SPOLM 2007

ISSN 2175-6295 Rio de Janeiro- Brasil, 08 e 09 novembro de 2007.

# PROJETO DE NAVIOS: UM ESTUDO DE CASO DO PQA-*K*

**Eliane M. Loiola**
Universidade Federal do Rio de Janeiro
eliane@pep.ufrj.br

**Nair M. M. Abreu**
Universidade Federal do Rio de Janeiro
nair@pep.ufrj.br

**Richard D. Schachter**
Dep. de Engenharia Naval e Oceânica – Poli/ UFRJ
richard@peno.coppe.ufrj.br

**Resumo:** O problema quadrático de alocação com *k* restrições (PQA-*k*) é um caso particular de problema de arranjo físico, conhecido como problema quadrático de alocação, PQA, onde $k < n$ alocações são previamente estabelecidas num total de *n*. Neste trabalho, é apresentada uma aplicação do PQA-*k* no ramo da Engenharia Naval, em que se deseja determinar a disposição de acomodações em conveses no projeto de navios e embarcações. Esta disposição deve respeitar os regulamentos de segurança e habitabilidade de órgãos brasileiros e internacionais que regulam o projeto e a construção naval, além de critérios de ergonomia e práticas de arquitetura, envolvendo aspectos relacionados à tridimensionalidade. O arranjo físico de conveses de um navio modelado como um PQA-*k* e um método para obtenção de diversas opções otimizadas de arranjos de acomodações são aqui apresentados, visando oferecer, aos projetistas navais, um prático instrumento de apoio à tomada de decisão. Tal método é resultado de adaptações feitas a procedimentos do PQA via teoria computacional dos grupos.
**Palavras-chaves:** problema quadrático de alocação, problema quadrático de alocação com *k*- restrições, arranjos de conveses de navio, teoria computacional dos grupos.

**Abstract:** The *k*-constraints quadratic assignment problem (QAP-*k*) is a special case of the quadratic assignment problem of order *n*, where $k < n$ partial assignments are previously known. In this work, an application of the QAP-*k* for Naval Architecture is presented, in which the deck accommodations layout of the General Arrangement of a ship design is to be determined. This layout must comply with safety and habitability regulations of the Brazilian administration and the international institutions that regulate ship design and construction, besides ergonomic criteria and practical rules of architecture, involving aspects related to tri-dimensionality. The physical deck arrangement of a ship modeled as a QAP-*k* and a method for obtaining several optimized options of accommodation arrangements are presented here, in order to offer to marine designers a practical decision making support tool. This method is a result of adaptations made to QAP procedures through computational group theory.

**Key-words:** quadratic assignment problem, *k*-constraints quadratic assignment problem, computational group theory, ship deck arrangements.

## 1. Definições gerais

Navios e embarcações possuem um ou mais pavimentos que são chamados de conveses. Cada convés é estruturado de modo a conter diversos tipos de acomodações, tais como: compartimentos para alojar o comando, áreas de trabalho e suporte, acomodações da tripulação, paióis, áreas de recreação, salões de refeição, etc. Um projeto de um navio envolve, entre outras questões, um esforço considerável para definir um arranjo interior que torne o navio um espaço ergometricamente eficiente, prático e agradável de trabalho e de convívio para os tripulantes. A idealização de topologias e conformações arquitetônicas que atendam às normas técnicas de órgãos brasileiros e internacionais que regulam o projeto e a construção naval, além dos critérios de ergonomia e dos cuidados para garantir a tridimensionalidade, como o alinhamento vertical de compartimentos, a continuidade estrutural, com relação às vizinhanças superiores e inferiores entre os diversos conveses fazem parte do projeto.

Portanto, um projeto desta natureza é feito em diversas fases, nas quais há sucessivos refinamentos dos cálculos, exigindo-se a participação de arquitetos navais e projetistas, tanto na formulação de propostas de arranjo geral e de arranjo dos espaços habitáveis, quanto na formulação de propostas de arranjos do conjunto formal. Nesta última fase, é comum a execução de diversas propostas até que se chegue a uma solução aceitável e coerente, abrangendo todas as variáveis envolvidas.

O arranjo geral é a definição básica dos vários tipos de equipamentos, compartimentos, acomodações e espaços nos diversos conveses, segundo características específicas de cada tipo de embarcação. Seu projeto consiste em dispor de maneira adequada às suas funções, as áreas destinadas à realização de trabalhos, ao uso comum e ao uso privativo, bem como na distribuição coerente das circulações que lhes dão acesso. A definição do dimensionamento e do posicionamento das circulações horizontais e verticais deve ser realizada de modo a facilitar a leitura e a maneira de circular, além de procurar diminuir os trajetos necessários durante a realização das atividades desempenhadas no navio. Ou seja, as circulações devem ser dimensionadas, de modo a atender suas funções, porém sem desperdiçar espaço, uma vez que é crucial sua utilização de modo racional e otimizado. Além disso, a elaboração de um zoneamento das diversas áreas destinadas às atividades a que a embarcação se propõe deve considerar a necessidade de distribuição homogênea das cargas geradas pelo arranjo e pela otimização dos trajetos entre as mesmas, levando-se, assim, a uma distribuição simétrica dos pesos e centros de gravidade nos espaços.

