



SPOLM 2009

ISSN 2175-6295

Rio de Janeiro- Brasil, 05 e 06 de agosto de 2009

059/2009 - UMA APLICAÇÃO DA TEORIA DE GRAFOS EM REDES COMPLEXAS: ESTUDO DE CASO DO MERCADO DE AÇÕES DA BOVESPA

Leonardo Silva de Lima

Centro Federal de Educação Tecnológica – CEFET-RJ
Av. Maracanã, 229 – Maracanã - RJ

llima@cefet-rj.br

Eduardo Bezerra

Centro Federal de Educação Tecnológica – CEFET-RJ
Av. Maracanã, 229 – Maracanã - RJ

ebezerra@cefet-rj.br

Thiago Attias

Centro Federal de Educação Tecnológica – CEFET-RJ
Av. Maracanã, 229 – Maracanã – RJ

thiagoattias@yahoo.com.br

RESUMO

A obtenção de informações não-triviais em redes complexas modeladas por grafos é possível com a utilização de conceitos da teoria dos grafos. Propriedades estruturais do problema real podem ser obtidas a partir de características topológicas da rede. Neste artigo, o grafo de mercado que representa as inter-relações de um subconjunto dos ativos da BOVESPA é exibido e algumas propriedades dessa rede são discutidas. Verificamos que a seqüência de graus o grafo de mercado da BOVESPA pode ser aproximado segundo a Lei de Potências.

PALAVRAS CHAVE. Redes complexas. Grafo de mercado. Grafo Lei de potência.

ABSTRACT

Complex networks can be modeled by graphs in order to obtain useful information about the real problem. Structural properties of the real problem can be obtained by topological characteristics of the graph, such as vertex degree and betweenness centrality. In this paper, the market graph corresponding to the relationship between some stocks of the Brazilian stock market, BOVESPA, is represented. We verify that the sequence degree of the market graph can be approximated by the power law model.

KEYWORDS. Massive networks. Market graph. Power law graph

1. Introdução

Nos últimos anos, a área de Redes Complexas tem atraído o interesse de diversos pesquisadores, em diferentes campos do conhecimento (Barabási & Albert, 1999; Bianconi & Barabási, 2001; Albert & Barabási, 2002; Barabási & Bonabeau, 2003). Em essência, este ramo de pesquisa estuda os relacionamentos entre redes de objetos. Resultados obtidos recentemente indicam que os mecanismos de formação dessas redes complexas são comuns em diferentes domínios, desde redes de interações entre proteínas, redes de biotecnologia, passando por redes sociais, até a formação da própria Internet (Newman, 2003; Newman, 2005).

O aumento significativo de informação empírica sobre diversas redes complexas têm permitido o avanço no estudo sobre quais são seus mecanismos de formação. Em particular, um resultado importante deste ramo de pesquisa é a constatação de que muitas redes complexas, naturais ou artificiais, possuem uma propriedade topológica não-trivial. Um dos primeiros trabalhos realizados com o intuito de prever o comportamento de redes complexas foi o de (Erdos & Reny, 1959), que definiram os grafos uniformemente aleatórios. Nesse caso, para um dado número de vértices n , o número de arestas m desse grafo é escolhido aleatoriamente e cada possível valor de m tem a mesma probabilidade de ocorrer. (Bollobás, 1985) definiu outro modelo de grafos aleatórios, onde, fixados o número de vértices n e a probabilidade de conexão entre dois vértices p , o número de arestas do grafo é dado por uma distribuição binomial. Entretanto, quando n cresce, a distribuição dos graus dos vértices pode ser aproximada por uma distribuição de Poisson com média np . Foi verificado empiricamente que este último modelo captura boas propriedades relacionadas com o surgimento de componentes conexas gigantes na rede.

Entretanto, há significativa diferença entre os grafos obtidos pelos modelos descritos anteriormente, na tentativa de representar grafos da vida real. A principal diferença está associada à distribuição dos graus dos vértices do grafo. Os experimentos empíricos mostram que, em diversos grafos utilizados na modelagem de problemas da vida real, a distribuição dos graus dos vértices desses grafos segue o modelo da Lei de Potências (*Power Law*) (Clauset *et al.*, 2009). Como exemplo, podemos citar os trabalhos de (Abello *et al.*, 1999) e (Aiello *et al.*, 2001) que definiram o chamado *Call Graph*, um grafo onde os vértices representam números telefônicos e dois vértices são conectados no grafo caso tenha ocorrido uma chamada de um número para o outro num certo período de tempo. Estes autores mostraram que a distribuição dos graus dos vértices no *Call Graph* segue a Lei de Potências. (Boginski *et al.*, 2005b) definiram um grafo, denominado *Market Graph*, representando as inter-relações dos ativos da bolsa de valores dos EUA e provaram que a distribuição de graus dos vértices deste grafo também obedece a Lei de Potências. Para obter detalhes sobre outras aplicações, o leitor é convidado a consultar as referências a seguir: (Adamic *et al.*, 2001; Kleinberg, 2000a; Kleinberg, 2000b *et al.*; Liben-Nowell *et al.*, 2005).

