SPOLM 2007

ISSN 2175-6295 Rio de Janeiro- Brasil, 08 e 09 novembro de 2007.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DE MISTURAS ATRAVÉS DE MODELOS PROBABILISTICOS

Anvar M. Araslanov

Universidade Federal Technica de Kazan, Russia

e-mail: anvar2@fpp.kstu-kai.ru

Nailya G. Bagautdinova

Universidade Federal Technica de Kazan, Russia

e-mail: anvar2@fpp.kstu-kai.ru

Maria Emilia Camargo

Universidade de Caxias do Sul

e-mail: kamargo@terra.com.br

Resumo

A formulação usual do problema da otimização das misturas supõem que todos os coeficientes da função de objetivo e das restrições são determinísticos, é reduzida a um problema da programação linear. Mas em situações reais todos estes coeficientes são casuais. Por isso, neste trabalho foi proposto a formulação probabilística do problema da criação das misturas ótimas de rações onde são consideradas as casualidade. Neste caso, pela medida da realização das limitações considerou-se que a probabilidade de ocorrência do evento representa que todas as realizações possíveis dos valores do parâmetro da limitação estão dentro da região dos valores admissíveis. Para diferentes combinações das leis de distribuição foram obtidas as equações destas medidas. Elas são suficientemente não lineares. Foi apresentado o caso da produção de misturas para ração alimentar.

Palavras-Chaves: Otimização; Misturas; Métodos probabilísticos**.**

Abstract

Solving a great number of problems we have to create multicomponent mixtures. Sometimes there is a necessity in optimizing ingredients of this mixtures. The usual optimizing mixtures problems formulation speculates that all indexes under variables in objective function and restrictions are deterministic and lead to the problem of linear programming. But in real practice all these indexes are of accidental character (specific). In this research a probable scenario of creating optimal mixtures is represented. In this case probability of case substitutes the measure of implementation limitation. It is shown by the fact, that all possible implementations are inside acceptable region. For various laws of probability distribution we have got equations, which are significantly nonlinear. We have analyzed the examples of quantity calculations of optimal mixture composition and the analysis of different statistic characteristics influence upon the results of calculation.

Keywords: Optimization; Mixtures; Probability Models.

1. INTRODUÇÃO

A formulação usual do problema de otimização de misturas, supondo que todos os coeficientes da função objetivo e das restrições são determinísticos, é reduzida a um problema de Programação Linear [3,4,5,6,7].

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \max(\min, const)$$

$$V_i = \sum_{j-1}^{n} a_{ij} x_j \le V_i^*$$

$$d_j \le x_j \le D_j$$

$$i = \overline{1, m} \quad ; \quad j = \overline{1, n}.$$

Mas, na prática, todos estes coeficientes têm o caráter casual. Neste trabalho, apresenta-se uma formulação probabilística para o problema da criação das misturas ótimas de rações, considerando as casualidades dos coeficientes. Neste caso, por medida da realização das restrições, entende-se a probabilidade de ocorrência do evento, que consiste em todas as realizações possíveis dos valores dos parâmetros das restrições que estão dentro da região dos valores admissíveis.

M-formulação

$$M[F] \Rightarrow \max(\min)$$

$$H_i = P[V_i \le V_i^*] \ge H_{dado}$$

$$d_j \le x_j \le D_j$$

$$i = \overline{1, m} \quad ; \quad j = \overline{1, n}.$$

P-formulação

$$H = P[F_{\max(\min)}] \Rightarrow \max$$

$$H_i = P[V_i \le V_i^*] \ge H_{dado}$$

$$d_j \le x_j \le D_j$$

$$i = \overline{1, m} \quad ; \quad j = \overline{1, n}.$$

Este artigo está organizado da seguinte forma: após esta seção introdutória, apresenta-se na seção 2 o desenvolvimento; a terceira seção é dedicada a uma aplicação e, na última, são apresentadas as conclusões.

2. DESENVOLVIMENTO

Para diferentes leis de distribuição, foram obtidas as equações destas medidas [1,2], as quais são suficientemente não lineares, e que estão apresentadas a seguir.

