



SPOLM 2008

ISSN 2175-6295

Rio de Janeiro- Brasil, 05 e 06 de agosto de 2008.

ALGORITMO PROJECT UM MÉTODO ALTERNATIVO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Nelson Hein, Dr. Eng.

Programa de Pós-Graduação em Ciências Contábeis e Administração
Universidade Regional de Blumenau
Blumenau – SC - Brasil
hein@furb.br

Cláudio Loesch, Dr. Eng.

Programa de Pós-Graduação em Ciências Contábeis e Administração
Universidade Regional de Blumenau
Blumenau – SC - Brasil
loesch@furb.br

Thiago Hermenegildo de Faria

Programa de Pós-Graduação em Ciências Contábeis e Administração
Universidade Regional de Blumenau
Blumenau – SC - Brasil
tiagogildo@hotmail.com

RESUMO

O método proposto, denominado PROJECT, apresenta uma abordagem algorítmica de resolução de problemas de programação linear (PL) distinta do método SIMPLEX. Parte de um ponto do espaço vetorial do problema, o qual é deslocado numa direção de crescimento da função objetivo, inicialmente tomado como o seu gradiente, de forma a situar-se sobre um hiperplano fronteira de uma das restrições do modelo. O espaço projetivo do gradiente é sucessivamente reduzido em dimensionalidade cada vez em que o ponto de busca é deslocado sobre um hiperplano diferente. O procedimento prossegue até que a redução de dimensionalidade determine num ponto correspondente a uma solução básica. Existindo uma solução ótima, a mesma será encontrada pelo algoritmo. A fundamentação matemática do método é desenvolvida, um algoritmo é proposto e exemplos são apresentados.

Palavras-chave: Otimização. Programação Linear. Project Method.

ABSTRACT

The proposed method, called PROJECT, presents an algorithmic approach to solving problems of linear programming (PL) distinct from the SIMPLEX method. Starting from the point of vectorial space of the problem, which is dislocated in a direction of growth from the objective function, initially taken like its gradient, in a way that situates it on a hyper-plane frontier of one the restrictions of the model. The projective space of the gradient is successively reduced in dimensionality each time that the search point is dislocated above a different hyper-plane. The procedure continues until the reduction of dimensionality

determines a basic solution in a corresponding point. If a good solution exists, it will be found by the algorithm. The mathematical foundation of the method is developed, an algorithm is proposed and examples are presented.

Key words: Optimization. Linear Programming. Project Method.

1. INTRODUÇÃO

Durante a 2ª. Guerra Mundial a United States Air Force formou um grupo de pesquisadores, sob a direção de Marshall K. Wood, para tentar solucionar problemas de alocação de recursos limitados de modo a maximizar ou minimizar algum objetivo. George B. Dantzig era um dos membros deste grupo e, embora nenhum método de expressivo sucesso fosse descoberto durante a guerra, ele formulou o problema geral de programação linear, vindo a inventar o método simplex de soluções em 1947. Contudo, seu trabalho só foi amplamente reconhecido em 1951, quando a Cowles Commission Monograph no. 13 o publicou [KOOP51].

Em relação à redução de operações aritméticas e espaço de armazenagem, a forma produto da inversa foi desenvolvida em 1953. O método Simplex revisado foi publicado neste ano [DANT53-1]. Em 1957 outros desenvolvimentos ocorreram. O aperfeiçoamento das técnicas de inversão de matrizes, a manobra de variáveis implicitamente limitadas e a introdução do algoritmo dual, cuja teoria já havia sido lançada em 1953 [DANT53-2].

Desde 1957 todos os aspectos da programação linear foram desenvolvidos num passo veloz. Com a publicação do algoritmo de Dantzig-Wolfe [DANT59], o interesse nas técnicas de decomposição cresceu muito.

Embora existam publicações de métodos competitivos com o simplex, o sucesso dos mesmos ou é restrito a classes particulares de problemas, ou sua eficiência computacional não é superior a do método Simplex, como são os casos do algoritmo Hungariano [KUHN55] e o algoritmo Out-of-Kilter [FULK61], que foram propostos, porém generalizações destes procedimentos foram abandonados. Khachiyan [KHAC79] publicou, em 1979, um algoritmo polinomial limitado para encontrar um ponto interior do conjunto de soluções compatíveis de um problema de programação linear, desde que os coeficientes da mão direita sejam números inteiros. Embora esta condição não constitua um problema prático, e apesar de não haver inversão de matrizes no algoritmo, problemas sérios de precisão muito elevada e de números excessivamente elevados impossibilitam a implementação do algoritmo.

