



SPOLM 2009

ISSN 2175-6295

Rio de Janeiro- Brasil, 05 e 06 de agosto de 2009.

085/2009 - MONITORAMENTO DE VARIÁVEIS DO ELETRODO DE CARBONO VIA GRÁFICO DE CONTROLE DE REGRESSÃO FUNCIONAL

Marcello Neiva de Mello

Universidade Federal do Pará
Rua Augusto Corrêa, 01 - Guamá
neivamarcello@gmail.com

Priscila Alcantara Figueira

Universidade Federal do Pará
Rua Augusto Corrêa, 01 - Guamá
pit-alcantara@gmail.com

Edson Marcos Leal Soares Ramos

Universidade Federal do Pará
Rua Augusto Corrêa, 01 - Guamá
edson@ufpa.br

Silvia dos Santos de Almeida

Universidade Federal do Pará
Rua Augusto Corrêa, 01 - Guamá
salmeida@ufpa.br

Rodrigo Valente Torres

Universidade Federal do Pará
Rua Augusto Corrêa, 01 - Guamá
rodrigo174@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem como objetivo monitorar características da qualidade de eletrodos de carbono, passíveis a erros de medida, mas especificamente Resistividade Elétrica e Resistência a Flexão, via gráfico de controle de regressão funcional. Para tanto, inicialmente, aplicam-se as técnicas estatísticas: Controle Estatístico da Qualidade e Análise de Regressão, às variáveis. Após a validação, a partir da análise de resíduos, do modelo de regressão para Resistividade Elétrica, constrói-se o gráfico de controle de regressão funcional. Além disso, a análise do gráfico, pode-se observar que todos os pontos amostrais da característica da qualidade monitorada encontram-se entre os limites de controle, isto é, os eletrodos produzidos apresentam-se dentro dos padrões exigidos pelo processo de produção de

alumínio. Além disso, pontos amostrais acima ou abaixo dos limites de controle (superior e inferior) indicam a ocorrência de problemas graves no processo de produção de alumínio.

Palavras-Chaves: Gráfico de Controle de Regressão Funcional; Eletrodo de Carbono; Controle Estatístico da Qualidade.

Abstract

This paper has as an objective to monitor some characteristics of quality from the carbon electrode, subject to errors of measurement but specifically the Electrical Resistivity and the Flexion Resistivity, via functional regression control chart. So, initially it is applied some statistical techniques: Statistical Quality Control and Regression Analysis to variables. Just after the validation, from the analysis of the residues of the regression model to the Electrical Resistivity it is constructed functional regression control chart. Besides the analysis of the chart it can be observed that all the sample points of the characteristic of the quality monitored it is found among the control limits, that is, the electrodes produced present themselves in the standard demanded by the production process of aluminum. Besides, sample points up or down of the upper control limits and lower control limits indicate the occurrence of serious problems in the production process of aluminum.

Keywords: Functional Regression Control Chart; Carbon Electrode; Statistical Quality Control.

1. INTRODUÇÃO

A constantemente busca por formas de melhoria de produtos, processos e serviços de modo a atender as necessidades dos clientes e às expectativas dos investidores, faz com que a qualidade dos produtos, processo e serviços seja vista como um fator fundamental para garantir a competitividade dentro da dinâmica dos mercados, reduzindo desperdícios e utilizando a capacidade total dos recursos. Logo, a melhoria contínua e o aperfeiçoamento dos processos são utilizados visando estabelecer um relacionamento de confiança e credibilidade com todas as partes interessadas, ou seja, consumidores, fornecedores, investidores, sociedade e meio ambiente.

Um dos métodos que vem sendo, nos últimos tempos, bastante explorado pelo setor industrial é o controle estatístico da qualidade (CEQ). Seu início, deu-se a partir da necessidade de redução da variabilidade nos processos e produtos. O pioneiro neste processo foi Walter A. Shewhart que em 1924 desenvolveu o conceito de gráfico de controle. Apesar do início dentro das indústrias, o CEQ rapidamente foi difundido nas diversas áreas do conhecimento humano. O aprimoramento contínuo da técnica proporcionou o surgimento de diversas ferramentas e análise e investigação da qualidade.