2.1. A DISTRIBUIÇÃO GAMA

Neste caso,

$$F_1(V) = \frac{1}{\alpha!\beta^{\alpha+1}} V^{\alpha} e^{-V/\beta} \tag{1}$$

$$H_{i=} \int_{-\infty}^{V*} f_1(v)dv = \int_{-\infty}^{V*} \frac{1}{\alpha!\beta^{\alpha+1}} V^{\alpha} e^{-V/\beta} = \frac{1}{\alpha!} F_{V*/\beta}(\alpha+1) \tag{2}$$

Onde $F_{V*/\beta}(\alpha+1)$ é a função incompleta de Gama tabulada. Introduzindo a função:

$J\left(\frac{v*}{\beta}, \alpha+1\right) = \frac{1}{\alpha!} F_{v*/\beta}(\alpha+1)$, que pode ser representada através de função da distribuição $\chi^2 - P(2x,2n)$,

$J\left(\frac{v*}{\beta}, \alpha+1\right) = 1 - P\left[\frac{2v*}{\beta}, 2(\alpha+1)\right]$, onde $P\left[\frac{2v*}{\beta}, 2(\alpha+1)\right]$ é tabulada.

O esquema da resolução é a seguinte. Por tabela, para P(2x,2n) para o $(\alpha+1)$ seleciona-se C= $2v*/\beta$ que fornece o valor de 1-H $_{dado}$.

Pode-se considerar que:

$$\frac{2v*}{\beta} \geq C$$

mas considerando-se que na prática a utilização de tabelas especiais para funções tabuladas não é fácil, pode obter-se uma a aproximação para o parâmetro C em dependência de (1-H) que tem a precisão aceitável.

$$C = \nu\left\{1 - \frac{2}{9\nu} + x_p\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right\}$$

onde

$$\nu = 2(\alpha+1) = \frac{2}{A\nu} \qquad A_V = \frac{\sigma_V}{\mu_V}$$

$$X_p = t - \frac{a_0 + a_1 t}{1 + b_1 t + b_2 t^2}, \qquad t = \sqrt{\ln\left[\frac{1}{(1-H_{DADO})^2}\right]}$$

a_0 =2,30753;	b_1 =0,99229;
a_1 =0,2706;	b_2 =0,04481.

Então, para (2) tem-se

$$\frac{V^*}{\mu_V} \geq \left\{1 - \frac{A_V^2}{9} + \frac{A_V . X_p}{3}\right\}^3 \quad \text{ou} \quad \frac{V^*}{\mu_V} - \left(1 - \frac{A_V^2}{9} + \frac{A_V X_p}{3}\right)^3 \geq 0$$

Onde:

μ_V – a esperança matemática de v

$\sigma_V - 0$ desvio padrão de v

No caso,

$$H_i = P(v_i > v^*) = \int_{v^*}^{\infty} f_1(v_i)\,dv_i$$

Que por analogia pode-se obter

$$\frac{V^*}{\mu_V} \le \left\{1 - \frac{A_V^2}{9} + \frac{A_V X_p}{3}\right\}^3 \text{ ou } \qquad \frac{V^*}{\mu_V} - \left(1 - \frac{A_V^2}{9} + \frac{A_V X_p}{3}\right)^3 \le 0$$

onde $t = \sqrt{\lambda n\left[\frac{1}{H_{dado}^2}\right]}$

2.2. DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL

Neste caso,

$$f_1(v) = \frac{\beta}{\alpha}(\nu - \gamma)^{\beta-1} \exp\left[-\frac{(\nu-\gamma)^\beta}{\alpha}\right] \qquad (3)$$

Para H_i tem-se

$$H_i = 1 - \exp\left[-\frac{(\nu^* - \gamma)^\beta}{\alpha}\right]$$

(4)

Considerando-se que

$$\sqrt[\beta]{\alpha} = \frac{\sigma_V}{G^*} \quad \text{e} \qquad \gamma = m_V - \frac{\sigma_V . G}{G^*}$$

onde $G = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$

$G^* = \sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2}$, Γ - a função de Gama