Neste artigo, apresentamos um estudo realizado sobre a base de dados de algumas ações da Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA). Nosso objetivo foi caracterizar e compreender a base de dados de alguns ativos sob a luz da área de Redes Complexas. As principais contribuições deste trabalho estão listadas a seguir:

- A primeira contribuição diz respeito à originalidade do artigo, pois nenhum trabalho relacionando a teoria dos grafos e o mercado de ações brasileiro foi encontrado;
- Verificamos que a distribuição dos graus dos vértices do grafo de mercado das ações da bolsa de valores BOVESPA pode ser aproximada por um modelo de Lei de Potência;
- Analisamos as alterações sofridas pelo grafo de mercado da BOVESPA durante o período de tempo de surgimento da crise financeira internacional, e fornecemos uma possível explicação para o comportamento encontrado.

Este artigo se encontra estruturado em seções, conforme a seguir. Nas Seções 2 e 3, são apresentadas uma visão geral da área de Teoria de Grafos e Redes Complexas, respectivamente,

com o objetivo de fornecer um contexto teórico para as próximas seções. Na Seção 4, o procedimento que utilizamos para formação do grafo de ações da BOVESPA é descrito. A Seção 5 descreve os experimentos realizados sobre esse grafo e uma análise dos resultados obtidos é apresentada. Finalmente, apresentamos as conclusões deste trabalho e sugestões para sua continuidade.

2. Conceitos básicos em Teoria dos Grafos

Uma rede é um conjunto de itens conectados entre si por um tipo de relacionamento de alguma natureza. Formalmente, uma rede complexa pode ser modelada como um grafo no qual os vértices correspondem aos itens da rede, e as arestas correspondem aos relacionamentos. Neste artigo os grafos que modelam as redes complexas são grafos simples (sem arestas múltiplas e sem laços) e não-direcionados, denotados por $G=(V,E)$, onde V é o conjunto de vértices tal que $|V|=n$ e E é o conjunto de arestas de modo que $|E|=m$.

O grau de um vértice v_i , denotado por $d(v_i)$, é dado pelo número de arestas incidentes a ele. A seqüência de graus de um grafo G é denotada por $d(G) = (d(v_1), \dots, d(v_n))$, onde $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$. Apesar de um grafo não ser determinado de maneira única a partir da sua seqüência de graus, a distribuição dos graus é uma importante característica do grafo.

Um grafo é dito completo se tem todas as ligações possíveis. A densidade de arestas de um grafo é dada pela razão entre o número de arestas do grafo pelo número de arestas do grafo completo. Considere o subconjunto $S \subseteq V$, denotado por $G(S)$, definido como o subgrafo S de G . O subconjunto $C \subseteq V$, denotado por $G(C)$, é uma clique se $G(C)$ é um grafo completo, isto é, têm todas as arestas possíveis. É conhecido na literatura que o problema de determinar clique maximal de um grafo é um problema computacionalmente difícil, Garey e Johnson (1979). Uma *quasi-clique*, denotado por γ -clique ou C_γ , é um subconjunto C de V tal que $G(C)$ tem no mínimo $\lceil \gamma q(q-1)/2 \rceil$ arestas, onde q é a cardinalidade de C .

Um conjunto independente é um subconjunto $I \subseteq V$ tal que o subgrafo $G(I)$ não possui arestas. O problema do máximo conjunto independente em G pode ser reformulado como o problema da clique máxima no grafo complementar $\bar{G} = (V, \bar{E})$. De modo análogo, o problema de encontrar a clique máxima no grafo G corresponde a determinar o máximo conjunto independente em \bar{G} . Este fato é facilmente verificado, pois se uma aresta $(i, j) \in E$, então $(i, j) \notin \bar{E}$, e a recíproca é verdadeira. Obviamente, uma clique máxima em G é o máximo conjunto independente em \bar{G} .

