encontrar um bom limite superior (solução inteira viável). Pretende-se criar uma heurística específica para este problema para gerar rapidamente uma boa solução viável do problema para usar como entrada do modelo. Será importante também tentar colocar restrições para melhorar o limite inferior do problema. Até hoje não existe nenhum limite inferior melhor na literatura para o problema com janelas de tempo e coleta repartida, até onde sabemos. Para as instâncias em que a capacidade limita o problema mais

do que a qualidade de serviço, o limite inferior baseado na capacidade é justo. Trabalhando-se com grandes armazéns de alta rotatividade, isto tende a ser o caso.

Tabela 4. Resultados do modelo *on-line*

Tamanho de Problema	Número de Vcls. <i>Stand-by</i> ativados	Número de Vcls. <i>Extra</i> ativados	Tempo Computacional (segundos)	GAP (%)
10	1	0	1	--
15	2	0	160	--
20	2	1	2003	0,018
25	2	1	13.719	0,022

5. Conclusões

Apresentou-se neste artigo dois modelos novos, uma versão estática e uma *on-line*, para o roteamento de veículos dentro de armazéns com o objetivo de minimizar o número de veículos ativados. O problema pode ser classificado como um problema de roteamento de veículos com janelas de tempo e repartição de coleta, VRPTWSD. Criou-se várias problemas testes para o problema e mostrou os resultados computacionais. O modelo ainda está sendo desenvolvido, mas já ficou claro que cria rotas inteligentes e que um modelo *on-line* seria bastante útil na prática. Como continuação da pesquisa que está sendo feita, precisa-se identificar e testar possíveis limites inferiores e criar uma heurística para usar por cima do modelo com objetivo em identificar um limite superior do problema.

Referências Bibliográficas

- ARCHETTI, C.; SPERANZA, M.G.; HERTZ, A. A tabu search algorithm for the split delivery vehicle routing problem. *Transportation Science*, v.40, n.1, p.64-73, 2006.
- BELENGUER, J.M.; MARTINEZ, M.C.; MOTA, E. A Lower Bound for the Split Delivery Vehicle Routing Problem. *Operations Research*, v.48, n.5, p.801-810, 2000.
- CHEN, M.-C.; WU, H.-P. An association-based clustering approach to order batching considering customer demand patterns. *Omega*, v 33, p.333-343, 2005.
- DANIELS, R.L.; RUMMEL, J.L. SCHANTZ, R. A model for warehouse order picking. *European Journal of Operational Research*, v.105, p.1-17, 1998.
- DE KOSTER, R.; VAN DER POORT, E. Routing orderpickers in a warehouse: A comparison between optimal and heuristic solutions. *IIE Transactions*, v.30, p.469-480, 1998.
- DROR, M.; TRUDEAU, P. Savings by split delivery routing. *Transportation Science*. v. 23, p.141-145, 1989.
- FRIZZELL, P.W.; GRIFFIN, J.W. The split delivery vehicle scheduling problem with time windows and grid network distance. *Computers and Operations Research*, v.22, p.655-667, 1995.
- GU, J., GOETSCHALCKX, M.; MCGINNIS, L.F. Research on warehouse operation: A comprehensive review. *European Journal of Operational Research*, v. 177, p. 1-21, 2007.

HO, S.C.; HAUGLAND, D. A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with time windows and split deliveries. *Computers & Operations Research*, v.31, p.1947-1964, 2004.

JIN, M.; LIU, K.; BOWDEN, R.O. A two-stage algorithm with valid inequalities for the split delivery vehicle routing problem. *International Journal of Production Economics*, v.105, p.228-242, 2007.

MULASERIL, P.A.; DROR, M.; LEUNG, J. Split-delivery routing heuristics in livestock feed distribution. *Journal of Operation Research Society*, v.48, p.107-116, 1997.

PETERSON, C.G.; AASE, G. A comparison of picking, storage, and routing policies in manual order picking. *Int. J. Production Economics*, v. 92, p. 11-19, 2004.

RATLIFF, H.D.; ROSENTHAL, A.S. Order-picking in a rectangular warehouse: A solvable case of the traveling salesman problem. *Operations Research*, v.31, n.3, p.507-521, 1983.

ROODBERGEN, K. J.; DE KOSTER, R. Routing order pickers in a warehouse with a middle aisle. *European Journal of Operational Research*, v. 133, p. 32-43, 2001.

YOON, C. S. & SHARP, G. P. A Structured Procedure for Analysis and Design of Order Pick Systems. *IIE Transactions*, v. 28, p. 379-389, 1996.