β	1	2	3	4	5
G	1	0,8862	0,8934	0,90640	0,9182
G*	1	0,4637	0,3240	0,2250	0,20976

de $H_i = P(V_i \in V_i^*) = H_{DADO}$, obtém-se

$$1\text{-}\exp\left[-\frac{\left(V^* - m_V + \frac{\sigma_V . G}{G^*}\right)^\beta G^{*\beta}}{\sigma_V^\beta}\right] \ge H_{DADO}$$

Depois das transformações pode-se escrever:

$$\frac{V*}{m_V} \geq \frac{A_V{}^{\beta}\sqrt{-\ln(1-H_{DADO})}-A_V G}{G*}+1$$

Para caso

$$H_i = P\left(V_i > V_i^*\right) = \int_{v*}^{\infty} f_1\left(V_i\right) dV_i$$

analogamente pode-se obter

$$\frac{V*}{m_v} \leq \frac{A_v \sqrt[\beta]{-\ell n\left(H_{DADO}\right)}-A_v G}{G*}+1$$

Considerando os casos particulares:

a) β=1; 1/α=λ (a distribuição exponencial)

Então, pode-se escrever

$$\frac{v*}{m_v} \geq A_v\left[-\ell n\left(1-H_{DADO}\right)\right]-A_v+1$$

ou para o caso $H_i = P\left(V_i > V_i*\right)$

$$\frac{V*}{m_y} \leq Av\left[-\ell n\left(H_{DADO}\right)\right]-A_V+1$$

b) $\beta = 2 \quad \gamma = 0$ **;** $\alpha = 2a^2$ **; (a distribuição de Reglegh)**
;

Pode-se escrever

$$\frac{V*}{m_V} \geq \frac{\sqrt{-2\ell n\left(1-H_{DADO}\right)}}{1,253}$$

ou, para caso $H_i = P\left(V_i > V_i^*\right)$

$$\frac{V*}{m_V} \leq \frac{\sqrt{-2\ell n\left(H_{DADO}\right)}}{1,253}$$

2.3. DISTRIBUIÇÃO DOS VALORES MÁXIMOS

Neste caso:

$$f_1(V) = \frac{1}{\beta}\exp\left\{-\frac{v-\alpha}{\beta}-\exp\left[-\frac{v-\alpha}{\beta}\right]\right\} \tag{5}$$

Usando-se $H_i = \int_{-\infty}^{V_i^*} f_1\left(V_i\right) dV_i = F_1\left(V_i^*\right)$, se $H_i = P\left(V_i \langle V_i^*\right)$
pode-se escrever

$$H_i = \exp\left[-\exp\left(-\frac{v^* - \alpha}{\beta}\right)\right]$$

Considerando que para esta lei da distribuição

$$\beta = \frac{\sigma_v}{1{,}283}; \qquad \alpha = m_v - 0{,}577\beta = m_v - \frac{0{,}577\sigma_v}{1{,}283}$$

de (3) obtém-se

$$\frac{V^*}{m_V} \geq 0{,}779A_V\left[-\ln\left(-\ln H_{DADO}\right)\right] + 1 - 0{,}45A_V$$

para o caso

$$H_i = P\left(V_i > V_i^*\right) \qquad \text{tem-se} \qquad \frac{V^*}{m_V} \leq 0{,}779A_V\left\{-\ln\left[-\ln\left(1 - H_{DADO}\right)\right]\right\} + 1 - 0{,}45A_V$$

2.4. DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Por analogia obtém-se:

$$\frac{V^*}{m_V} \geq 1 + \gamma A_V$$

Onde γ é o argumento da função de Laplace para $H_i = H_{DADO}$

Para caso $H_i = P\left(V_i > V_i^*\right)$ tem-se

$$\frac{V^*}{m_v} \leq 1 - \gamma A_v$$

Analogamente, pode-se obter expressões específicas para outras leis de distribuição.

3. APLICAÇÃO

Seja o processo produtivo representativo da produção de ração alimentar para galinhas. A ração é a mistura de dois componentes (A,B). Cada componente contém uma série ingredientes, parte dos quais são necessários para galinhas e outra são prejudiciais. As características da composição destes ingredientes para 1 kg de cada componente da mistura estão apresentadas no Quadro 1.