Assim, os problemas de determinar uma clique máxima e um máximo conjunto independente estão intimamente relacionados. Portanto, o problema de determinar conjunto independente máximo também é um problema difícil. (Boginski *et al.*, 2005b) utilizaram os conceitos de conjunto independente e quasi-cliques como estratégias de diversificação de investimentos num grafo representativo do mercado de ações dos EUA. Nosso intuito é utilizar estas definições para extrair informações do mercado de ações brasileiro. Vale ressaltar que nenhum trabalho com metodologia similar desenvolvido no mercado de ações brasileiro foi encontrado, o que constitui uma contribuição deste artigo.

3. Redes Complexas

Redes complexas são chamadas de livres de escala (*scale free*) quando a distribuição dos graus de seus vértices segue uma *Lei de Potência* (Mitzenmacher, 2004). Leis de potência existem em muitas formas, e na verdade formam uma família de distribuições. Entretanto, para esse trabalho, vamos nos concentrar em uma delas, a chamada distribuição *zeta* (Clauset *et al.*, 2009). Seja p_k a probabilidade de um vértice selecionado, uniformemente ao acaso, do grafo G possuir grau k . Se os graus dos vértices em G estão de acordo com essa distribuição, então

$$p_k \propto k^{-\tau}$$

Algumas propriedades interessantes da distribuição *zeta* são apresentadas a seguir:

1. $p_0 = 0$, ou seja, ao contrário de outras distribuições (e.g., Poisson), em um grafo cujos graus dos vértices seguem a distribuição *zeta*, não existem vértices isolados.
2. O gráfico da distribuição *zeta* possui uma cauda pesada, o que resulta em valores de probabilidade não nulos, mesmo para valores de k que difiram muito da média.
3. A função de distribuição de probabilidades precisa ser normalizada: $p_k = Ck^{-\tau}$, onde C é a constante de normalização da função de distribuição,

$$C = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\tau}}$$

Uma forma de averiguar se uma coleção de dados empíricos coletados segue a distribuição *zeta* é desenhar o gráfico *log-log* desses dados. Se esses dados estiverem de acordo com a distribuição *zeta*, a forma do gráfico *log-log* será aproximadamente uma reta com coeficiente angular negativo.

4. Formação do grafo de mercado da BOVESPA

Nesta Seção, apresentamos o procedimento que utilizamos para formar um grafo a partir da base de dados histórica de ações da BOVESPA. Na construção desse grafo de ações, consideramos cada ativo da bolsa de valores como um de seus vértices. Além disso, uma aresta é definida entre dois ativos i e j se há uma correlação entre os retornos diários dos ativos cujo valor é maior que um limite θ definido empiricamente (na seção 5 descrevemos o valor utilizado para este limite). Considere $P_i(t)$ como o preço de fechamento do ativo i no dia t . Seja $R_i(t)$ o logaritmo de retorno da ação i em um determinado dia t : $R_i(t) = \ln(P_i(t)/P_i(t-1))$. A correlação $C_{i,j}$, entre dois ativos i e j , é definida pela expressão:

$$C_{i,j} = \frac{\langle R_i R_j \rangle - \langle R_i \rangle \langle R_j \rangle}{\sqrt{\langle R_i^2 - \langle R_i \rangle^2 \rangle \langle R_j^2 - \langle R_j \rangle^2 \rangle}}, \quad (3.1)$$

onde $\langle R_i \rangle$ é definido como a média simples dos retornos da ação i no período de N dias. Para um valor pré-determinado do parâmetro θ , uma aresta é inserida entre dois vértices i e j caso $C_{i,j} \geq \theta$. É esperado que a densidade de arestas do grafo de mercado dependa das variações de θ . Mais especificamente, espera-se que quanto maior o valor deste parâmetro, menor seja a densidade do grafo. Na Seção 5, realizamos experimentos para validar e analisar essa intuição.

A identificação de cliques no grafo de mercado pode ser vista como a identificação de agrupamentos ou *clusters* de ativos fortemente correlacionados. Ativos pertencentes a uma mesma clique podem ser vistos como um conjunto de ações cujos preços variam de modo similar, ou seja, se o preço de um ativo v_i sobe (desce), há indícios de que o preço de um ativo v_j da mesma clique que v_i também possa subir (descer). Portanto, investir em ações de um mesmo *cluster* não é uma boa estratégia de diversificação. Na realidade, investir em ações que façam parte de um conjunto independente no grafo de mercado é uma estratégia consistente de diversificação.