Mais recentemente, Rödder (em [RÖDD80] e [RÖDD81]) publicou o algoritmo Project, que combina duas idéias: a de troca múltipla na base e a pesquisa do ótimo na direção da projeção do vetor gradiente da função objetivo sobre o subespaço da intersecção de vários hiperplanos. Resultados de testes computacionais pareceram apontar eficiência aproximada ao do método Simplex. Porém, desenvolvimentos posteriores foram abandonados. O presente trabalho retoma a idéia do Project com modificações.

O problema de PL tratado possui a estrutura

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ \text{sujeito a } \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \end{aligned} \quad (1)$$

onde

- $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^n$ é a matriz de coeficientes da função-objetivo;
- \mathbf{A} é uma matriz $m \times n$ de i -ésima linha $\mathbf{a}_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$, para a restrição $\mathbf{a}_i \mathbf{x} \leq b_i$;
- $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ e $\mathbf{b} = [b_i] \in \mathcal{R}^m$. O vetor \mathbf{x} deve ser determinado de forma a satisfazer (1).

A não-negatividade das variáveis, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, não é requisito do método. Se alguma variável x_i deve ser não-negativa, uma restrição $-x_i \leq 0$ deve ser incluída em $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$. Também não é exigido que os coeficientes b_i sejam não-negativos.

2. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA PRELIMINAR

Nos fundamentos do método um vetor \mathbf{d} representará alguma direção de crescimento da função objetivo quando um ponto é deslocado nesta direção.

Lema 1. Deslocamento de pontos numa direção \mathbf{d} . Sejam $\mathbf{x}_0, \mathbf{d} \in \mathcal{R}^n, \varepsilon > 0$ e

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{d} \quad (2)$$

um deslocamento de \mathbf{x}_0 numa direção \mathbf{d} , a qual satisfaz $\mathbf{c}'\mathbf{d} > 0$. Definindo-se o conjunto de *índices ativos em \mathbf{A}* por

$$I_A = \{i \mid \mathbf{a}_i \mathbf{d} > 0; \mathbf{a}_i \text{ é linha de } \mathbf{A}\} \quad (3)$$

valem, então, as propriedades abaixo:

- (a) se $\varepsilon > 0$ então $\mathbf{c}'\mathbf{x}_1 > \mathbf{c}'\mathbf{x}_0$;
- (b) se $\mathbf{a}_i \mathbf{d} < 0$ para $i = 1, \dots, m$ o problema (1) possui solução ótima ilimitada;
- (c) se I_A é não-vazio e

$$\varepsilon = \min_{i \in I_A} \{(b_i - \mathbf{a}_i \mathbf{x}_0) / \mathbf{a}_i \mathbf{d}\} \quad (4)$$

então $\mathbf{a}_i \mathbf{x}_1 \leq b_i$ para todo $i \in I_A$. Em particular, para $k \in I_A$ tal que

$$\varepsilon = (b_k - \mathbf{a}_k \mathbf{x}_0) / \mathbf{a}_k \mathbf{d}$$

tem-se $\mathbf{a}_k \mathbf{x}_1 = b_k$.

Demonstração.

(a) Pré-multiplicando (2) por \mathbf{c}' obtêm-se $\mathbf{c}'\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}'\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{c}'\mathbf{d}$. Dado que $\varepsilon > 0$ e $\mathbf{c}'\mathbf{d} > 0$, resulta $\mathbf{c}'\mathbf{x}_1 > \mathbf{c}'\mathbf{x}_0$.

(b) Suponha $\mathbf{a}_i \mathbf{d} < 0$ para $i = 1, \dots, m$. Tome-se

$$\bar{\varepsilon} = \max_{i=1, \dots, m} \{(b_i - \mathbf{a}_i \mathbf{x}_0) / \mathbf{a}_i \mathbf{d}\}$$

e, assim, sempre que $\varepsilon \geq \bar{\varepsilon}$ tem-se $\varepsilon \geq (b_i - \mathbf{a}_i \mathbf{x}_0) / (\mathbf{a}_i \mathbf{d})$ ou seja, $\mathbf{a}_i \mathbf{x}_1 \leq b_i$ para $i = 1, \dots, m$.

Seja, além do mais, um número real qualquer $M > 0$ e $\hat{\varepsilon} = (M - \mathbf{c}'\mathbf{x}_0) / (\mathbf{c}'\mathbf{d})$. Sempre que $\varepsilon > \hat{\varepsilon}$ tem-se $z = \mathbf{c}'\mathbf{x}_1 > M$. Por tomar $\varepsilon > \max\{\bar{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}\}$ tem-se $z = \mathbf{c}'\mathbf{x}_1 > M$ e $\mathbf{a}_i \mathbf{x}_1 \leq b_i$ para $i = 1, \dots, m$. Portanto, a solução ótima é ilimitada.