Almeida (2003) a partir da combinação das técnicas estatísticas de análise de regressão com erro nas variáveis, mais especificamente de análise de regressão funcional, combinada com a metodologia de gráficos de controle, desenvolveu uma ferramenta denominada gráfico de controle de regressão funcional. Porém, devido a sua recente descoberta o gráfico de

controle de regressão funcional é pouco conhecido e, conseqüentemente, existem raras aplicações deste na literatura especializada. Neste sentido, este trabalho visa construir e analisar o desempenho de gráficos de controle de regressão funcional em alguns processos oriundos de medições, mostrando os benefícios da utilização desta poderosa ferramenta estatística no controle e avaliação destes processos.

2. METODOLOGIA

2.1. GRÁFICO DE CONTROLE

Desde sua introdução por Shewhart, os gráficos de controle têm sido a ferramenta do controle estatístico da qualidade mais utilizada para monitorar e manter o controle estatístico dos processos. Gráficos de controle são aplicados para distinguir num processo as variações que não podem ser economicamente identificadas e corrigidas (causas aleatórias), daquelas que podem ser (causas assinaláveis).

Para Montgomery (2004) o gráfico de controle é uma técnica para monitoramento do processo de produção, no qual se identifica quando esse processo deve ser investigado, mais precisamente se o processo é capaz de operar com pequena variabilidade em torno da característica de qualidade do produto.

Para Ribeiro (2007), o gráfico de controle consiste em linha central (LC), que reflete o valor médio da característica da qualidade que corresponde ao processo sob controle estatístico. Seu valor pode ser definido por lei, um padrão ou até mesmo um valor baseado em experiências anteriores do processo e duas outras linhas horizontais denominadas de Limite Superior de Controle (LSC) e Limite Inferior de Controle (LIC). Estas linhas têm o propósito de decidir se o processo está sob controle estatístico ou se há ocorrência de distúrbios. O processo só apresenta controle estatístico quando os pontos estão situados dentro dos limites (superior e inferior) de controle e as causas de fatores especiais, são eliminadas. Os gráficos de controle podem ser usados também para estimar os parâmetros de um processo de produção, determinando assim, a capacidade do processo.

2.2. MODELO DE REGRESSÃO FUNCIONAL

Fuller (1987) mostra que o modelo funcional admite os U_i 's, parâmetros incidentais, como constantes, assim eles crescem junto com o tamanho da amostra. Os demais parâmetros da amostra são denominados de estruturais. Admiti-se $n+4$ parâmetros ao todo neste modelo, sendo eles α , β , σ_ε^2 , σ_δ^2 e U_i , com $i = 1, \dots, n$.

Considerando a suposição adicional de normalidade, o logaritmo (l) da correspondente função de verossimilhança e utilizando a notação de Kendall e Stuart (1979) tem-se,

$$-\frac{2}{n}l = \log \sigma_\delta^2 + \log \sigma_\varepsilon^2 + \frac{S_1}{\sigma_\delta^2} + \frac{S_2}{\sigma_\varepsilon^2},$$

onde
$$S_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - U_i)^2 \text{ e } S_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - (\alpha + \beta U_i))^2.$$

Solari (1969) mostra que a estimação por verossimilhança só será possível se forem feitas suposições adicionais aos parâmetros. As suposições mais comuns adotadas para

contornar o problema de estimação no modelo funcional são: (i) σ_ε^2 ou σ_δ^2 conhecido; (ii) σ_ε^2 e σ_δ^2 conhecidos; (iii) a razão $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\delta^2}$ conhecida ou (iv) o α conhecido.

2.3. GRÁFICO DE CONTROLE DE REGRESSÃO FUNCIONAL

O gráfico de controle de regressão funcional consiste na combinação de duas técnicas estatísticas, o modelo de regressão funcional e gráfico de controle de regressão. O gráfico de controle de regressão foi proposto por DiPaola (1945) e consiste em monitorar duas variáveis simultaneamente, no qual a característica de qualidade é representada por uma reta inclinada e os limites de controle paralelos a essa reta,

2.3.1. Passos Para Construção do Gráfico de Controle de Regressão Funcional

Sejam X e Y variáveis passíveis a erros de medição, logo o modelo de regressão funcional é dado por,

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}U_i + \varepsilon_i, \quad (1)$$

onde $U_i = X_i - \delta_i$ e $i = 1, \dots, n$. Comumente, os parâmetros α , β e U_i são estimados a partir do método dos mínimos quadrados, por

$$\hat{U}_i = \frac{\sigma_\delta^2 \beta (Y_i - \hat{\alpha}) + \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\hat{\beta} \sigma_\delta^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2},$$

$$\text{Onde} \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i; \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; \quad S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y});$$

$$S_{xx} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2; \quad S_{yy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2; \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = S_{yy} - \hat{\beta} S_{xy}.$$