5. Resultados Experimentais

Para execução do estudo de caso proposto neste trabalho, foi necessário coletar dados históricos de determinadas ações que são negociadas na BOVESPA. Foram selecionadas todas as ações que possuíam a base de dados completa no período analisado. Isto é, todas as ações não negociadas na BOVESPA no início do período analisado foram desconsideradas. Esse procedimento de seleção resultou em um total de 131 ativos distintos. A fonte dos dados utilizada foi o próprio portal da instituição financeira, que disponibiliza, dentre outras informações, os valores de

fechamento, percentual de valorização e o volume de negociações diárias, de todas as ações negociadas.

O período escolhido para a análise foi de 02/01/2006 até 31/10/2008, contemplando 701 dias úteis. A partir dos valores de fechamento, uma série de 700 retornos diários de preço foi gerada, para o intervalo em estudo. A apresentação dos resultados foi estruturada fragmentando o universo dos dados coletados em 7 períodos de 400 dias, que diferem entre si por um intervalo de 50 dias, ou seja, cada período (à exceção do último) possui 350 dias em comum e 50 diferentes em relação ao período consecutivo. Além dos 7 períodos, também foi criado um grafo de mercado considerando os 700 valores de retorno diário em um único período de análise; na Figura 1, esse grafo é apresentado como período 8. Este grafo foi desenvolvido para fins de comparação da densidade de arestas, média dos coeficientes de correlação e tamanho da maior clique dos grafos dos períodos de 1 a 8. A análise experimental foi realizada para $\theta = 0.45$ em todos os períodos. Para cada um dos períodos de tempo, geramos um grafo, de acordo com o procedimento descrito na Seção 4. Na BOVESPA, ocorre que nem todos os ativos são negociados em todos os dias. Isso se reflete na base de dados históricos que utilizamos nos experimentos. Quando isso ocorre, consideramos o preço de fechamento do ativo em questão como igual ao preço de fechamento do dia útil anterior.

A Tabela 1 resume os resultados para os grafos de mercado obtidos a cada período. Observe que não há diferenças significativas para densidade de arestas dos grafos nos períodos de 1 a 6, mas há um aumento expressivo no valor da densidade de arestas no período 7. Este abrange parte do período da atual crise econômica internacional, crise esta que promoveu grandes mudanças nas relações entre os ativos do mercado acionário brasileiro. Neste período, diversos ativos apresentaram uma correlação bastante significativa com diversos outros, aumentando assim o número de arestas no grafo de mercado e, conseqüentemente, o valor da densidade de arestas. Este resultado pode ser explicado pelo efeito dominó ocorrido em função da crise, que levou diversos papéis a oscilarem juntos em um determinado período.

Período	Data Início	Data Término	Média das Correlações	Densidade de Aresta	Grau da Maior Clique
1	02/01/06	15/08/07	0.1320	0.0182	9
2	17/03/06	26/10/07	0.1308	0.0166	7
3	31/05/06	15/01/08	0.1330	0.0187	8
4	10/08/06	31/03/08	0.1402	0.0195	8
5	23/10/06	12/06/08	0.1407	0.0198	9
6	09/01/07	22/08/08	0.1379	0.0134	6
7	23/03/07	31/10/08	0.1928	0.0521	15
8	02/01/06	31/10/08	0.1580	0.0267	8

Tab. 1. Dados do grafo de mercado para os períodos analisados com $\theta = 0.45$.

Na Figura 1, os grafos de mercado obtidos para os períodos estudados são representados. Os grafos foram gerados a partir do *software* PAJEK [Batagelj & Mrvar, 1996], que está disponível gratuitamente na *internet*. Observe que ao centro de cada grafo, a densidade de arestas é maior, pois as cliques maximais estão representadas nesta região.

