SPOLM 2008

ISSN 2175-6295 Rio de Janeiro- Brasil, 05 e 06 de agosto de 2008.

APLICAÇÃO DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS EM GESTÃO DE CUSTOS DE MANUTENÇÃO - UMA ABORDAGEM DA UTILIZAÇÃO DA CADEIA DE MARKOV.

Denilson Nogueira da Silva
FGVOnLine - Fundação Getúlio Vargas
Marinha do Brasil
Universidade Gama Filho
UniverCidade
FAETEC – RJ
denilsonnogueira@uol.com.br
dsilva@fgv.br

RESUMO

Este artigo tem por finalidade utilizar o processo estocástico, mais especificamente, as cadeias de Markov, ou processos Markovianos, para a apuração de custos de manutenção.
A maioria dos estudos sobre probabilidade lida com processos independentes, porém, os recentemente buscam o estudo da mudança de processos, no qual, a partir de um estado inicial de uma variável, seja verificada a sua evolução a partir do relacionamento com outra variável, como o tempo, por exemplo. Visto desta maneira, um problema de manutenção, deixa de ser um arremesso de moeda, para se tornar um processo de predição, verificando ao decorrer do tempo os riscos de parada e os custos desta parada.
Palavras-chaves: Processos Estocásticos, Cadeias de Markov, Custos de Manutenção

ABSTRACT

This article shows us how to use a stochastic process, like Markov Chains, or Markovian Process, to deal with maintenance costs. The most probability studies deals with independent process, but recently is searching for changes of process studies, where from an initial state of a variable, its can verify the evolution from the relation with another variable. So, this evolution is certified by the relation with another one, as the time, for example. Thus, a maintenance problem is not anymore a coin toss, but a prediction process, using the time to define the setups risks and machine stops costs.
Keywords: Stochastic Process, Markov Chains, Maintenance Costs.

1. INTRODUÇÃO

Já na sua concepção histórica, a Matemática vem demonstrando a sua aplicabilidade, uma vez que os números surgiram da necessidade do ser humano contabilizar a sua produção, seja ela em qualquer área de atuação humana. Ainda na época que não existiam matemáticos, com a concepção atual da palavra, a ciência de contar já era exercida por quem efetivamente precisava: médicos, filósofos, padres, astrônomos, agricultores, etc.
A Matemática surge então como maneira, modo ou técnica *(tica)* de explicar, conhecer, entender e lidar *(matema)* com a realidade natural e sócio-cultural, passando a ser tratada no campo filosófico, sendo investigada por várias correntes de pensadores que fizeram emergir a Matemática Pura, desenvolvida até hoje em centros de excelência, preocupada com o rigor demonstrativo.

Associar o conhecimento da Teoria Matemática possibilita à área Gerencial Contábil, possibilita o surgimento de cenários que podem propiciar uma maior previsibilidade, ao invés de trabalhar com variáveis desconhecidas.

Neste contexto, os modelos matemáticos têm por finalidade trazer as informações do mundo real, no intuito de predizer os acontecimentos.

Um destes modelos estatísticos é conhecido por Processos Estocásticos, onde uma variável, ou um fenômeno observável, irá variar em função do tempo. Um processo estocástico em especial é conhecido por cadeia de Markov, onde tendo um conjunto de estados possíveis, representado por $S = \{s_1, s_2, s_3 , \dots , s_n\}$, O processo se inicia em um dos estados, se movendo sucessivamente para outros. Estando no estado s_i, ele pode se mover para o estado s_j, com uma probabilidade p_{ij}.

Por exemplo: uma máquina funcionando perfeitamente ($S = \{s_1\}$) pode passar a apresentar algum defeito, se movendo para outro estado ($S = \{s_2\}$). A probabilidade deste fato ocorrer é representado por p_{12}. Da mesma forma, ela parar de funcionar ($S = \{s_2\}$), com probabilidade p_{13}.

2. Sistemas e Matrizes

As matrizes são vastamente utilizadas na base da Álgebra Linear, sendo utilizada inclusive na resolução de Sistemas Lineares, uma vez que são conjuntos ordenados números e variáveis que são reduzidos a duas dimensões: *linha e coluna*.

Em Contabilidade, um quadro de controle de estoque de mercadorias ou matéria-prima, por exemplo, pode ser definido como uma matriz, onde, o valor da entrada (coluna) e data da mesma (linha), formam uma célula ou componente de uma matriz.

> *De forma genérica, uma matriz pode ser representada por uma letra maiúscula ou pelos seus elementos representativos. Freqüentemente, introduzem-se nessa notação dois subíndices, indicando o número de linha e colunas. Por convenção, o primeiro subíndice corresponde às linhas, e o segundo, às colunas. Da mesma forma, cada elemento está associado a dois subíndices, que indicam a sua posição na matriz. (FONSECA, 2003 : p. 11)*

A matriz a seguir, com *m* linhas e *n* colunas, possui a dimensão *mxn*:

$$A_{mxn} = \left[a_{ij}\right]_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz 1 – Estrutura básica das Matrizes.

2.1 Processos Estocásticos

O Processo Estocástico é um fenômeno que varia em algum grau em função da passagem do tempo, modificando o comportamento probabilístico de um determinado sistema, tornando uma experiência aleatória em uma seqüência de valores (CLARKE, DISNEY; 1979).

A probabilidade de "*x* carros pagarem pedágio entre 7:00 e 9:00 horas" é diferente da probabilidade de "*x* carros pagarem pedágio entre 2:00 e 4:00 horas". Neste caso, tem-se um Processo Estocástico Discreto, onde pode-se observar que em cada tempo t (7, 8 e 9 horas, ou de trinta em trinta minutos), de um conjunto de tempo T (de 7:00 e 9:00 horas), pode-se observar uma medida *Xt* (76, 45 e 60 carros, por exemplo).