Os erros de medição (ε_i , δ_i) seguem distribuição normal com médias zero e variâncias constantes σ_ε^2 e σ_δ^2 , respectivamente. Assim, LSC, LIC e LC são obtidos, respectivamente, por

$$LSC = \hat{Y}_i + k\hat{\sigma}$$

$$LIC = \hat{Y}_i - k\hat{\sigma}$$

e

$$LC = \hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\hat{U}_i,$$

onde a estimativa de σ é obtida por

$$\hat{\sigma} = \hat{E}P(Y) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y} - (X_i - \bar{X})\hat{\beta})^2}{n-2}}$$

2.4. BLOCO DE ANODO

O Eletrodo de Anodo, ou Eletrodo de Carbono, faz parte do processo de obtenção do alumínio líquido em empresas metalúrgicas. Este eletrodo é constituído basicamente de coque e piche, produtos oriundos do petróleo e carvão mineral, respectivamente. Para a obtenção do alumínio, na sua forma mais pura, os eletrodos de anodo são dispostos em fornos, denominados de cuba eletrolítica, os quais são sustentados em hastes de ferro, onde ficam em contato com um banho contendo criolita (Na_3AlF_6) e sais fundidos de fluoreto no qual encontra-se dissolvida a alumina (Al_2O_3).

Se houver uma passagem deficiente de corrente, o eletrodo não será consumido, pois não haverá a separação das moléculas, logo o processo se mostra deficiente, pois não se está produzindo adequadamente o alumínio. Neste sentido o monitoramento de variáveis ligadas ao Bloco de Anodo se mostra extremamente importante para o controle da produção.

As variáveis em estudo são: Resistividade Elétrica, que é uma medida da oposição de um material ao fluxo de corrente elétrica e Resistência à Flexão que visa determinar qual a tensão que provoca a ruptura do material, quando submetido a esforços.

3. RESULTADOS E APLICAÇÕES

Consideram-se as variáveis resistividade elétrica (Y) e resistência à flexão (X), do bloco de anodo, resultantes de medições de 79 amostras, passíveis a erros de medição. A partir de uma análise preliminar pode-se verificar a ocorrência de 3 valores discrepantes, ou seja, muito diferentes na amostra. Uma análise mais cuidadosa nessas 3 amostras evidenciou a presença de rachaduras em seus interiores. Assim, estas 3 amostras foram retiradas para não influenciar negativamente no processo de modelagem das variáveis em estudo.

A aparente relação linear entre as variáveis está representada no diagrama de dispersão, como mostra a Figura 1. A partir coeficiente de Pearson, pode-se verificar e quantificar esta correlação, a qual apresentou -0,72, ou seja, uma moderada correlação negativa.

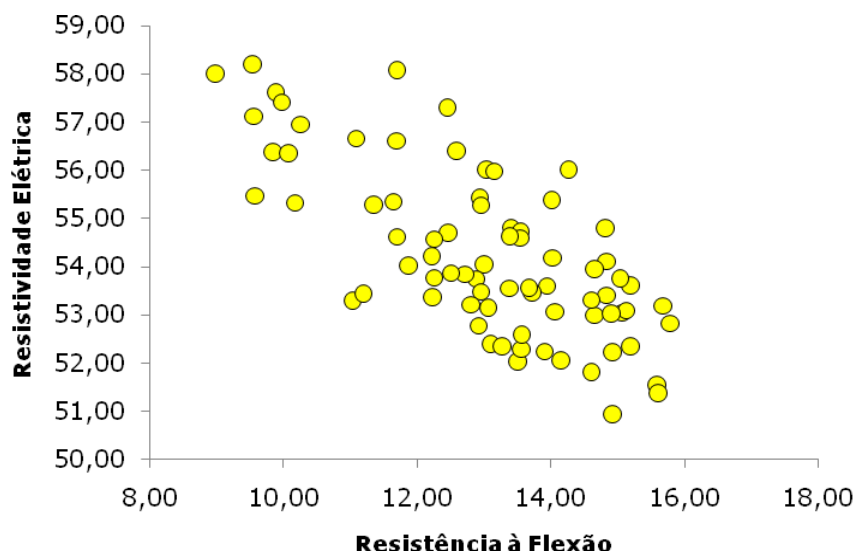


Figura 1. Diagrama de Dispersão Para as Variáveis: Resistividade Elétrica e Resistência à Flexão.