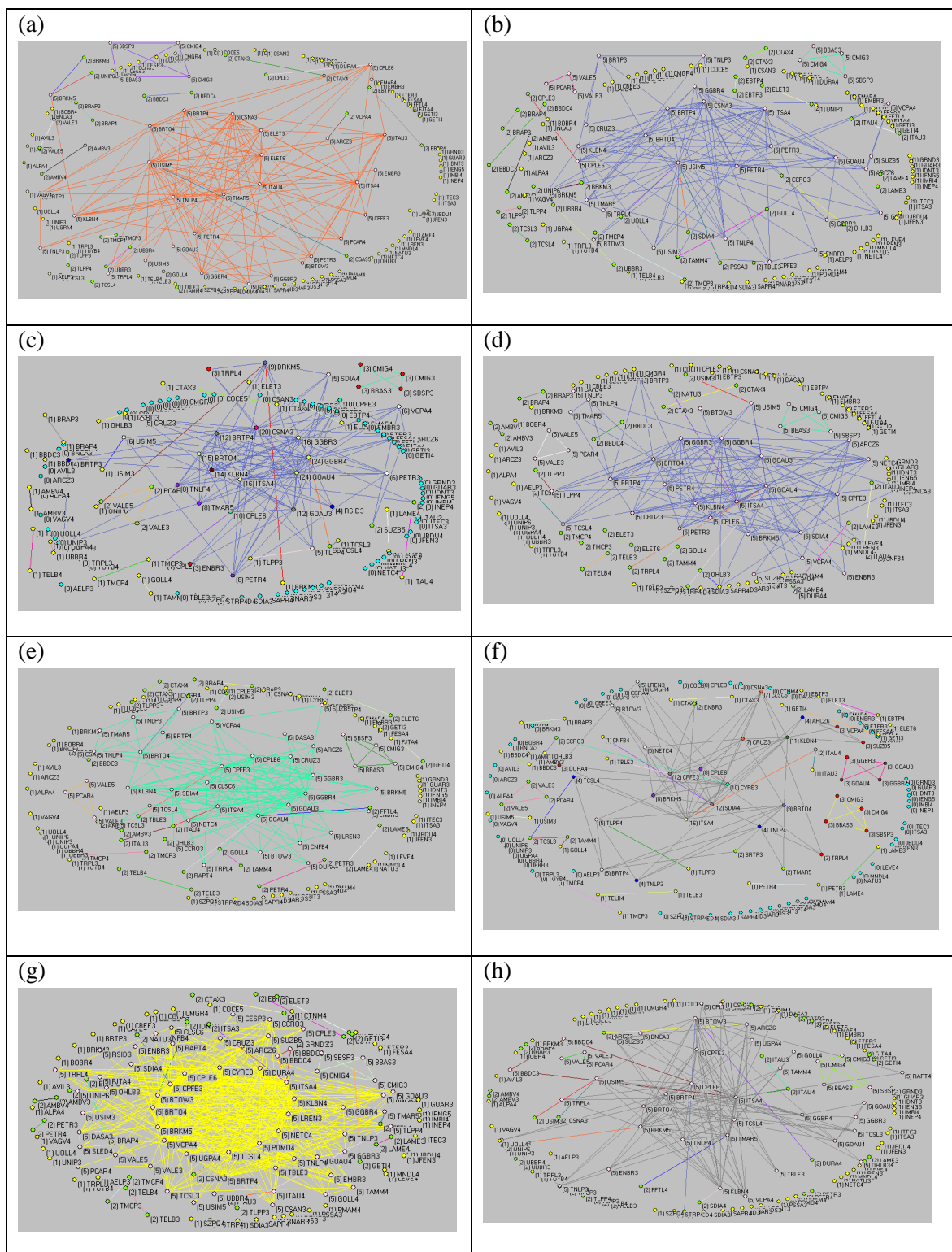
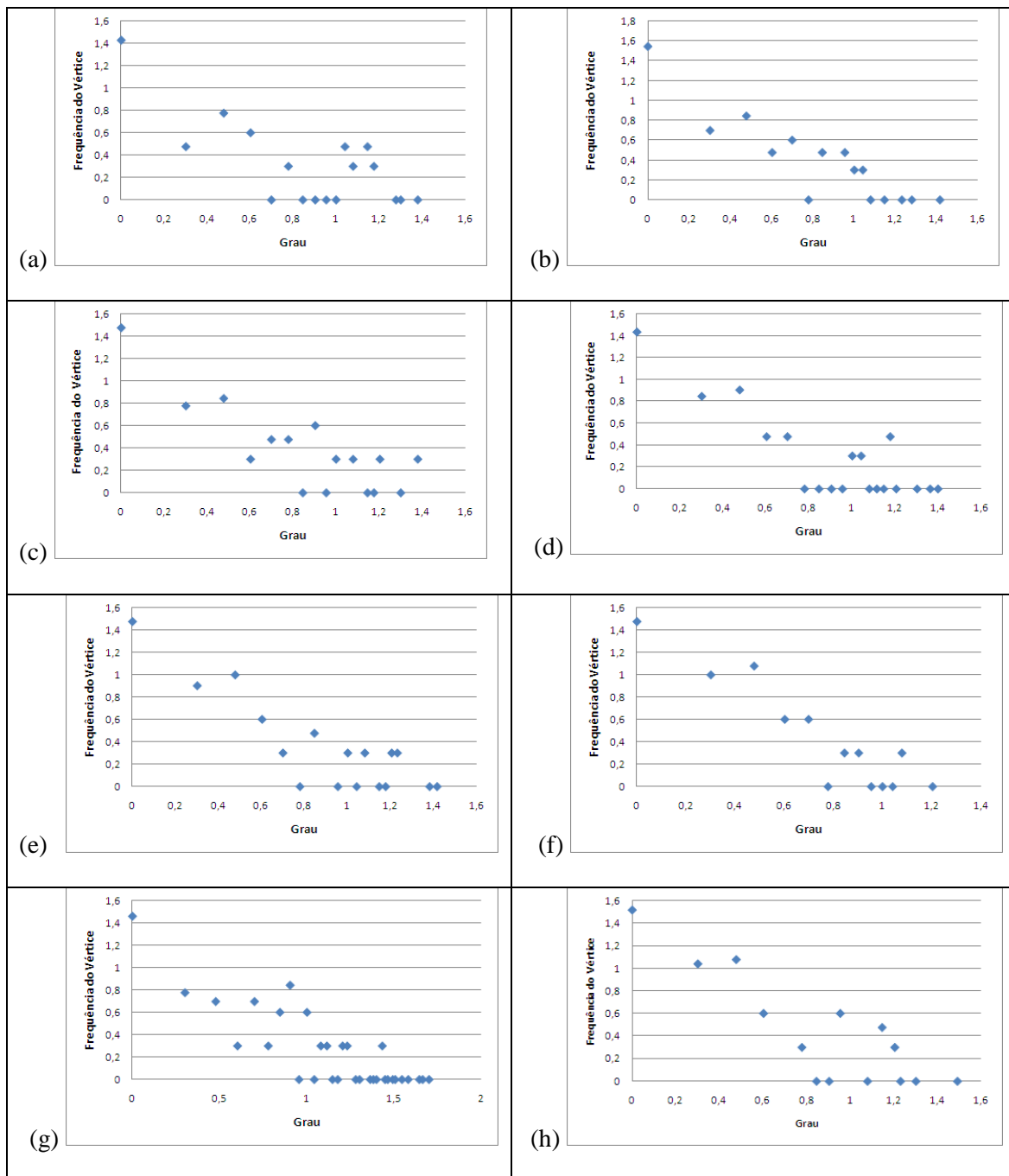