Tais processos são importantes para Contabilidade de Custos, uma vez que podem estimar, entre outros fatores:

a) custos de parada de produção;
b) custos de reposição de uma peça;
c) custos da desistência de um cliente em função da fila de atendimento;
d) custos da não qualidade de um produto.

Um Processo Estocástico de parâmetro discreto é uma seqüência dependente de Markov, Cadeia de Markov ou um Processo de Markov, se, para t = 0, 1, 2, ... e para todos os estados:

$$Pr\left[X_n = i_n \middle| X_1 = i_1; ...; X_{n-1} = i_{n-1}\right] = Pr\left[X_n = i_n \middle| X_{n-1} = i_{n-1}\right] \quad (1)$$

Equação 1– Cadeia de Markov.

De forma genérica, a probabilidade de um evento no estado *n* irá modificar de acordo com probabilidade no estado *n-1*.

Utilizando o exemplo de Custos, se existe a probabilidade de um Fornecedor atrasar a sua entrega e ele não atrasou hoje, a probabilidade de atraso amanhã será maior e, se ele não atrasar amanhã, a probabilidade para o dia seguinte será maior ainda, desenvolvimento este que é uma transição entre valores (chamados estados do processo) que pode ser finito ou infinito numerável (BREIMAN, 1969).

2.2 Aplicação das Cadeias de Markov e Equação Chapman-Kolmogorov em Custos

Uma das formas de representar os estados e as suas probabilidades é através de notações matriciais, onde, para qualquer momento u, $0 \leq u \leq n$, e estados j e k, tem-se a Equação completa de Chapman-Kolmogorov:

$$Pr_{j,k}(n) = \sum_{i \in E} Pr_{j,i}(u) Pr_{i,k}(n-u) \qquad \textbf{(1)}$$

Assim, sendo uma linha de produção dependente de uma máquina que:

a) se estiver funcionando normalmente, pode continuar a funcionar no dia seguinte (passo n+1), com probabilidade $\square_1$;
b) apresentar algum defeito, sem parar a produção, porém, aumentando os custos, com uma probabilidade de $\square_2$;
c) pode parar de funcionar, com probabilidade de $\square_3$, parando a produção;
d) trabalhando com defeito, a máquina pode permanecer assim com probabilidade de $\square_1$;
e) ou pode parar imediatamente, com probabilidade de $\square_2$.

Torna-se importante calcular, decorridos n passos, qual a probabilidade de parada ou de trabalhar com defeito. Sabendo isto, pode-se estimar a quantidade produzida e o Custo de produção neste período, definido pela quantidade de passos (BERNARDO, 2003).

Atribuindo X_n a variável que registra o estado da máquina no dia *n*, o espaço de estados possíveis {0, 1, 2}, sendo:

0 – Máquina funcionando
1 – Máquina com defeito
2 – Máquina parada.

O conjunto de índices é a quantidade de dias, sendo {0, 1, ..., n}, que é também uma variável discreta. Estes parâmetros são suficientes para criar uma Cadeia de Markov, com as seguintes transições de passos, sendo probabilidades de:

$Pr_{0,0}$ = 0,88 → Máquina continuar a funcionar dado que já estava funcionando.
$Pr_{0,1}$ = 0,10 → Máquina apresentar um determinado defeito dado que estava funcionando perfeitamente.
$Pr_{0,2}$ = 0,02 → Máquina parar dado que estava funcionando perfeitamente..
$Pr_{1,0}$ = 0,00 → Máquina funcionar dado que estava com defeito (correção sem manutenção).
$Pr_{1,1}$ = 0,75 → Máquina continuar funcionando com defeito, sem parar de funcionar.
$Pr_{1,2}$ = 0,25 → Máquina parar dado que estava funcionando com defeito.
$Pr_{2,0}$ = 0,00 → Máquina voltar a funcionar perfeitamente de forma espontânea, depois que estava parada por defeito (correção sem manutenção).
$Pr_{2,1}$ = 0,00 → Máquina passar a funcionar com defeito, dado que estava parada por defeito (correção parcial sem manutenção).
$Pr_{2,2}$ = 1,00 → Máquina permanecer parada caso não haja intervenção.

Estes processos geram uma matriz de transição, com probabilidades $Pr_{j,k}$, onde j é o estado ao iniciar seu dia de trabalho e k o estado no final do dia (que significa o estado inicial do dia seguinte).

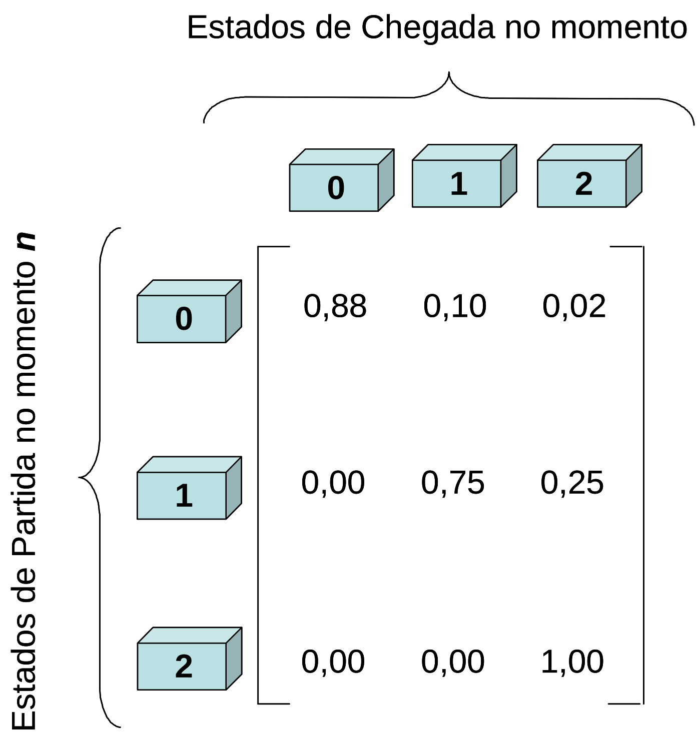

Figura 1 - Matriz de Transição.