Como a variável resistência à flexão (X) é oriunda de processos de medição, logo passível a erros, aplica-se o modelo de regressão funcional, dado em (1). Admiti-se, a partir do teste de normalidade, que a variável Y segue distribuição Normal. Assim, a partir dos estimadores de α e β , pode-se construir o modelo para estimar o valor da resistividade elétrica, assim o modelo obtido é expresso por

$$\hat{Y}_i = 82,98 - 2,207U_i \quad (2)$$

Para aplicação deste modelo é necessário validá-lo. Esta ação é possível a partir da análise de resíduos, na qual verifica-se as suposições de normalidade, independência e variância constante dos resíduos.

As hipóteses agora são: H_0 : Os resíduos seguem distribuição Normal *versus* H_1 : Os resíduos não seguem distribuição Normal. A Figura 2 apresenta o gráfico de normalidade para os resíduos das variáveis: resistência à flexão e resistividade elétrica, obtidos a partir do Modelo (2) para Resistência à Flexão dos Eletrodos de Carbono, no Mês de Fevereiro de 2009. Pode-se verificar que os resíduos seguem distribuição Normal, com nível descritivo (p -value) $> 0,05$, ou seja, não rejeita-se H_0 .

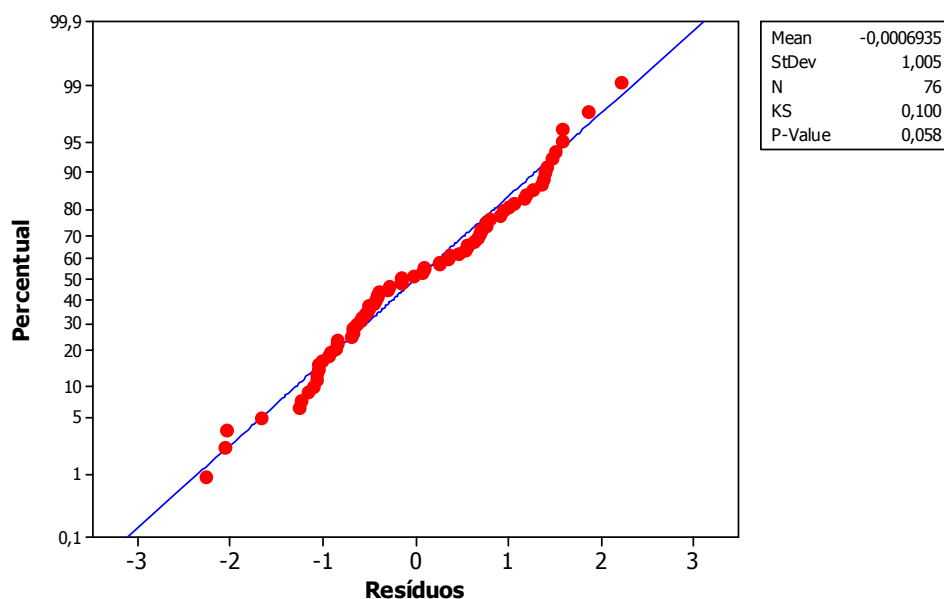


Figura 2. Gráfico da Normalidade dos Resíduos das Variáveis: Resistência à Flexão e Resistividade Elétrica do Bloco de Carbono, no Mês de Fevereiro de 2009.

A Figura 3 apresenta o gráfico dos resíduos padronizados *versus* as observações ordenadas, obtidos a partir do Modelo (2) para Resistência à Flexão dos Eletrodos de Carbono, no mês de fevereiro de 2009. Pode-se verificar que os resíduos apresentam aleatoriedade em torno do zero, admitindo-se então que eles são independentes.