QUADRO 1 – Representação da composição dos ingredientes para os componentes das misturas (A,B)

Componentes	Ingredientes das componentes			
da mistura	1	2	3	4
A	$\mu_{A1} = 10$ $\sigma_{A1} = 1$	$\mu_{A2} = 2$ $\sigma_{A2} = 0{,}2$	$\mu_{A3} = 1$ $\sigma_{A3} = 0{,}1$	$\mu_{A4} = 0{,}1$ $\sigma_{A4} = 0{,}01$
B	$\mu_{B1} = 0.1$ $\sigma_{B1} = 0{,}01$	$\mu_{B2} = 5$ $\sigma_{B2} = 0{,}5$	$\mu_{B3} = 6$ $\sigma_{B3} = 0,$	$\mu_{B4} = 2$ $\sigma_{B4} = 0{,}2$

Os ingredientes 3 e 4 são necessários para comida, e ingredientes 1 e 2 são prejudiciais.

Um quilograma de mistura obrigatoriamente com probabilidade H_{DADO}>=0,9, não deve ser menor que:

ingrediente 3 –$R_3 = 3$
ingrediente 4–$R_4 = 0,5$

e não maior que:

ingrediente 1 – $R_1 = 8$
ingrediente 2 – $R_2 = 4$

A experiência permite considerar que o valor casual dos ingredientes segue distribuições distintas como:

Para mistura:

- para ingrediente 1 - a distribuição Weibull (β=3);
- para i ingrediente 2 - a distribuição Normal;
- para o ingrediente 3 - a distribuição de Máximos;
- para o ingrediente 4 - a distribuição Normal.

Além disso é conhecido que o preço de um quilograma de cada componente da mistura é:

Componente	A	B
Preço	P_A=50	P_B=25

É preciso determinar as frações de cada componente (x_A, x_B) para um quilograma da mistura, os quais garantem com probabilidade $H_{DADO} \geq 0.9$ que o conteúdo não seja menor que:

$R_3 = 3$ para ingrediente 3
$R_4 = 0,5$ para ingrediente 4

e nem maior que:

$R_1 = 8$ para ingrediente 1
$R_2 = 4$ para ingrediente 2

e minimize o preço 1 quilograma da mistura.

Matematicamente o problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$P_A x_A + P_B x_B \Rightarrow \min$$

sob as condições que:

$$\frac{R_1}{\mu_1} - \frac{A_1 \sqrt[3]{-\ln(0.99)} + 0.324 - 0.8934 A_1}{0.324} \leq 0$$

$$\frac{R_2}{\mu_2} - 1 + 2.33 A_2 \leq 0$$

$$\frac{R_3}{\mu_3} - 0.779 A_3 \left[-\ln(-\ln 0.01)\right] - 1 + 0.45 A_3 \geq 0$$

$$\frac{R_4}{\mu_4} - 1 - 2.33 A_4 \geq 0$$

Onde,

$$\mu_i = \mu_{A_i} x_A + \mu_{B_i} x_B$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2_{A_i} x^2_A + \sigma^2_{B_i} x^2_B}$$

$$A_i = \frac{\sigma_i}{\mu_i}$$

i= 1, 2,...,4.

Evidentemente, que devem ser satisfeitas as seguintes condições:

$X_A+X_B=1$
$0 \le X_A \le 1$
$0 \le X_B \le 1$

Resolvendo para o valor de X procurado, tem-se:

$X_A=0,4559$
$X_B=0,5441$

É importante investigar como os parâmetros probabilísticos influenciam na solução do problema, em particular, a dispersão dos coeficientes e a confiabilidade H_{dado}. Para isto, foram realizados os cálculos para diferentes valores de A_i e H_{dado} . Os resultados destes cálculos estão apresentados nos Quadros 2 e 3.