O arranjo dos espaços habitáveis trata de organizar os espaços destinados à realização das quatro funções básicas das pessoas na embarcação: circular, trabalhar, habitar e desfrutar do lazer, garantindo a segurança e o suporte às funções. A definição e o dimensionamento preliminar destes espaços são estabelecidos no projeto de arranjo geral, onde se procura otimizar sua distribuição pelos diversos conveses e seu dimensionamento e localização em função das atividades a serem, neles, desempenhadas.

O arranjo do conjunto formal é uma definição de linhas e formas que possibilitem localizar de maneira adequada os equipamentos necessários ao funcionamento e segurança da embarcação, de modo a torná-los parte integrante de um conjunto harmônico de formas no perfil da embarcação. Ele permite a transmissão e comunicação de idéias sobre o projeto, que está sendo desenvolvido, facilitando verificar se as alterações no arranjo dos espaços habitáveis comprometem ou não as definições estabelecidas anteriormente.

O projeto de arranjo de espaços habitáveis se limita ao desenho das acomodações no projeto preliminar do arranjo geral, o que resulta na definição dos espaços internos da embarcação. Isto leva, com maior precisão, a um ajuste nas posições e dimensões pretendidas dentro dos espaços a eles destinados no arranjo geral e está intimamente ligado aos problemas de infra-estrutura.

A definição de parte substancial dos sistemas de infra-estrutura depende de uma adequada disposição, principalmente dos alojamentos ou camarotes destinados aos passageiros, no que se refere às redes de água potável e servida, bem como às redes de energia elétrica e ao sistema de climatização, que estão intrinsecamente relacionados com o alinhamento vertical de compartimentos com relação às vizinhanças superiores e inferiores entre os diversos conveses. Para maiores detalhes, consulte FONSECA (2005) e SCHACHTER *et al*. (2006).

## 2. Modelo para projeto de arranjo de espaços habitáveis de navios

Sejam $\Pi_n$, o conjunto das permutações $\pi$ a $n$ elementos, $F$ = [ $f_{ij}$ ], a matriz dos fluxos entre as facilidades $i$ e $j$, e $D$ = [ $d_{\pi(i)\pi(j)}$ ], a matriz das distâncias entre as localizações $\pi(i)$ e $\pi(j)$. Neste trabalho, as matrizes $F$ e $D$ são consideradas simétricas e não negativas. O problema quadrático de alocação, PQA($F$, $D$), pode ser formulado da seguinte forma:

$$\min_{\pi\in\Pi_n} \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} d_{\pi(i)\pi(j)} \,. \tag{1}$$

A formulação dada em (1) pode ser interpretada da seguinte maneira: sejam dois grafos completos valorados e não direcionados, um denotado por $K_F$, com arestas valoradas pelos fluxos $f_{ij}$ e outro, por $K_D$, com arestas valoradas pelas distâncias $d_{ij}$. Determinar uma solução ótima para o PQA($F$, $D$) equivale a encontrar uma alocação, de custo mínimo, dos vértices de um grafo sobre os do outro, preservando-se as arestas. Uma instância do problema é representada por um par de grafos ($K_F$, $K_D$).

De um modo geral, observa-se que o problema de arranjo de espaços habitáveis em um único convés pode ser modelado como um problema quadrático de alocação (SCHACHTER *et al*., 2006). Em geral, o projeto de uma grande embarcação prevê a existência de mais de um pavimento, sendo necessário considerar a tridimensionalidade do arranjo, uma vez que é preciso preservar a verticalidade de certas estruturas arquitetônicas. Por exemplo, manter uma dada posição horizontal em cada um dos conveses, compartimentos como escadas, elevadores, corredores, gaiútas[1], etc. Tais exigências levaram LOIOLA (2007) a formular o problema quadrático de alocação com $k$-restrições e aplicá-lo ao problema do arranjo físico de navios e embarcações.