Fig.1. Grafos de mercado gerados, para $\theta = 0, 45$. (a) período 1, (b) período 2, (c) período 3, (d) período 4, (e) período 5, (f) período 6, (g) período 7 e (h) período 8.

A Figura 2 mostra os gráficos *log-log* de distribuição de grau dos vértices dos grafos da Figura 1. A Figura 2(h) apresenta o gráfico *log-log* obtido para o grafo construído considerando todos os 700 retornos diários em um mesmo período de análise. Verifica-se, que em todos os períodos, o resultado apresentado pode ser aproximado pelo modelo de Lei de Potências.



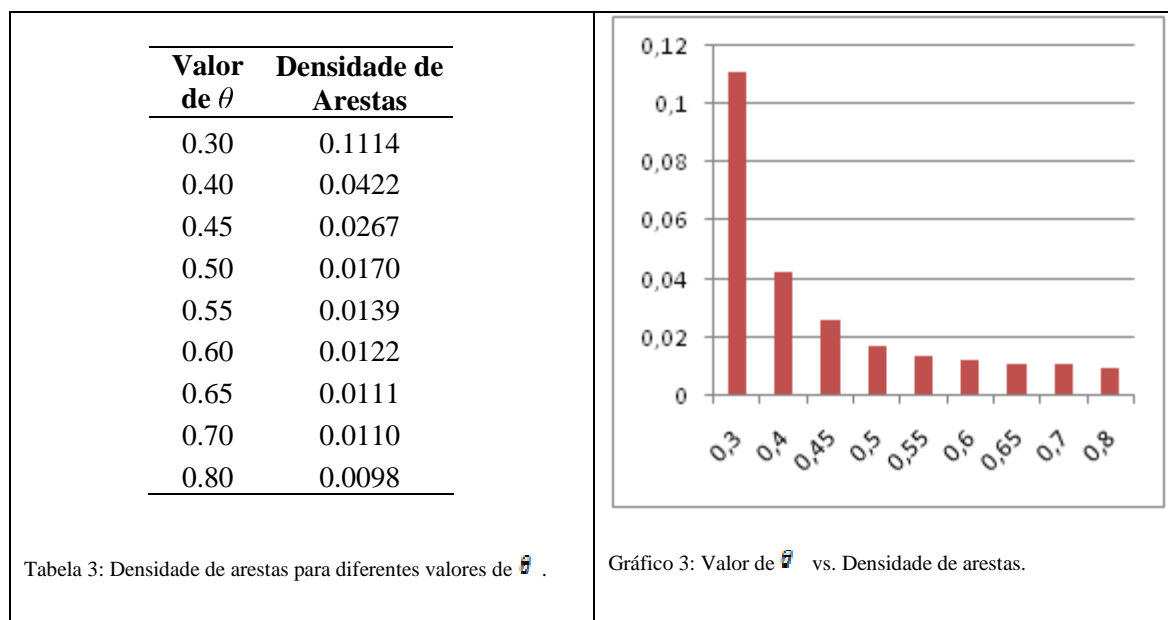
Na Tabela 2, são apresentados os ativos que compõem as maiores cliques. Observe que nos períodos 2, 3, 4 e 5, há mais de uma clique máxima. As cliques foram calculadas a partir de [Dharwadker, 2006].