O diagrama de transição dos estados pode ser representado a partir do Estados, revelando as probabilidades de transição.

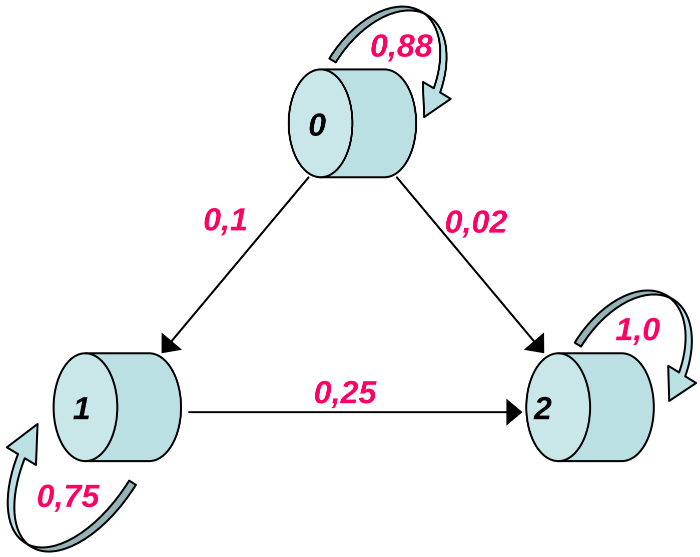

Figura 2– Diagrama de transições da Cadeia de Markov.

A matriz de cálculo será composta conforme a seguinte Matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}88 & 0{,}10 & 0{,}02 \\ 0{,}00 & 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Matriz 2 – Matriz P de Transição.

Observa-se que a soma de cada linha será igual a soma das probabilidades (1,00).
Supõe-se que o sistema parta de estado inicial de fabricação com um vetor de probabilidade inicial assim representado:

$$P^0 = (1, 0, 0)$$

Vetor 1 – Vetor de Probabilidade Inicial[1]

Ou seja, parte-se do princípio que o sistema se inicializa com a máquina em perfeitas condições. Para saber a matriz de transição no dia seguinte, multiplica-se a Matriz principal na primeiro passo (a própria $P^{(0)}$) por ela mesma, obtendo-se $P^{(1)}$.

$$P^{(0)} = P \rightarrow P^{(n)} = P.P^{(n-1)} \rightarrow P^{(1)} = P.P^{(0)} = P^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Equação 2 – Cálculo da Probabilidade de Estados no dia seguinte.

Portanto, para obter-se $P^{(1)}$, basta multiplicar a Matriz P por ela mesma. Sendo:

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,88 & 0,10 & 0,02 \\ 0,00 & 0,75 & 0,25 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0,88 & 0,10 & 0,02 \\ 0,00 & 0,75 & 0,25 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7744 & 0,163 & 0,0626 \\ 0,00 & 0,5625 & 0,4375 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Matriz 3 – Matriz Probabilidade em dois passos.

Demonstrando a multiplicação de Matrizes:

Seja a Matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 0,88 & 0,10 & 0,02 \\ 0,00 & 0,75 & 0,25 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix}$$

$$C_{MxN} = A_{MxK} x B_{KxN} \rightarrow P^{(1)}_{3x3} = P_{3x3} x P_{3x3}$$

Equação 3 – Fórmula básica da multiplicação de matrizes.

Portanto, é possível a multiplicação pois $k=3$, gerando uma matriz $3x3$. Cada célula da nova matriz será representada por p_{ij}:

$$p^{(1)}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (p_{ik}).(p_{kj})$$

$$p_{(1,1)} = p_{(1,1)} \cdot p_{(1,1)} + p_{(1,2)} \cdot p_{(2,1)} + p_{(1,3)} \cdot p_{(3,1)} = (0,88).(0,88) + (0,10).(0,00) + (0,02).(0,00) = 0,77 + 0 + 0 = 0,7744$$

$$p_{(1,2)} = p_{(1,1)} \cdot p_{(1,2)} + p_{(1,2)} \cdot p_{(2,2)} + p_{(1,3)} \cdot p_{(3,2)} = (0,88).(0,10) + (0,10).(0,75) + (0,02).(0,00) = 0,088 + 0,075 + 0 = 0,163$$

$$p_{(1,3)} = p_{(1,1)} \cdot p_{(1,3)} + p_{(1,2)} \cdot p_{(2,3)} + p_{(1,3)} \cdot p_{(3,3)} = (0,88).(0,02) + (0,10).(0,25) + (0,02).(1,00) = 0,0176 + 0,025 + 0,02 = 0,0626$$

$$p_{(2,1)} = p_{(2,1)} \cdot p_{(1,1)} + p_{(2,2)} \cdot p_{(2,1)} + p_{(2,3)} \cdot p_{(3,1)} = (0,00).(0,88) + (0,75).(0,00) + (0,25).(0,00) = 0 + 0 + 0 = 0,00$$

$$p_{(2,2)} = p_{(2,1)} \cdot p_{(1,2)} + p_{(2,2)} \cdot p_{(2,2)} + p_{(2,3)} \cdot p_{(3,2)} = (0,00).(0,10) + (0,75).(0,75) + (0,25).(0,00) = 0 + 0,5625 + 0 = 0,5625$$

$$p_{(2,3)} = p_{(2,1)} \cdot p_{(1,3)} + p_{(2,2)} \cdot p_{(2,3)} + p_{(2,3)} \cdot p_{(3,3)} = (0,00).(0,02) + (0,75).(0,25) + (0,25).(1,00) = 0 + 0,1875 + 0,25 = 0,4395$$