**Definição 1:** Seja $X = \{1, 2, ..., n\}$ e considere, para um dado $k$, $1 \le k \le n$, dois subconjuntos $I$ e $J$ de $X$, tais que $I = \{ i_1, i_2, ..., i_k \}$ e $J = \{ j_1, j_2, ..., j_k \}$. Uma bijeção $\alpha : I \to J$ tal que $\alpha(i_t) = j_t$, para $t$ = 1, 2, ..., $k$, denotada por $\alpha = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \Lambda & i_k \\ j_1 & j_2 & \Lambda & j_k \end{bmatrix}$, é chamada uma $k$-restrição em $\Pi_n$, ou uma permutação restrita de $\pi \in \Pi_n$, se $\pi(i_t) = \alpha(i_t) = j_t$, para $t$ = 1, 2, ..., $k$. Neste caso, $\pi$ é dita ser uma extensão de $\alpha$ em $\Pi_n$ e o conjunto $\Pi_\alpha$, constituído por todas estas permutações, é um subconjunto de $\Pi_n$. Mais formalmente, $\Pi_\alpha = \{\pi \in \Pi_n \mid \pi(i_t) = \alpha(i_t), t = 1, 2, ..., k\}$.

**Definição 2:** Seja um dado PQA($F$, $D$) de ordem $n$ e uma rotulação dos vértices de $K_F$ e de $K_D$ dada pelos elementos de $X = \{1, 2, ..., n\}$. Seja $\alpha$ uma $k$-restrição em $\Pi_n$. Chamamos de um PQA

[1] Abertura na embarcação que comunica o convés com a Praça de Máquinas (PM), fechada como se fosse um alçapão. Serve de passagem de equipamento, ventilação e de entrada para a iluminação natural da PM.

com $k$-restrições, ao problema quadrático de alocação PQA($F$, $D$) cujo conjunto de soluções viáveis é constituído por $\Pi_\alpha = \{\pi \in \Pi_n \mid \pi(i_t) = \alpha(i_t),\ t = 1, 2, ..., k\}$. Portanto, trata-se de um subproblema do PQA tradicional em que, dada uma permutação restrita $\alpha$ de ordem $k$ em $\Pi_n$, $\alpha = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \Lambda & i_k \\ j_1 & j_2 & \Lambda & j_k \end{bmatrix}$, deseja-se minimizar o custo correspondente a cada extensão de $\alpha$ em $\Pi_n$ ou seja, determinar $\pi_\alpha \in \Pi_\alpha$ que satisfaça:

$$\min_{\pi_\alpha \in \Pi_\alpha} \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} d_{\pi_\alpha(i)\pi_\alpha(j)} \quad . \tag{2}$$

Nesta abordagem, os ambientes ou as acomodações representam camarotes, banheiros, áreas de recreio, salões de refeição, cozinhas, copas, praça de máquinas, etc. O espaço total disponível no arranjo geral para as acomodações deve ser particionado em subespaços de tamanho unitário, chamadas células, onde cada ambiente considerado é composto por um conjunto de células adjacentes. As matrizes de fluxos e de distâncias que representam o problema são consideradas simétricas e com diagonais principais nulas. As coordenadas da matriz distância entre as células que compõe o convés são dadas pelas distâncias entre dois pontos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ , $d(x, y) = | x_1 - y_1| + | x_2 - y_2|$, conhecida como distância de Manhattan, e a matriz de fluxos representa o grau de afinidade entre os ambientes a serem nelas alocado, determinando se estes deverão ser mantidos mais próximos ou mais distantes no projeto do arranjo de espaços habitáveis. As entradas da matriz de fluxos devem refletir o conjunto de normas técnicas de órgãos brasileiros e internacionais que regulam o projeto e a construção naval, além dos critérios de ergonomia praticados neste tipo de projeto. Assim, as entradas da matriz de fluxo são determinadas de acordo com as diretrizes a seguir:

- **(i)** as células que pertencem ao mesmo ambiente devem possuir valores de fluxos suficientemente altos para mantê-las juntas;
- **(ii)** os valores de fluxos entre as células que compõem um ambiente e a células que compõem um outro ambiente devem ser iguais entre si, ou seja, definem-se valores de fluxos iguais entre as células de um ambiente com relação às do outro. Seus valores devem simular o grau de afinidade entre os dois ambientes;
- **(iii)** no caso de ambientes que não podem ou não devem ficar próximos, definem-se valores de fluxos nulos ou muito baixos entre as células de um ambiente com relação às do outro.

**Exemplo 1:** Este exemplo mostra um problema de arranjo de espaços habitáveis envolvendo 10 células com a existência de um grupo de camarotes ocupando 3 delas, cada uma denotada por CM, um banheiro ocupando somente 1 célula, denotada por B, um refeitório ocupando 2, ambas denotadas por R, uma copa ocupando 1 célula, denotada por CP e uma cozinha ocupando 3, denotadas, cada uma, por CZ. A Figura 1 mostra um arranjo para estes ambientes.

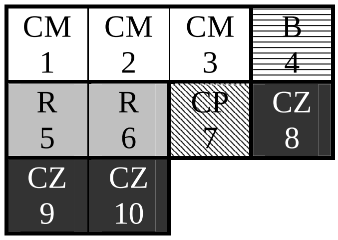


**Figura 1 – Arranjo de espaços habitáveis de um navio.**

Do ponto de vista arquitetônico, o arranjo dado na Figura 1 não corresponde a uma solução de boa qualidade, pois até mesmo um leigo seria capaz de justificar esta afirmação, argumentando que as células que compõem a cozinha estão alocadas em 2 ambientes não adjacentes.