(c) Seja ε escolhido mediante (4). Então $(b_i - \mathbf{a}_i \mathbf{x}_0) / \mathbf{a}_i \mathbf{d} \geq \varepsilon$ para todo $i \in I_A$, que implica em $\mathbf{a}_i (\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{d}) \leq b_i$ e, mediante (2), em $\mathbf{a}_i \mathbf{x}_1 \leq b_i$. A partir de k tal que $(b_k - \mathbf{a}_k \mathbf{x}_0) / \mathbf{a}_k \mathbf{d} = \varepsilon$ obtém-se $\mathbf{a}_k \mathbf{x}_1 = b_k$.

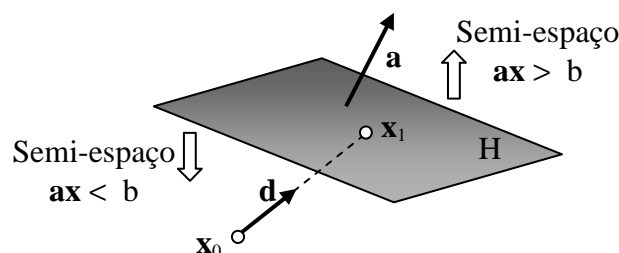


Figura 1. Ponto \mathbf{x}_0 em \mathfrak{R}^3 e seu deslocamento na direção \mathbf{d} , determinando um novo ponto \mathbf{x}_1 sobre um hiperplano $H = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}\mathbf{x} = b\}$ de normal \mathbf{a} .

Lema 2. Projção de um vetor sobre um subespaço vetorial. Seja $\boldsymbol{\alpha}$ uma matriz $k \times n$, $k < n$, de linhas $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, as quais formam uma base de um subespaço vetorial W de \mathfrak{R}^n , e seja \mathbf{c} um vetor em \mathfrak{R}^n . Então a projeção de \mathbf{c} sobre W^\perp , o complemento ortogonal de W , é

$$\mathbf{d} = \text{proj}_{W^\perp} \mathbf{c} = [\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}')^{-1}\boldsymbol{\alpha}]\mathbf{c} \quad (5)$$

onde \mathbf{I}_n é a matriz identidade de ordem n .

Demonstração. O complemento ortogonal de W em \mathfrak{R}^n ,

$$W^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \mathbf{a}_i\mathbf{x} = 0; \text{ para todo } \mathbf{a}_i \text{ na base } \{\mathbf{a}_1', \dots, \mathbf{a}_k'\} \text{ de } W\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathfrak{R}^n = W \oplus W^\perp$. Então $\mathbf{c} = \mathbf{d} + \mathbf{f}$, para vetores únicos $\mathbf{d} \in W^\perp$ e $\mathbf{f} \in W$, as projeções de \mathbf{c} nestes dois subespaços. Para $\mathbf{f} \in W$ existem números reais λ_i ($i = 1, \dots, k$) tais que $\mathbf{f} = \lambda_1\mathbf{a}_1' + \dots + \lambda_k\mathbf{a}_k'$. Utilizando o vetor $\boldsymbol{\Lambda} = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k]'$, e lembrando que $\boldsymbol{\alpha}' = [\mathbf{a}_1' \dots \mathbf{a}_k']$, \mathbf{f} pode ser matricialmente expresso pelo produto escalar $\mathbf{f} = \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Lambda}$ e, assim,

$$\mathbf{c} = \mathbf{d} + \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Lambda}.$$

Pré-multiplicando por $\boldsymbol{\alpha}$,

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{c} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{d} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Lambda}.$$

Mas $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ pois $\mathbf{a}_i\mathbf{d} = 0$ ($i = 1, \dots, k$), dado que $\mathbf{a}_i \in W$ e $\mathbf{d} \in W^\perp$. Resulta daí

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{c} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Lambda}.$$

Dado que $k < n$ e que as linhas \mathbf{a}_i de $\boldsymbol{\alpha}$ são linearmente independentes, tem-se $\text{rank}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}') = k$, a dimensão da matriz quadrada $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$, que é, portanto, invertível, e assim

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}')^{-1}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{c}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{c} - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{I}_n\mathbf{c} - \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}')^{-1}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{c}$$

$$\mathbf{d} = [\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}')^{-1}\boldsymbol{\alpha}]\mathbf{c}.$$

Considerando o complemento ortogonal de \mathbf{a}_i como $\mathbf{a}_i^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \mathbf{a}_i\mathbf{x} = 0\}$, tem-se, pela definição, $W^\perp = \bigcap \mathbf{a}_i^\perp$.