---

[1] Algumas publicações adotam a letra *v* como representativa de vetor. Neste trabalho resolveu-se adotar a representação de CLARKE e DISNEY (1979, p.217): vetores com *p* (minúsculo) com o número de passos sobrescrito e as Matrizes com *P* (maiúsculo) com o número de passos sobrescrito, com ou sem parêntesis
(Exemplo: $P = P^{(0)}$, porém, $P^2 \neq P^{(2)}$, pois, $P^2 = P.P = P^{(1)}$).

Neste segundo passo, algumas informações já são relevantes para uma estimativa de custos:

a) a soma dos Estados (linhas da matriz) continua como 1,00;
b) a probabilidade de a máquina continuar funcionando cai de 0,88 para 0,7744, de acordo com o vetor de probabilidade de estado após dois passos (CLARKE, DISNEY; 1979, p.224), resultado que se obtém da multiplicação de $P^{(2)}$ por $p^{(0)}$ (Vetor 1), sendo:

$$p^{(2)} = p^{(0)}.P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0{,}7744 & 0{,}163 & 0{,}0626 \\ 0{,}00 & 0{,}5625 & 0{,}4375 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix} \therefore$$

$$p^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}774 & 0{,}163 & 0{,}0626 \end{bmatrix}$$

Vetor 2 – Vetor de Probabilidade de Estado após dois passos.

c) a probabilidade de apresentar defeito aumenta de 0,10 para 0,163, conforme $p^{(2)}$;
d) a probabilidade de parar sobe de 0,02 para 0,0626, conforme $p^{(2)}$;
e) a probabilidade da máquina funcionar com defeito dado que já estava funcionando com defeito cai de 0,75 para 0,5625;
f) a probabilidade de parar dado que trabalhava defeituosa, sobe de 0,25 para 0,4375.

Assim, se a máquina inciar o seu funcionamento no dia 0, passará ter uma probabilidade de continuar funcionando de 0,88 no dia 1, passando a 0,7744 no dia 2, considerando cada dia um passo.

Passado o segundo dia sem transtornos, deseja-se saber como será o terceiro passo. Para tal, aplica-se novamente Kolmogorov (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**):

$$P^{(3)} = P.P^{(3-1)} = P.P^{(2)}$$

Assim, toma-se a Matriz 2 (P), e multiplica-se novamente pela
Matriz 3 ($P^{(1)}$).

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}88 & 0{,}10 & 0{,}02 \\ 0{,}00 & 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0{,}7744 & 0{,}163 & 0{,}0626 \\ 0{,}00 & 0{,}5625 & 0{,}4375 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6815 & 0{,}1997 & 0{,}1188 \\ 0{,}00 & 0{,}4219 & 0{,}5781 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Matriz 4 – Matriz de Probabilidade em três passos.

Permanecendo o estado da máquina inalterado, pode-se ter uma noção dos próximos dias, repetindo-se a operação da Matriz 4:

$$P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}5997 & 0{,}2179 & 0{,}1824 \\ 0{,}00 & 0{,}3164 & 0{,}6836 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Matriz 5 – Matriz de Probabilidade em quatro passos.

$$P^{(5)} = \begin{bmatrix} 0{,}5277 & 0{,}2234 & 0{,}2489 \\ 0{,}00 & 0{,}2373 & 0{,}7627 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Matriz 6 – Matriz de Probabilidade em cinco passos.

Quanto maior for a quantidade de passo, maior será a tendência da máquina se encontrar no estado 2 (parada), que é um estado absorvente. Tal situação pode ser assim representada:

$$\lim_{\lambda \to \infty} P^{(\lambda)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz 7 – Probabilidade para uma quantidade de passos suficientemente grande(λ)**.**

Uma vez que, conforme os passos aumentam a tendência de parada aumentar. Por aproximação e probalisticamente, pode-se dizer que, sem manutenção, a máquina realizaria ao menos uma parada a cada dois meses, pois: p^{60} = (0,00047, 0,00036, 0,9992).

Vetor de probabilidade de estado após *n* passos

Passos	Estado 0	Estado 1	Estado 2
0	1	0	0
5	0,5277	0,2234	0,2489
10	0,2785	0,1709	0,5506
15	0,1470	0,1028	0,7502
20	0,0776	0,0572	0,8652
25	0,0409	0,0309	0,9282
30	0,0216	0,0165	0,9619
35	0,0114	0,0087	0,9799
40	0,0060	0,0046	0,9894
45	0,0032	0,0024	0,9944
50	0,0017	0,0013	0,9970
55	0,0009	0,0007	0,9984
60	0,0005	0,0004	0,9992

Tabela 1 – Vetor de Probabilidadede Estado de cada cinco passos.