A Figura 3 exibe as matrizes $F = [f_{ij}]$ e $D = [d_{ij}]$ para a instância da Figura 1. Para $i, j = 1, 2, ..., 10$, cada fluxo $f_{ij}$ é definido seguindo as normas anteriormente apresentadas e cada $d_{ij}$ é dada pela distância de Manhattan entre as células $i$ e $j$.

Para compreender a regra de construção da matriz de fluxos, observa-se através do exemplo que:

- **(i)** as células 1, 2 e 3 pertencem a um mesmo ambiente (CM) e $f_{1,2} = f_{1,3} = 50$, ou seja, possuem valores de fluxos suficientemente altos para mantê-las juntas;
- **(ii)** as células 1, 2 e 3 pertencem ao ambiente CM, a célula 4 pertence ao ambiente B, os ambientes CM e B possuem alto grau de afinidade e $f_{1,4} = f_{2,4} = f_{3,4} = 45$, ou seja, definem-se valores de fluxos iguais entre as células de um ambiente com relação às do outro e seus valores simulam o grau de afinidade entre os dois ambientes;
- **(iii)** as células 1, 2 e 3 pertencem ao ambiente CM, as células 5 e 6 pertencem ao ambiente R, os ambientes CM e R possuem baixo grau de afinidade e $f_{1,5} = f_{2,5} = f_{3,5} = f_{1,6} = f_{2,6} = f_{3,6} = 2$, ou seja, definem-se valores de fluxos muito baixos entre as células de um ambiente com relação às do outro.

A construção da matriz de distâncias é mais simples e constitui uma regra comumente utilizada na literatura (NUGENT *et al.*, 1968, HAHN e KRARUP, 2001). Por exemplo, observando-se a Figura 2 tem-se as distâncias $d_{12} = 1$, $d_{13} = 2$ e $d_{17} = 3$.

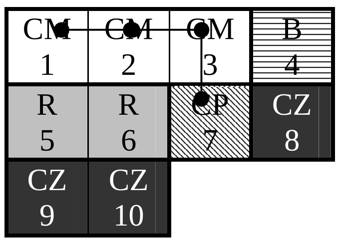


**Figura 2 – Distância de Manhattan entre duas células.**

Para $F$ e $D$ da Figura 3, a solução do PQA($F$, $D$), correspondente à permutação identidade em $\Pi_{10}$, dada na Figura 1, tem custo $Z_1 = 4128$.

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 50 & 50 & 45 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 50 & 0 & 50 & 45 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 50 & 50 & 0 & 45 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 45 & 45 & 45 & 0 & 5 & 5 & 5 & 20 & 20 & 20 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 0 & 50 & 45 & 30 & 30 & 30 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 50 & 0 & 45 & 30 & 30 & 30 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 45 & 45 & 0 & 45 & 45 & 45 \\ 5 & 5 & 5 & 20 & 30 & 30 & 45 & 0 & 50 & 50 \\ 5 & 5 & 5 & 20 & 30 & 30 & 45 & 50 & 0 & 50 \\ 5 & 5 & 5 & 20 & 30 & 30 & 45 & 50 & 50 & 0 \end{bmatrix}; D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Figura 3 – Matrizes de fluxo e de distâncias para o problema de arranjo de navios.**

A Figura 4 mostra um arranjo de melhor qualidade, que também é uma solução da instância PQA($F$, $D$), para $F$ e $D$ dados na Figura 3. O custo desta solução é $Z_2$ = 2436 e a solução (arranjo) é dada pela permutação $\pi$ = [ 1 5 8 9 2 6 7 10 3 4]. Veja, que valor de $Z_2$ é significativamente inferior a $Z_1$, para o arranjo da Figura 1.

| | | | |
|---|---|---|---|
| CM 1 | R 5 | CZ 8 | CZ 9 |
| CM 2 | R 6 | CP 7 | CZ 10 |
| CM 3 | B 4 | | |

**Figura 4 – Arranjo de espaços habitáveis de um navio.**

Uma ferramenta de apoio à decisão para a elaboração de projetos de arranjo de navios pode ser desenvolvida a partir desta abordagem, fornecendo diversas soluções de boa qualidade que possam ser avaliadas e manipuladas por especialistas da área, tornando seu trabalho mais eficiente e seguro.

## 3. Classes laterais na resolução do PQA-*k*

As definições de subgrupos estabilizadores e classes laterais estão intrinsecamente relacionadas ao conjunto de soluções do PQA com *k*-restrições. Desta forma, para facilitar ao leitor, algumas definições utilizadas, precisam ser introduzidas aqui. Para maiores detalhes, consulte SERESS (2003) e LOIOLA (2007).