QUADRO 2 – Cálculo dos valores de X_A e X_B para diferentes valores de A_i e H_{dado}

H=0,9	0,0000	0,0200	0,0400	0,0600	0,0800	0,1000	0,1200	0,1400	0,1600
X_A	0,3333	0,3613	0,3873	0,4117	0,4345	0,4559	0,4763	0,4955	Não
X_B	0,6667	0,6387	0,6127	0,5883	0,5655	0,5441	0,5237	0,5045	Não
F	33,3333	34,033	34,6830	35,291	35,8620	36,3990	36,9060	37,3870	Não

QUADRO 3 - Cálculo dos valores de X_A e X_B para diferentes valores de A_i e H_{dado}

H=0,08	0,6000	0,7000	0,8000	0,8500	0,9000	0,9500	0,9900	0,9950	0,9990
X_A	0,3556	0,3781	0,4028	0,4171	0,4345	0,4587	0,5003	0,5145	Não
X_B	0,6444	0,6219	0,5972	0,5829	0,5655	0,5413	0,4997	0,4855	Não
F	33,8910	34,4520	35,0690	35,4290	35,8620	36,4680	37,5090	37,8620	Não

Foi investigado também a influencia dos tipos de leis da distribuição dos coeficientes para as restrições. Os resultados dos cálculos, para distribuição Normal são apresentados nos Quadros 4 e 5.

QUADRO 4 - Cálculo dos valores de X_A e X_B para diferentes valores de A_i e H_{dado} = 0,9, para distribuição Normal

A_i	0,0000	0,0200	0,0400	0,0600	0,0800	0,1000	0,1200	0,4000	0,1600

X_A	0,3333	0,3613	0,3873	0,4117	0,4345	0,4559	0,4762	Não	Não
X_B	0,6667	0,6387	0,6127	0,5883	0,5655	0,5441	0,5238	Não	Não
F	33,3330	34,0330	34,6830	35,2910	35,8620	36,3990	36,9050	Não	Não

QUADRO 5 - Cálculo dos valores de X_A e X_B para diferentes valores de A_i e H_{dado}= 0,08, para Distribuição Normal

A_i	0,6000	0,7000	0,8000	0,8500	0,9000	0,9500	0,9900	0,9950	0,9990
X_A	0,3556	0,3781	0,4028	0,4171	0,4345	0,4587	Não	Não	Não
X_B	0,6444	0,6219	0,5972	0,5829	0,5655	0,5413	Não	Não	Não
F	33,8910	34,4520	35,0690	35,4290	35,862	36,468	Não	Não	Não

Pode-se observar ver, que A só influencia para grandes valores A_i e H_{dado}

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, o problema da produção das misturas ótimas de rações foi formulado de forma probabilística, considerando-se a casualidade dos parâmetros, também foi investigado como os parâmetros probabilísticos influenciam na solução do problema, em particular, a dispersão dos coeficientes e a confiabilidade H_{dado}, realizando-se os cálculos para diferentes valores de A_i e H_{dado}. Assim, pode-se afirmar que pode-se encontrar os valores ótimos para as misturas para uma dada probabilidade, considerando o tipo de distribuição que cada problema de otimização se segue. No caso analisado foi considerado que lei da distribuição dos coeficientes para as restrições era Normal.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARASLANOV, A. M. (1987). Cálculo dos elementos das construções com confiabilidade prescrita sob cargas aleatórias. Moscow. Ed. Construção de Máquinas. 1987.

[2] ARASLANOV, A. M. (1992). Métodos estocásticos para projetar os elementos das construções . Kazan. Ed. KAI. 1992..

[3] BAZARAA, M.S. & JARVIS, J.J., Linear Programming and Network Flows. John Wiley & Sons Inc,. New York. 1977

[4] CHVÁTAL, V.. Linear Programming, W.H. Freeman and Company, New York.1983.

[5] HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J.. Introduction To Operation Research. Holden-Day Inc., San Francisco. 1980.

[6] TANA, H. A.. Operation Research. An Introduction. Macmillan Publishing Co., Inc. New York. Coller Macmillan Publisher. London. 1982.

[7] WILLIAMS, H.P. - Model Bulding in Mathematical Programming, John Wiley & Sons, 1990.