Para efeito de ilustração, com 100 passos, teríamos uma probabilidade de Estado 2 de aproximadamente 0,999995. Pode-se também montar um gráfico com a tendência de cada Estado para o primeiro mês:

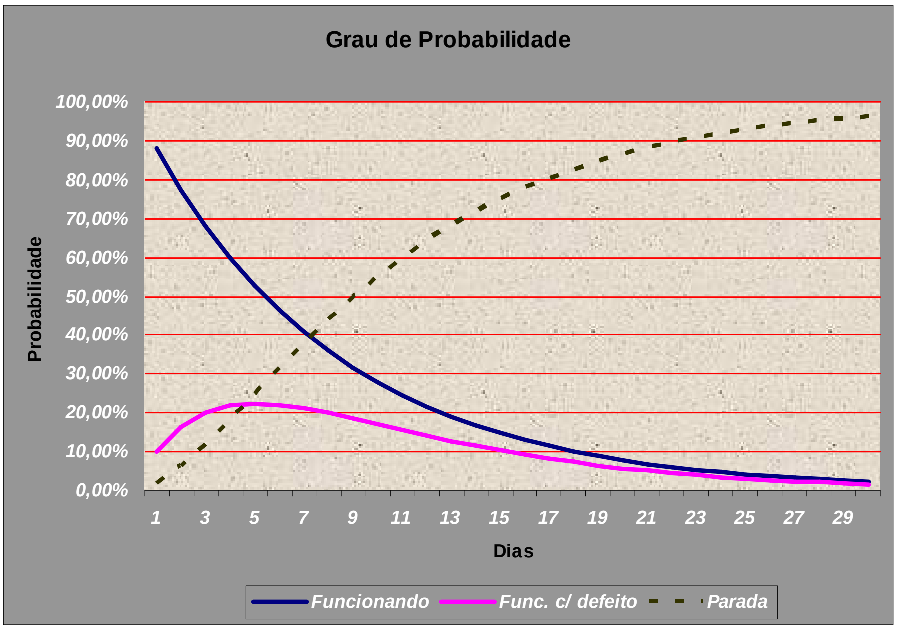

Gráfico 1– Curvas de Probabilidade de acordo com os Estados.

4.8.3 Estimativa de Produção com Cadeias de Markov

Tendo os dados calculados, pode-se estimar a produção a partir do Valor Esperado (E → Esperança). Para tal, deve-se verificar historicamente as condições de produção de acordo com cada estado:

Estado 0 → Máquina funcionando, produção diária 5000 unidades.
Estado 1 → Máquina funcionando com defeito, produção diária 4000 unidades.
Estado 2 → Máquina parada, produção 0.

No primeiro dia a produção estimada seria 5.000 unidades, contando com o vetor de estado inicial $p^{(0)} = [1, \quad 0, \quad 0]$.

Assim, a probabilidade de produção no passo seguinte será:

$$q_{(1)} = (0,88).(5000) + (0,1).(4000) + (0,02).(0) = 4800und$$

Se não houve intervenção no processo, no dia seguinte a produção estimada será:

$$p^{(2)} = [0,7744 \quad 0,163 \quad 0,0626]$$

$$q_{(2)} = (0,7744).(5000) + (0,163).(4000) + (0,0626).(0) = 4524und$$

Assim, a produção estimada até o segundo passo (acumulada), se não houve parada no primeiro será:

$$n = 1 \rightarrow \sum_{i=0}^{n} q_{(i)} = 5000(n) + q_{(n)} = 5000 + 4524 = 9524und$$

Para o próximo dia:

$$p^{(3)} = [0,6815 \quad 0,1997 \quad 0,1188]$$

$$q_{(3)} = (0,6815).(5000) + (0,1997).(4000) + (0,1188).(0) = 4206und$$

$$n = 2 \rightarrow \sum_{i=0}^{n} q_{(i)} = 5000(n) + q_{(n)} = 5000(2) + 4206 = 14206und$$

O gráfico fornece a estimativa de produção para 30 dias:

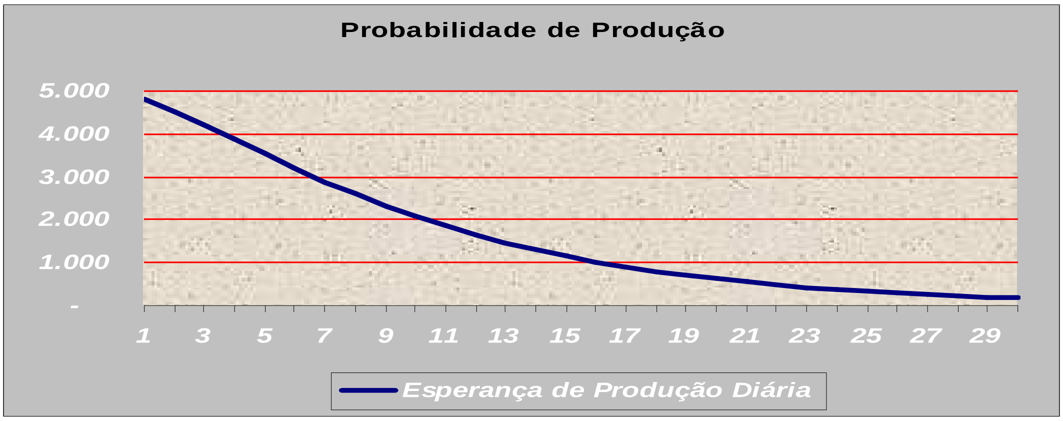

Gráfico 2 – Esperança de Produção Diária.

4.8.4 Estimativa de Custos de Manutenção com Cadeias de Markov

É interessante para a empresa que, estando a máquina no Estado 1 ela seja reparada imediatamente evitando uma parada maior. De acordo com o Estado, a máquina vem apresentando os seguintes valores históricos de Custo:

Custo de Manutenção em relação aos Estados

Estado	Custo de Manutenção
0	R$ 0,00
1	R$ 500,00
2	R$ 3.000,00

Tabela 2– Custo de Manutenção em relação aos Estados.

Uma vez consertada, a máquina passa a ter a seguinte matriz de probabilidades:

$$P = \begin{bmatrix} 0,88 & 0,10 & 0,02 \\ 0,00 & 0,75 & 0,25 \\ 1,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Matriz 8 – Matriz resultante de uma manutenção efetuada.