**Definição 3:** Sejam $G$ um conjunto qualquer e $\circ : G \times G \rightarrow G$ uma operação binária e fechada em $G$ tal que $\forall x_1, x_2 \in G \Rightarrow x_1 \circ x_2 \in G.$ A estrutura algébrica ($G$, $\circ$) é um grupo se, e somente se, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- **(i)** associatividade: $\forall x_1, x_2, x_3 \in G \Rightarrow (x_1 \circ x_2) \circ x_3 = x_1 \circ (x_2 \circ x_3)$;
- **(ii)** existência do elemento neutro: $\exists\, e \in G, \forall\, x \in G \Rightarrow x \circ e = e \circ x = x$;
- **(iii)** existência do elemento inverso: $\forall\, x \in G, \exists\, x^{-1} \in G \Rightarrow x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.

**Definição 4:** Um subgrupo $H$ de um grupo $G$ é um subconjunto de $G$ tal que $H$ é ele próprio um grupo com a mesma operação definida em $G$. Quando $H$ é subgrupo de $G$, denota-se $H \leq G$.

**Definição 5:** Seja $G$ um grupo finito, um conjunto $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_r\} \subset G$ é um conjunto gerador de $G$, se $\forall \beta \in G$, $\beta = \alpha_{i_1} \circ \alpha_{i_2} \circ \ldots \circ \alpha_{i_m}$ ,onde $i_j \in \{1, 2, ..., r\}$, $j$ =1, 2, ..., $m$ e $m \geq 1$. Ou seja, $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_r\}$ é um conjunto gerador de $G$ se e somente se todo elemento em $G$ puder ser escrito como um produto finito de $m$ elementos, dentre os $r$ elementos do conjunto gerador. Quando se deseja destacar o conjunto gerador de um grupo, este pode ser denotado por $G = \langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \rangle$.

**Definição 6:** Sejam $G$ um grupo, $H$ um subgrupo de $G$ e $\beta \in G$. Uma classe lateral à direita de $H$ em $G$ é um conjunto da forma: $H \circ \beta = \{\alpha \circ \beta : \alpha \in H\}$. Definição análoga pode ser dada para classe lateral à esquerda de $H$ em $G$.

Diversas estruturas conhecidas formam grupos. Por exemplo, o conjunto dos inteiros munido da operação de adição forma um grupo, denotado por (Z, +). Trata-se de um grupo infinito. Um dos mais importantes grupos finitos é o conjunto de todas as permutações a $n$ elementos, munido da composição de funções, denotado por $(\Pi_n, \circ)$, e conhecido como o grupo simétrico de ordem $n$. De agora em diante, este é o grupo que vamos trabalhar.

**Definição 7:** Seja $X = \{1, 2, ..., n\}$, para $i \in X$, o subgrupo estabilizador de $i$ em $\Pi_n$ é um conjunto constituído pelas permutações de $\Pi_n$ que fixam $i$, ou seja, $G_i = \{\alpha \in \Pi_n : \alpha(i) = i\}$. O conjunto de representantes de suas classes laterais é denotado por $U_i = \{\mu_1^i, \mu_2^i, \ldots, \mu_n^i\}$.

**Definição 8:** Seja $G \leq \Pi_n$ agindo em $X$. Uma base $B = [b_1, b_2, ..., b_k]$ para $G$ é uma seqüência finita de elementos distintos de $X$ tal que $G_{b_1, b_2, \ldots, b_k} = \{ id \}$.

Considere $B = [b_1, b_2, ..., b_{n-1}]$ uma base para $\Pi_n$. Para $t$ = 2, 3, ..., $n$, sejam $G^{(1)} = \Pi_n$, o grupo simétrico, e $G^{(t)} = G_{b_1, b_2, \ldots, b_{t-1}}$, o subgrupo estabilizador de $G^{(1)}$. Uma cadeia de subgrupos estabilizadores associada à $B$ é dada por:

$$\Pi_n \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \ldots \geq G^{(t)} \geq G^{(t+1)} = \{ id \}. \tag{3}$$

O Teorema 1, cujo prova encontra-se em LOIOLA (2007), mostra que uma classe lateral do subgrupo estabilizador $G^{(k+1)}$ coincide com o conjunto de soluções do PQA-$k$, para uma dada permutação restrita $\alpha$.

**Teorema 1:** Seja $G^{(k+1)}$ um subgrupo estabilizador da cadeia definida em (3), associada à base $B = [1, 2, ..., k]$. Considere um PQA com $k$-restrições, de ordem $n$, e uma alocação parcial dada por $\alpha$, cujo domínio é $D(\alpha) = \{1, 2, ..., k\}$. O conjunto de soluções do PQA-$k$, $\Pi_\alpha = \{ \pi \in \Pi_n \mid \pi(i) = \alpha(i), i = 1, 2, ..., k\}$, é uma classe lateral do subgrupo estabilizador $G^{(k+1)}$ em $\Pi_n$, associado à base $B$.