1	BRTO4	BRTP4	CSAN3	ELET3	ELET6	ITAU4	TMAR5	TNLP4	USIM5
2	BRTO4	BRTP4	CSNA3	ITSA4	PETR3	PETR4	USIM5		
	BRTO4	CSNA3	GGBR4	ITSA4	PETR3	PETR4	USIM5		
3	BRTO4	BRTP4	CSNA3	GGBR3	GGBR4	GOAU4	ITSA4	KLBN4	

	BRTO4	CSNA3	GGBR3	GGBR4	GOAU3	GOAU4	ITSA4	KLBN4
	BRTO4	BRTP4	CPLE6	CSNA3	GGBR3	GGBR4	GOAU4	ITSA4
	BRTO4	CPLE6	CSNA3	GGBR3	GGBR4	GOAU3	GOAU4	ITSA4
	BRTO4	BRTP4	CSNA3	GGBR3	GGBR4	GOAU4	TMAR5	TNLP4
4	GGBR3	GGBR4	GOAU3	GOAU4	ITSA4	KLBN4	PETR3	PETR4
	BRTO4	GGBR3	GGBR4	GOAU3	GOAU4	ITSA4	KLBN4	PETR4
5	CLSC6	CPFE3	CPLE6	CRUZ3	GGBR3	GGBR4	GOAU3	GOAU4 ITSA4
	CLSC6	CPFE3	CPLE6	CRUZ3	GGBR4	GOAU3	GOAU4	ITSA4 SDIA4
6	BRKM5	CPFE3	CPLE6	CYRE3	ITSA4	SDIA4		
7	BRKM5	BRTO4	BTOW3	CPFE3	CPLE6	CYRE3	DURA4	ITSA4 KLBN4
	LREN3	NETC4	POMO4	TCSL4	UGPA4	VCPA4		
8	BRKM5	BRTO4	BRTP4	CPLE6	ITSA4	TCSL4	TMAR5	TNLP4

Tab. 2. Ativos contidos na maior clique para $\theta = 0,45$.

A Tabela 2 e a Figura 2 indicam uma forte correlação entre os ativos listados em uma mesma clique. Isto significa que seu percentual de valorização diária, positiva ou negativa, durante o período analisado foi bastante similar. Com isso, não seria indicado durante a elaboração de uma carteira de ações diversificada, a inclusão de diversos papéis de uma mesma clique, visto que em caso de queda de um ativo, a tendência seria que todos acompanhassem sua trajetória de desvalorização. Considerando o exposto, por exemplo, não seria interessante, incluirmos os ativos BRTO4, BRTP4, ELET6 e ITAU4, em uma mesma carteira válida para o período 1, composta por 6 ativos.



A Tabela 3 e o Gráfico 3 apresentam as densidades de arestas para diferentes valores de θ no período 8. Podemos perceber que, conforme esperado, quanto maior o valor de θ , menor é o valor da densidade de arestas durante o período analisado.

6. Conclusões

Neste trabalho, realizamos um estudo empírico sobre a formação de redes complexas na base de dados histórica da Bolsa de Valores de São Paulo. Através de um procedimento que considera correlações entre os preços de fechamento dos ativos estudados, diversos grafos de mercado foram gerados para diferentes períodos de tempo. Em cada um desses grafos, constatamos que os graus dos vértices seguem uma distribuição próxima da Lei de Potências. Em particular, analisamos o grafo de mercado correspondente ao período de surgimento da crise financeira internacional, e sua estrutura significativamente diferente dos grafos correspondentes aos períodos anteriores. Identificamos também as cliques e as correspondentes componentes independentes dos grafos estudados; essas estruturas são importantes, pois permitem a criação de carteiras de investimento mais diversificadas, que levem em conta a estrutura de correlação entre os vértices do grafo de mercado.