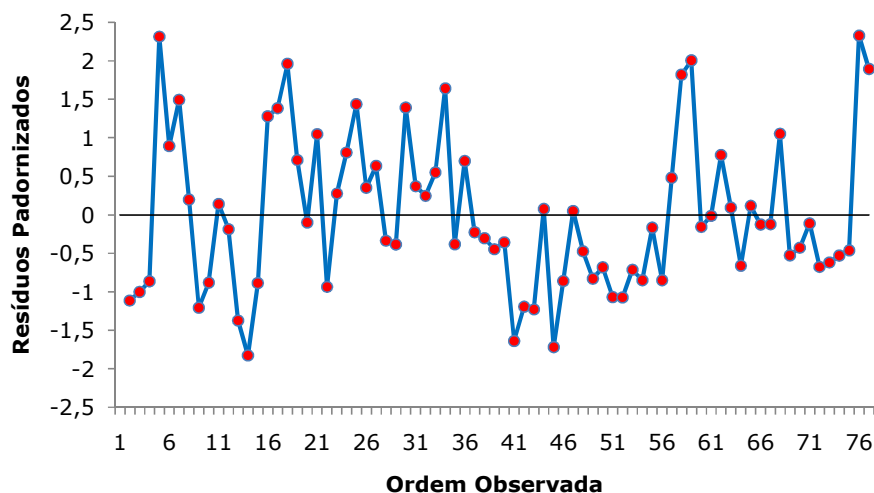


Figura 3. Gráfico dos Resíduos Padronizados *versus* as Observações Ordenadas, Obtidos a Partir do Modelo (2) para Resistência à Flexão dos Eletrodos de Carbono, no Mês de Fevereiro de 2009.

A Figura 4 apresenta o gráfico de resíduos padronizados *versus* os valores ajustados, obtidos a partir do Modelo (2) para Resistência à Flexão dos Eletrodos de Carbono, no mês de fevereiro de 2009. Pode-se observar que o pressuposto de homocedasticidade é válido, pois eles não formam nem um tipo de figura ou seguem alguma tendência, mostrando-se aleatórios.

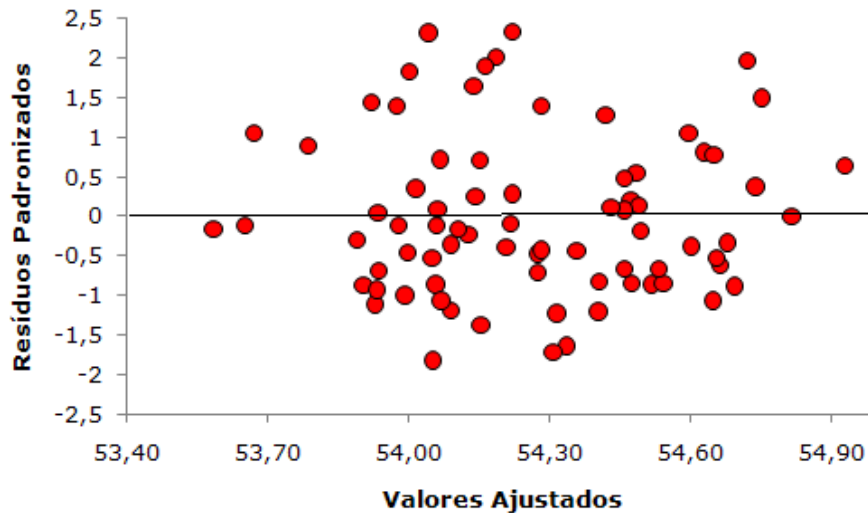


Figura 4. Gráfico dos Resíduos Padronizados *versus* os Valores Ajustados, Obtidos a Partir do Modelo (2) para Resistência à Flexão dos Eletrodos de Carbono, no Mês de Fevereiro de 2009.

Atendido os pressupostos necessários a modelagem via Análise de Regressão, o modelo (2) é considerado adequado para prever novos valores da variável resistividade elétrica em função da variável resistência à flexão.

Fixa-se a variância relacionada ao erro, contido na variável independente, igual a 2, pois este valor é proveniente do conhecimento de processos passados. Deste modo é possível a construção do gráfico de controle de regressão funcional. A linha central e os limites de controle são obtidos por,

$$LC = \hat{Y}_i = 82,98 - 2,207U_i,$$

e

$$LSC = \hat{Y}_i + 1,5 * 2,84;$$

$$LIC = \hat{Y}_i - 1,5 * 2,84$$

A Figura 11 apresenta o gráfico de controle de regressão funcional para as variáveis: resistividade elétrica e resistência à flexão do eletrodo de carbono, no mês de fevereiro de 2009, com $k = 1,5$. Nela observa-se que todos os pontos encontram-se dentro dos limites de controle, isto implica que o processo está sob controle estatístico.