Observa-se que na última linha, a probabilidade de funcionamento passa a ser 1,0 e executando a política de manutenção prévia, tem-se uma variável (φ) que irá montar o sistema de equações:

$$\varphi_0 = 0,88\varphi_0 + 0,00\varphi_1 + 1,00\varphi_2$$

$\varphi_1 = 0{,}10\varphi_0 + 0{,}75\varphi_1 + 0{,}00\varphi_2$

$\varphi_2 = 0{,}02\varphi_0 + 0{,}25\varphi_1 + 0{,}00\varphi_2$

$\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = 1$ **(37)**

Resolvendo o sistema, tem-se:

$[\varphi_0 = 0{,}657895 \quad \varphi_1 = 0{,}263158 \quad \varphi_3 = 0{,}078947]$

Prova da Resolução:

$\varphi_0 = 0{,}88\varphi_0 + 0{,}00\varphi_1 + 1{,}00\varphi_2 \therefore 0{,}12\varphi_0 = \varphi_2$ **(37.1)**

Se : $\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 = 1$, substituindo por **(37.1)**

$\varphi_0 + \varphi_1 + 0{,}12\varphi_0 = 1 \therefore 1{,}12\varphi_0 = 1 - \varphi_1$ **(37.2)**

Onde: $\varphi_1 = 0{,}10\varphi_0 + 0{,}75\varphi_1 + 0{,}00\varphi_3 \rightarrow 0{,}25\varphi_1 = 0{,}1\varphi_0$ **(37.3)**

Resolvendo **(37.2)** em **(37.3)**:

$\varphi_0 = (1-\varphi_1)/1{,}12 \therefore 0{,}25\varphi_1 = (0{,}1).((1-\varphi_1)/1{,}12) \therefore$

$0{,}28\varphi_1 = 0{,}1 - 0{,}1\varphi_1 \therefore \varphi_1 = 0{,}263158$ **(37.4)**

Resolvendo (19.4) em (19.3):

$0{,}25\varphi_1 = 0{,}1\varphi_0 \therefore \varphi_0 = (0{,}25).(0{,}263158)/(0{,}1) \therefore \varphi_0 = 0{,}657895$ **(37.5)**

Resolvendo **(37.5)** em **(37.1)**:

$0{,}12\varphi_0 = \varphi_2 \therefore \varphi_2 = (0{,}657895).(0{,}12) = 0{,}078947$

Utilizando-a , tem-se o Custo médio de Manutenção:

$\overline{C}_{Mnt} = 0{,}657895.(R\$0{,}00) + 0{,}263158.(R500{,}00) + 0{,}078947.(R\$3.000{,}00) \therefore$

$\overline{C}_{Mnt} = R\$368{,}42$

Assim, tem-se um Custo Médio estimado de R$368,42 ao dia.

A parte mais difícil do Modelo é a estimativa de probabilidades e a necessidade permanente de reavaliação, visando à correção destas probabilidades. Com a utilização de Planilhas Gráficas, como o MS Excel, ou softwares de computação matemática, como por exemplo o MatLab, estas correções de estimativas tornam-se mais fáceis.

Mesmo com o erro probabilístico inserido, nota-se um certo grau de previsibilidade baseado em dados reais, em relação às suas ocorrências.

4.8.5 Aplicação de Matrizes com sistemas lineares

Um Sistema Linear é um conjunto de Equações Lineares (de 1º grau), onde tem a forma:

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots + a_nx_n = b$ **(38)**

Assim, $a_1; a_2; a_3; a_4 \ldots a_n$, são números reais que recebem o nome de *coeficientes das incógnitas* $x_1; x_2; x_3; x_4 \ldots x_n$ e *b* é o *termo independente* (GENTIL, 1997 : p. 202).

Um exemplo em Custos de Fabricação seria: $x_1; x_2; x_3; x_4 \ldots x_n$, sendo diferentes produtos fabricados, $a_1; a_2; a_3; a_4 \ldots a_n$, o Custo de cada produto e *b* seria o Custo total.

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares, tal que:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + & a_{12}x_{12} + & \ldots + & a_{1n}x_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_{21} + & a_{22}x_{22} + & \ldots + & a_{2n}x_{21} = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + & a_{m2}x_{m2} + & \ldots + & a_{mn}x_{mn} = b_m \end{bmatrix} \qquad \textbf{(39)}$$

A resolução de um sistema linear se dá pela *Regra de Cramer*, onde:

$x_i = (D_{x_i})/(D), \forall i \in \{1,2,3,...n\} \mid D = det\ A$ **(40)**

Onde *D* é o determinante da matriz incompleta (sem os termos independentes) e D_{xi} é o determinante obtido através da substituição de coluna i pelos termos independentes.

Uma aplicação da resolução de Cramer pode ser descrita em finanças, com o seguinte problema: um investidor deposita $1.000,00 que foi dividido em duas partes (não necessariamente iguais), sendo uma aplicada a 1,0%a.m. e outra a 1,5%a.b. rendendo $106,76 de juros, durante 1 ano. Anualizando as taxas, tem-se

$$i_1 = 1{,}0\% a.m. \therefore (1 + i_{a.m.})^{12} = (1 + i_{a.a.}) \therefore (1{,}01)^{12} = (1 + i_{a.a.})$$
$$(1 + i_{a.a.}) = 1{,}1268 \therefore i_{a.a.} = i_1 = 12{,}68\% a.a. \quad \textbf{(41)}$$

Aplicando a mesma equação em i_2, tem-se

$$i_2 = 9{,}34\% a.a.$$

Os juros serão apurados multiplicando a taxa pelos valores aplicados (p_1 e p_2 , que somados totalizam $1.000,00).