Em projeto de navios, onde são considerados mais de um convés, as seguintes etapas devem ser observadas:

**(i)** determinar uma solução para o problema de arranjo de espaços habitáveis do primeiro convés. Isto equivale a resolver, não necessariamente de maneira ótima, um PQA de ordem $n$;

**(ii)** identificar, no arranjo obtido na etapa anterior, os $k$ ambientes que deverão estar presentes nos demais conveses com sua posição preservada em relação ao primeiro convés. Isto equivale a determinar uma permutação restrita $\alpha$ em $\Pi_n$;

**(iii)** finalmente, determinar uma solução para o problema de arranjo dos espaços habitáveis nos demais conveses, considerando-se as restrições impostas por $\alpha$, obtida pelo arranjo determinado para o primeiro convés. Isto equivale a resolver um PQA-$k$, tendo $\alpha$ como alocação parcial. Neste último caso, o conjunto $\Pi_\alpha$ é a classe lateral de $G^{(k+1)}$ que forma o conjunto de soluções do PQA-$k$.

O PQA-$k$ pode ser resolvido utilizando-se uma abordagem por Teoria dos Grupos. É possível, por uma heurística gulosa, alcançar resultados satisfatórios para uma geração aleatória de elementos de $\Pi_\alpha$, que forma o conjunto de soluções do PQA-$k$. A geração destes elementos é realizada, utilizando-se os elementos de um conjunto gerador de $G^{(k+1)}$ que, quando operados com um representante de $\Pi_\alpha$, resultam em elementos desta mesma classe lateral. O representante de classe no problema do arranjo físico do navio é dado pela permutação restrita que representa a solução obtida para o arranjo do primeiro convés.

Dada uma permutação restrita $\alpha$ em $\Pi_n$, tem-se que o conjunto $\Pi_\alpha = \{ \pi \in \Pi_n \mid \pi(i) = \alpha(i),\ i = 1, 2, ..., k\}$ representa uma classe lateral de $G^{(k+1)}$ em $\Pi_n$. Os elementos do domínio $D(\alpha) = \{1, 2, ..., k\}$ formam uma base $B' = [1, 2, ..., k]$ que permite determinar um subgrupo estabilizador $G^{(k+1)}$. LOIOLA (2007) mostra que $S = \{ (1, 2), (2, 3), ..., (n-1, n) \}$ é um conjunto gerador forte de $\Pi_n$ associado à base $B = [1, 2, ..., n-1]$. Finalmente, tem-se que $G^{(k+1)} < \Pi_n$ é gerado por $S \cap G^{(k+1)} = \{ (k+1, k+2), (k+2, k+3), ..., (n-1, n) \}$. A composição de um elemento gerado aleatoriamente em $G^{(k+1)}$ com um representante da classe lateral $\Pi_\alpha$ gera elementos aleatórios em $\Pi_\alpha$, ou seja, gera uma solução do PQA-$k$.

CELLER *et al*. (1995) apresentam um algoritmo bastante prático para construir elementos aleatórios de um grupo finito. Seus resultados teóricos provam que este algoritmo produz elementos distribuídos uniformemente no grupo e foi utilizado neste trabalho. Sua descrição é apresentada como a seguir. Seja um grupo $G$ descrito por um conjunto gerador $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\} \subset G$. Seleciona-se um inteiro $T > r$ e constrói-se uma seqüência $S$ de tamanho $T$. As entradas de $S$ são elementos do conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}$ com repetição. O conjunto formado pelos elementos de $S$ é um conjunto gerador para $G$. A operação básica do algoritmo consiste em tomar um par de inteiros aleatórios $i \neq j$, para $i, j \in \{1, 2, ..., T\}$ e realizar a troca de $s_i$ por $s_i \circ s_j$ ou por $s_j \circ s_i$. Recomenda-se definir um passo de pré-processamento para executar esta operação um número de vezes $R$ qualquer. Após este passo, a execução da operação básica retorna o valor resultante de $s_i$, que representa um elemento aleatório no grupo $G$.

As permutações geradas em $G^{(k+1)}$, quando operadas com um representante da classe lateral $\Pi_\alpha$, fornecem um elemento nesta classe lateral, ou seja, fornece uma solução do PQA-$k$. Além disso, é importante destacar que, quando aplicado a projeto de navios, a permutação que representa a solução obtida para o arranjo do primeiro convés também pode ser utilizada como representante da classe lateral formada por $\Pi_\alpha$.