No caso tem-se que, se um ponto amostral estiver entre os limites de controle o processo apresenta controle estatístico, caso uma amostra ultrapasse tais limites de controle, o processo deve ser investigado. Na prática, caso a amostra ultrapasse o limite superior de controle, o valor da resistividade elétrica estará alto, logo dificultará a passagem de corrente não havendo o aumento da temperatura dos fornos, e conseqüentemente, o processo não está produzindo alumínio, causando prejuízos a empresa. Se um ponto amostral ficar abaixo do limite inferior de controle, o valor da resistividade elétrica estará baixo, havendo o aumento na passagem de corrente elétrica pelo eletrodo de carbono, que propicia o aumento na geração de calor, ocasionando aumento do consumo do eletrodo, pois este acaba reagindo mais facilmente com o oxigênio do ar, e conseqüentemente, poderá ocasionar contaminação do alumínio, pelo consumo dos pinos de ferro que sustentam o eletrodo.

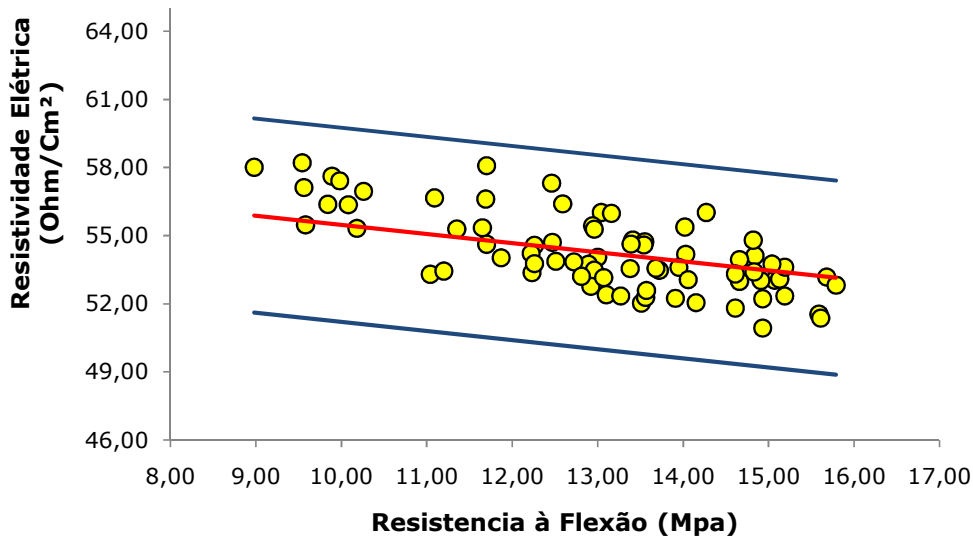


Figura 11: Gráfico de Controle de Regressão Funcional das Variáveis Resistência Elétrica e Resistência à Flexão, com $\sigma^2_{\delta} = 2$ Mpa, do Bloco de Carbono, no Mês de Fevereiro de 2009, com $k = 1,5$.

4. CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo monitorar variáveis oriundas do eletrodo de carbono via gráfico de controle de regressão funcional. A partir do gráfico de controle de regressão funcional, para as variáveis: resistividade elétrica e resistência à flexão do eletrodo de anodo, utilizando um rigor de 1,5 ($k = 1,5$), observou-se que todos os pontos encontram-se dentro dos limites de controle, isto implica que mesmo o eletrodo de anodo sendo sensíveis ao desgaste no decorrer do tempo, o processo está sob controle estatístico, e ainda o diagnóstico do modelo proposto por esta técnica contempla todos os pressupostos da análise de resíduos, na qual verifica-se as suposições de normalidade, independência e variância constante dos resíduos, validando assim o modelo funcional proposto.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALMEIDA, S.S. Desenvolvimento de Gráficos de Controle Aplicados ao Modelo Funcional de Regressão. 2003. 166 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis - SC
- [2] DIPAOLA, P. P. Use of Correlation in Quality Control. *Industrial Quality Control*, v. 2, n. 1, July, p. 10-14, 1945.
- [3] FULLER, W. A. *Measurement Error Models*, JOHN WILEY, New York, 1987.
- [4] KENDALL, M. G. e STUART, A. *The Advanced Theory of Statistics*, v.1, 2.ed., London: GRIFFIN, 1979.
- [5] MONTGOMERY, D.C. Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade, Rio de Janeiro: LTC, 2004. 502 p..
- [6] RIBEIRO, Jaciane do C. Curvas Características de Operação (CCO) para Gráficos de Controle Utilizando o Estimador Baseado nos Quartis Amostrais para Estimar o Desvio Padrão. 2007. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Bacharelado em Estatística), UFPA, Belém - PA, Brasil.
- [7] SOLARI, M. E. The maximum likelihood solution to the problem of estimating a linear functional relationship, *Journal Royal Statistical Society* , B, v.31, p. 372-375, 1969.