$$\begin{bmatrix} 0{,}1268\,p_1 + 0{,}0934\,p_2 = \$106{,}76 \\ p_1 + \quad p_2 = \quad \$1.000{,}00 \end{bmatrix}$$

O Sistema gera as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0{,}1268 & 0{,}0934 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \therefore D = -0{,}0934 + 0{,}1268 = 0{,}0334$$

Aplicando a Regra de Cramer, tem-se para o determinante de p_1:

$$\begin{bmatrix} 106{,}76 & 0{,}0934 \\ 1.000{,}00 & 1 \end{bmatrix} \therefore D_1 = -93{,}4 + 106{,}76 = 13{,}36$$

Para o determinante p_2:

$$\begin{bmatrix} 0{,}1268 & 106{,}76 \\ 1 & 1.000{,}00 \end{bmatrix} \therefore D_2 = -106{,}76 + 126{,}8 = 20{,}04$$

Para p_1 e p_2 :

$$p_1 = D_1 / D = 13{,}36 / 0{,}0334 = 400{,}00$$
$$p_2 = D_2 / D = 20{,}04 / 0{,}0334 = 600{,}00$$

Ou seja, cada parte aplicada foi de $400,00 e $600,00, totalizando $1.000,00.

Com estas demonstrações, observa-se a aplicabilidade dos conceitos de matrizes na Contabilidade.

4.8.6 Considerações sobre os modelos apresentados

A apresentação dos modelos neste capítulo não teve por pretensão abordar todas as capacidades de abrangência da Matemática devido ao seu conteúdo extremamente vasto. Nele houve uma contribuição com alguns modelos, através difusão da Matemática, dentro do universo Contábil. Matemática esta que, através da pesquisa e da difusão, pode ser abordada de forma mais profunda e aplicada na Graduduação, servindo como uma das forças propulsoras na profissão de Contador.

5. CONCLUSÕES

A Contabilidade, como processadora de dados referentes ao patrimônio das empresas, é quem tem a visão geral e específica do comportamento dos dados, influências internas e externas, que poderá gerar lucros ou perdas para a entidade.

É importante entender que a Contabilidade necessita tanto da Matemática Pura quanto da Matemática Aplicada, pois é através dos conceitos desenvolvidos pela Matemática Pura, que pode ter sentido a parte do mundo prático do Contador.

É importante ainda que quem manipula estes modelos tenha conhecimentos profundos de sua abrangência, onde são válidos os resultados, quais as variáveis de decisão e toda a teoria empregada para que as informações sejam confiáveis e avaliem, dentro das margens de erro definidas as vantagens e riscos de determinadas ações. Assim, podemos entender o quão importante é o estudo da Matemática para o profissional da área contábil. Somente dominando com profundidade a teoria e a sua aplicação no universo contábil é que seu estudo poderá propiciar uma gerência de dados processados com o rigor que o assunto exige, gerando processos contábeis melhores e mais eficientes para aplicação direta em empresas públicas ou privadas com o intuito de ser um facilitador do desenvolvimento que as empresas de primeiro mundo alcançam, colaborando para o desenvolvimento da nação.

A necessidade de revisão do ensino da Matemática é imediata. Os baixos índices em exames refletem uma realidade provavelmente omitida, onde uma avaliação fora dos padrões pode conduzir o aluno ao pensamento que a matéria foi entendida. Porém, quando existe uma necessidade maior de demonstrar o conhecimento matemático em concursos ou exames públicos, a maioria destes alunos, que se consideravam bons e tinham resultado acima da média, contribuem para uma estatística decepcionante sobre o aproveitamento matemático.

A capacidade limitada de formação no binômio ensino-aprendizagem em matemática, deve ser também vista como um fator importante, seja pelo despreparo das fases iniciais do ensino ou por despreparo do ensino e do professor de matemática, que muitas vezes transmite ao Graduando em Contabilidade somente a Matemática Pura, sem se importar com a sua aplicação prática

A busca de novos modelos e formas de ensino contábil deve ser uma constante, desenvolvida pela própria classe, buscando agregar valor à profissão e tornar a tomada de decisão menos árdua, estando de posse dos resultados, uma vez que permite o reforço ou abandono de determinadas medidas onde a prática sugere alternativas guiadas somente pela intuição. O controle das variáveis envolvidas é fundamental para haver no resultado uma mensuração correta e real de uma determinada situação.

Vemos no Brasil e grande parte do mundo cenários de falta de planejamento administrativo e econômico, cenários de corrupção e previsões questionáveis, que são revistas a todo o tempo. Muitos destes fatores são oriundos de problemas de informação, seja pela ausência, omissão, falta de qualidade ou uma conjunção destas variáveis, nos quais a classe contábil não pode se eximir e continuar atuando com o papel de mensageiro, ou seja, simplesmente informando o que aconteceu. Este referencial deve passar inclusive pela revisão do *Ensino Pretérito-Contábil*, onde a maioria dos livros, em seus exercícios relata: uma empresa comprou (...), uma linha de produção fabricou (...), seguindo o modelo: registre *a*, sabendo que ocorreu *b*, o que poderia ser substituído por: uma empresa pretende *a*, tendo os fatores *x*, *y* e *z* e cenários possíveis *r*, *s* e *t*.

Durante a pesquisa a dificuldade principal foi encontrar livros contábeis que tratassem de modelagem, assunto muito mais encontrado em livros de Economia e Matemática Aplicada. A própria Contabililometria, que, por definição, deveria tratar o assunto, não vem sendo suficiente para uma possível mudança. Para a pesquisa, foi necessário recorrer a Instituições especializados, bibliotecas de Economia e Institutos de Matemática, como o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA).