## 4. Experimentos computacionais com o algoritmo CGS

No caso do PQA-*k*, para os experimentos computacionais foram consideradas somente as instâncias da classe "nav[*n*]e[*b*]", onde *n* é a ordem do problema e assume os valores 36, 50 e 72 e *b* varia de 1 a 3. Tais instâncias foram geradas com regras estabelecidas em SCHACHTER *et al*. (2006). Desta forma, tem-se um total de 9 instâncias.

Suponha que, para *b* = 1, 2 e 3, cada instância de ordem *n* representa um dos três conveses de um dado navio. Iniciando-se a partir do convés de número 3, encontra-se uma solução $\alpha$ para o PQA dado pela instância nav[*n*]e3, a solução $\alpha$ é utilizada para resolver o PQA-*k*, dado pela instância nav[*n*]e1, o que é feito tomando-se $\alpha$ como representante da classe lateral $\Pi_\alpha$. O método de resolução utilizado foi uma heurística gulosa para geração aleatória de elementos em $\Pi_\alpha$, classe lateral do subgrupo $G^{(k+1)}$ em $\Pi_n$, que forma o conjunto de soluções do PQA-*k*.

O Algoritmo 1 é um algoritmo guloso denominado CGS (*Coset Greedy Search*) possui um parâmetro *T*, que determina o tamanho do conjunto gerador *S* e outro, que determina o número de iterações *it*. Neste trabalho, *T* assume o valor 120 e *it*, o valor 1000 em todos os experimentos.

```
procedimento Coset_Greedy_Search (n, k, α)
(*      entrada:        inteiro n da ordem do problema,
                        inteiro k do número de restrições, α ∈ Π_α.            *)
início
        c* = ∞;
        S ← conjunto_gerador_forte_subgrupo_estabilizador(n, k);
        enquanto critério de parada não é satisfeito faça
                β ← gera_elemento_aleatório_grupo(S);
                β ← β ∘ α;
                β ← LocalSearch(β, k);
                se custo(β) < c* então
                        α* ← β;
                        c* ← custo(β);
                fim se;
        fim enquanto;
fim procedimento.
```

**Algoritmo 1 – Algoritmo CGS (*Coset Greedy Search*).**

A Tabela 1 mostra os resultados para as instâncias da classe nav[*n*]e[*b*]. Para cada instância, a tabela mostra o nome da instância, o melhor custo *Z* alcançado para o PQA, que foram apresentados para estas instâncias em LOIOLA (2007); a instância que deu origem a $\pi_\alpha$, que é o representante da classe lateral dada por $\Pi_\alpha$; o custo de $\pi_\alpha$; o número de restrições *k*; o custo alcançado para o PQA-*k* pelo algoritmo CGS; a distância entre a solução alcançada para o PQA-*k* e o custo *Z* associado ao PQA. A última linha mostra a média dos custos e também das distâncias entre as soluções do PQA-*k* e do PQA.

Tomando-se como referência o melhor custo *Z* alcançado para o PQA, observa-se que as soluções obtidas pelo algoritmo CGS estão em média a 5% de *Z*.

| **inst.** | ***Z*** | **inst. de $\pi_\alpha$** | $Z_{\pi_\alpha}$ | ***k*** | **CGS** | **dist.** | **seg.** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nav36e1 | 71168 | nav36e2 | 88624 | 6 | 73604 | 0,03 | 0,75 |
| nav36e2 | 69800 | nav36e3 | 84598 | 6 | 70486 | 0,01 | 0,89 |
| nav36e3 | 62442 | nav36e1 | 80022 | 6 | 66100 | 0,06 | 0,75 |
| nav50e1 | 126956 | nav50e2 | 167264 | 5 | 131496 | 0,04 | 1,10 |
| nav50e2 | 182550 | nav50e3 | 227510 | 5 | 183250 | 0,00 | 2,90 |
| nav50e2 | 134594 | nav50e1 | 168146 | 5 | 140930 | 0,05 | 1,76 |
| nav72e1 | 285504 | nav72e2 | 398356 | 6 | 332464 | 0,16 | 1,57 |
| nav72e2 | 496824 | nav72e3 | 584060 | 6 | 539160 | 0,09 | 4,68 |
| nav72e3 | 402516 | nav72e1 | 513692 | 6 | 431990 | 0,07 | 3,47 |
| **Média** | **203594,9** | | **256919,1** | | **218831,1** | **0,05** | |

**Tabela 1 – Resultados obtidos com CGS para a classe de instâncias nav[*n*]e[*b*] do PQA-*k*.**

O experimento a seguir foi realizado para instâncias da classe "nug[*n*]", onde *n* é a ordem do problema e assume os valores 20, 21, 24, 25, 27, 28 e 30 (NUGENT *et al.*, 1968). Todas estas instâncias possuem uma solução ótima conhecida, além disso, suas matrizes de distâncias são determinadas pela distância de Manhattan, de uma grade retangular. Portanto, são semelhantes às matrizes de distâncias das instâncias associadas ao problema de arranjo de acomodações em conveses de navios. Neste experimento, a permutação restrita $\alpha$ é formada pelos *k*-ésimos primeiros elementos da solução ótima. A partir do conjunto gerador forte de $G^{(k+1)}$ e dos Algoritmos 1 e 2 uma extensão de $\alpha$ é, então, encontrada, ou seja, o representante da classe lateral, $\pi_\alpha \in \Pi_\alpha$, fica determinado.