Este estudo é ainda preliminar e com resultados parciais, já que a base de dados de ativos utilizada pode ser ampliada. Entretanto, há grande dificuldade de utilização da base de dados completa porque há diversos ativos que em dias específicos do período analisado não apresentaram negociação e por isso não puderam entrar em nossa análise.

Nesse estudo inicial, utilizamos um valor fixo do parâmetro θ para a geração dos diversos grafos de mercado, analisados nos experimentos. Conforme descrito na Seção 4, esse parâmetro limita a formação de arestas entre vértices do grafo de mercado, determinando em última análise sua densidade de arestas: quanto maior o valor de θ , menos arestas são formadas no grafo em questão. Em um trabalho futuro, pretendemos investigar os possíveis valores de θ que podem ser adotados e as consequências da alteração do valor deste parâmetro na formação dos grafos de mercado.

Outra oportunidade de continuidade desse trabalho é estudar mais detalhadamente o mecanismo que leva à formação dos chamados *hubs* da rede complexa, ou seja, vértices do grafo de mercado que possuem grau significativamente maior que os demais. Esses vértices correspondem a ativos que possuem alta correlação com a maioria dos demais ativos. Em particular, uma questão em aberto nesse contexto diz respeito às condições de surgimento desses vértices ao longo do tempo.

Referências

- Abello, J., Pardalos, P., and Resende, M. (1999)**, On Maximum Clique Problems in Very Large Graphs. In DIMACS Series, 50, American Mathematical Society, pp. 119–130.
- Adamic, Lada A., Lukose, Rajan M., Huberman, Bernardo & Puniyani, Amit R., 2001**, Search in Power-Law Networks, Phys. Rev. E, 64 46135.
- Aiello, W., Fan, C., Lu, L. (2000)**, A Random Graph Model for Massive Graphs. Proc. 32nd ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), pp.171-180.
- Albert, R. e Barabási, A.-L. (2002)**, Statistical mechanics of complex networks. Reviews of Modern Physics 74, 47-97.
- B. Bollobás. (1985)**. Extremal Graph Theory, Academic Press, London.
- Barabási, A.-L. e Bonabeau, E. (2003)**, Scale-free networks. Scientific American 288, 60-69.
- Barabási, A.-L. e Albert, R. (1999)**, Emergence of scaling in random networks, Science 286, 509-512.
- Batagelj, Vladimir, Mrvar, Andrej (1996)**, Pajek Program for Large Network Analysis, disponível em: <http://mrvar.fdv.uni-lj.si/sola/info4/programe.htm>. Acesso em 08/05/2009.
- Bianconi, G. e Barabási, A.-L. (2001)**, Competition and multiscaling in evolving networks,

Europhysics Letters 54, 436-442.

Boginski, V., Butenko, S., Pardalos, P. M. (2005a), Statistical analysis of financial networks. Computational Statistics and Data Analysis 48(2):431–43.

Boginski, V., Butenko, S., Pardalos, P. M. (2005b), Mining market data: A network approach, Computers & Operations Research 33, p. 3171-3184.

Clauset, A., Shalizi, C. R. & M. E. J. Newman (2009), Power-law distributions in empirical data, SIAM Review.

Dharwadker, Ashay. (2006), The Clique Algorithm, disponível em: <http://www.dharwadker.org/cliue>. Acesso em 08/05/2009.

Erdős, P., Rényi, A. (1959). On Random Graphs. I., Publ. Math., pp. 290-297.

Garey, M., R., Johnson, D., S. (1979), Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness.

Kleinberg, Jon, (2000a), The small-world phenomenon: An algorithmic perspective, Proc. 32nd ACM Symposium on Theory of Computing (STOC).

Kleinberg, Jon, (2000b), Navigation in a Small World, Nature 406 (2000), 845.

Liben-Nowell, D., Novak, J., Kumar, R., Raghavan, P., & Tomkins, A., Geographic Routing in Social Networks, Proc. of the National Academy of Sciences (PNAS), 102(33):11623-11628, August 2005.

Mitzenmacher, M. (2004), A Brief History of Generative Models for Power Law and Lognormal Distributions. Internet Mathematics, Vol 1, No. 2, pp. 226-251.

Newman, M. E. J. (2003), The structure and function of complex networks. SIAM Review 45, 167-256.

Newman, M. E. J. (2005), Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. Contemporary Physics 46, 323-351.