A modelagem é, por si só, um ponto vital na mudança do pensar Contábil, quando se deseja ter uma Contabilidade preditiva, ao invés da Contabilidade narrativa de fatos passados. Este estudo de modelagem pode ser aprofundado com a criação de novos modelos, com conteúdo informacional agregado, seja para a melhoria do Ensino do futuro Contador ou para descobrir e revelar novas faces da Informação Contábil.

Vários destes modelos não foram abordados neste estudo por questão da delimitação, mas que são de igual importância os quais sugerimos que sejam abordados em futuras pesquisas, como por exemplo:

a) pesquisa operacional utilizando funções de várias variáveis;
b) funções de preferência do consumidor, para gerar receitas prováveis ou definir investimentos em marketing;
c) derivadas parciais ($\partial x/\partial y$) ou funções de Cobb-Douglas (tipo $f(x,y) = ax^n by^m$) para determinar produtividade, bens ou matérias primas substituíveis;
d) pontos máximos e mínimos de funções para processos de otimização;
e) multiplicadores de Lagrange (tipo $f(x,y,z)=ax+by+cz$, *sujeito a* $x+y+x = 200$) para definir problemas de restrição, seja de espaço para armazenagem, orçamentário ou limite de uso de compostos químicos permitidos por lei;
f) otimização temporal do tipo $f(t) = Ke^{\sqrt{t}}$, para definir ponto ótimo em resultados que dependam de tempo, como o vinho ou um comercial de televisão.
g) utilização do plano cartesiano para analisar uma empresa, através do seu demonstrativo, gerando uma função, que pode ser uma harmônica, em substituição à tradicional análise de balanços.

A resolução de problemas concernentes à profissão deveria ser a tônica do Ensino Matemático na Contabilidade, buscando um paralelo de conteúdo informacional e prático que auxiliasse na formação de Contadores capazes de tomar decisões, tornando-nos agentes de mudança.

Esta pesquisa nos mostrou a falta de estudos relativos à modelagem matemática dos problemas existentes na área contábil, assim como a pouca aplicabilidade dos recursos que a Matemática disponibiliza no desenvolvimento de processos mais eficientes e na resolução de problemas, existindo também uma infinidade de áreas carentes e estagnadas por falta de soluções apropriadas. Assim, concluímos que o Ensino Matemático na Graduação de Ciências Contábeis é incompatível com a realidade atual do mundo dos negócios. A maioria das instituições, oferece a Matemática como uma disciplina isolada nos primeiros períodos da faculdade, onde o aluno ainda não consegue associar os conteúdos Matemáticos à sua realidade profissional. Uma proposta de mudança seria transferi-la para os últimos períodos ou torná-la disponível como disciplina de Matemática Aplicada, onde o aluno já possuiria uma bagagem suficiente para tratar os problemas decisórios e comportamentais das variáveis.

Elementos apresentados neste estudo, como cálculo de matrizes e utilização de probabilidade para sistemas produtivos, cálculo de derivada para funções não lineares, bem como o cálculo da área sob de uma curva tornam-se úteis como base para o entendimento e utilização da Matemática como elemento que agrega valor à informação contábil.

Atendendo à proposta inicial desta pesquisa apresentamos, em capítulos anteriores, alguns Modelos Matemáticos que podem ser utilizados em diferentes problemas afins com a área contábil, visando gerar informações que possibilitem obter soluções que resolvam estes problemas de forma eficiente, com maior grau de precisão, diversas alternativas, novos procedimentos e possibilidade de avaliação de riscos, isto é, soluções flexíveis que acompanhem a velocidade atual das transações e transições, tanto em qualidade quanto volume, inseridas no mercado altamente competitivo.

A partir destes dados nos foi possível avaliar o grau de importância do domínio da Matemática para os profissionais que visam o aprimoramento deste ramo do conhecimento. Apesar de toda esta importância, durante o nosso levantamento de dados, poucas pesquisas encontramos nesta área no Brasil, o que mostra quão pouco está se realizando neste setor, apontando para a necessidade de melhoria na base de conhecimento da teoria e aplicabilidade da Matemática em cursos voltados para a Contabilidade.

Mudar o cenário atual é requisito básico para o reconhecimento da importância dos procedimentos contábeis para o desenvolvimento do país.

BILBIOGRAFIA

ACKOFF, Russel L., SASIENI, Maurice W. **Pesquisa Operacional.** Coleção Universitária de Administração, São Paulo: Editora Livros Técnicos e Científicos. 1971.

BERNARDO, Elsa Maria da Cruz. **Processos Markovianos de Decisão.** Disponível em <http://www.terravista.pt/Meco/6358/>, acessado em 14 jul 2003.

BREIMAN, Leo. **Probability and stochastic processes: with a view toward applications.** Boston: Houghton Mifflin, 1969.

CLARKE, A. Bruce; DISNEY, Ralph. **Probabilidade e Processos Estocásticos.** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora. 1979.

JIANG, Qiyuan, WANG, Quanyong. **Two new Models and an Algorithm for Stochastic Lot-Sizing Problems.** International Abstract in Operation Research. Reino Unido: Vol. 53, Dez/2002.

SHIMAKURA Silvia Emiko, **Inferência Estatística.** Universidade Federal do Paraná. Disponível em <http://www.est.ufpr.br/~silvia/CE003/node26.html>. Acessado em 23 ago 2003.

ZHANG, Y.L. **Optimal Replacement Policy for a Deteriorating Production System with Preventive Maintenance.** INTERNATIONAL ABSTRACT IN OPERATION RESEARCH. Estados Unidos. Reino Unido: Vol 53, Dez/2002.