A Tabela 2 mostra os resultados para as instâncias da classe nug[*n*]. Para cada instância, a tabela mostra o nome da instância, o custo ótimo $Z^*$ conhecido para o PQA, o custo do representante $\pi_\alpha$, o número de restrições *k* e o custo do PQA-*k* alcançado por CGS. Em todas as instâncias o custo ótimo foi alcançado.

| **inst.** | ***Z****** | $Z_{\pi_\alpha}$ | ***k*** | **CGS** | **seg.** |
|---|---|---|---|---|---|
| nug20 | 2570 | 3248 | 4 | 2570 | 0,19 |
| nug21 | 2438 | 3142 | 4 | 2438 | 0,24 |
| nug24 | 3488 | 4778 | 4 | 3488 | 0,45 |
| nug25 | 3744 | 4558 | 4 | 3744 | 0,50 |
| nug27 | 5234 | 6666 | 4 | 5234 | 0,76 |
| nug28 | 5166 | 6454 | 4 | 5166 | 0,67 |
| nug30 | 6124 | 7046 | 4 | 6124 | 1,09 |

**Tabela 2 – Resultados obtidos com CGS para a classe de instâncias nug[*n*] do PQA-4.**

## 5. Considerações Finais

É preciso destacar que uma ferramenta de apoio à decisão para o desenvolvimento de projetos de arranjo de navios não precisa requerer o alcance do ótimo global. Neste caso, é até mesmo necessário que várias soluções de boa qualidade sejam oferecidas, não somente por ser preferível encontrar mais rapidamente um conjunto de soluções de boa qualidade, do que achar demoradamente a melhor solução possível, como acontece na maioria dos problemas práticos, quando modelados por um problema NP-árduo, mas, sobretudo, por se tratar de uma ferramenta de apoio à decisão do projetista do navio. O propósito deste tipo de aplicação não é substituir o especialista na área, mas dar a ele uma ferramenta que o auxilie na finalização de seus projetos, garantindo mais qualidade, segurança e eficiência. Neste sentido, o método de resolução apresentado para o PQA-*k* parece satisfatório, já que ele fornece várias soluções de boa qualidade, permitindo ao projetista controlar as restrições de verticalidade entre conveses, solucionando de maneira adequada o problema de definição da infra-estrutura de projeto de navios, no que se refere à disposição das acomodações e ao alinhamento vertical de certos compartimentos com relação a suas vizinhanças superiores e inferiores entre os diversos conveses. Finalmente, nem todas as normas e critérios de ergonomia podem ser facilmente representados na formulação proposta. Portanto, na prática, recomenda-se identificar um conjunto de soluções de boa qualidade para que possam ser avaliadas de forma mais ampla pelo especialista.

**Agradecimentos:** o segundo autor deste trabalho agradece o suporte financeiro dado pelo CNPq.

## 6. Bibliografia

CELLER, F., LEEDHAM-GREEN, C. R., NIEMEYER, A. C., O'BRIEN, E. A., “Generating random elements of a finite group”, *Communications in Algebra* v. 23, n. 13, pp. 4931-4948, 1995.

FONSECA M. M., *Arte naval*, Serviço de documentação da Marinha, Volume I e II, 2005.

HAHN, P.M., KRARUP J., “A hospital facility layout problem finally solved”, *Journal of Intelligent Manufacturing* v. 12, n. 5-6, pp. 487-496, 2001.

SCHACHTER, R. D., ABREU, N. M. M., FREIRE, G. F., “Desenvolvimento de um Programa Computacional para a Automatização do Arranjo de Conveses de Navios e Embarcações, aplicando-se o Modelo Matemático do Problema de Alocação Quadrática (PQA)”. In: Anais da SOBENA 2006, 21º Congresso Nacional de Transportes Marítimos, Construção Naval e Offshore, pp. 1-27, Rio de Janeiro, Brasil, Novembro 2006.

LOIOLA, E. M., *Teoria computacional dos grupos no problema quadrático de alocação restrito*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.

NUGENT, C. E., VOLLMANN T. E., RUML J., “An experimental comparison of techniques for the assignment of facilities to locations”, *Operations Research* v. 16, pp. 150-173, 1968.

SERESS, Á., *Permutation group algorithms*. Edition 1, United States of America, Cambridge University Press, 2003.