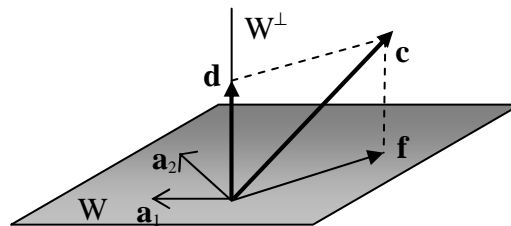


Figura 2. Subespaços W (base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$) e W^\perp e decomposição $\mathbf{c} = \mathbf{d} + \mathbf{f}$, onde $\mathbf{d} \in W^\perp$ e $\mathbf{f} \in W$.

Para $\mathbf{d} = \text{proj}_{W^\perp} \mathbf{c}$ tem-se $\mathbf{c}'\mathbf{d} = (\mathbf{d} + \mathbf{f})'\mathbf{d} = \mathbf{d}'\mathbf{d} + \mathbf{f}'\mathbf{d} = \mathbf{d}'\mathbf{d}$. Portanto, se $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, o que ocorre quando \mathbf{c} não está contido em W , tem-se $\mathbf{c}'\mathbf{d} > 0$, que satisfaz à hipótese do lema 1.

Seja um ponto \mathbf{x}_0 de \mathfrak{R}^n que satisfaz $k < n$ equações lineares $\mathbf{a}_i\mathbf{x}_0 = b_i$ para $i = 1, \dots, k$. Será provado que seu deslocamento sobre um novo hiperplano $H = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_{k+1}\mathbf{x} = b_{k+1}\}$, numa

direção \mathbf{d} contida em W^\perp , onde W possui base formada pelos vetores \mathbf{a}_i , será um ponto \mathbf{x}_1 que satisfaz as mesmas k equações lineares satisfeitas por \mathbf{x}_0 , além de satisfazer adicionalmente mais uma equação linear determinada pelo hiperplano H .

Lema 3. Sejam:

- (a) $\mathbf{x}_0 \in \mathfrak{R}^n$ tal que $\mathbf{a}_i \mathbf{x}_0 = b_i$ para $i = 1, \dots, k$ onde $k < n$;
- (b) $\{\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_k\}$ uma base de um subespaço W de \mathfrak{R}^n ;
- (c) $\mathbf{d} = \text{proj}_{W^\perp} \mathbf{c}$;
- (d) \mathbf{a}_{k+1} é uma matriz-linha tal que $\mathbf{a}_{k+1} \mathbf{d} \neq 0$;
- (e) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \left(\frac{b_{k+1} - \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{x}_0}{\mathbf{a}_{k+1} \mathbf{d}} \right) \mathbf{d}$ (6)

então $\mathbf{a}_i \mathbf{x}_1 = b_i$ para $i = 1, \dots, k+1$. Ademais \mathbf{a}_{k+1} é linearmente independente aos vetores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$.

Demonstração. Pré-multiplicando (6) por \mathbf{a}_i

$$\mathbf{a}_i \mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_i \mathbf{x}_0 + \left(\frac{b_{k+1} - \mathbf{a}_{k+1} \mathbf{x}_0}{\mathbf{a}_{k+1} \mathbf{d}} \right) \mathbf{a}_i \mathbf{d}, \text{ para } i = 1, \dots, k$$

mas $\mathbf{a}_i \mathbf{d} = 0$, pois $\mathbf{d} \in W^\perp$, enquanto que $\mathbf{a}_i \in W$. Daí,

$$\mathbf{a}_i \mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_i \mathbf{x}_0 = b_i \quad \text{para } i = 1, \dots, k.$$

Da mesma forma, pré-multiplicando (6) por \mathbf{a}_{k+1} resulta em

$$\mathbf{a}_{k+1} \mathbf{x}_1 = b_{k+1}.$$

Se \mathbf{a}_{k+1} fosse linearmente dependente aos vetores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, haveriam escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tais que $\mathbf{a}_{k+1} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$. Assim $\mathbf{a}_{k+1} \mathbf{d} = (\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k) \mathbf{d} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{d} + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k \mathbf{d} = \lambda_1 0 + \dots + \lambda_k 0 = 0$, uma contradição com a hipótese.

O emprego repetido do lema 3 permite calcular uma seqüência $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ onde cada ponto \mathbf{x}_k ($k = 1, \dots, n$) é calculado a partir do anterior. Isto acarreta na construção de subespaços W_0, W_1, \dots, W_n onde a base de W_k ($k = 1, \dots, n$) é obtida por unir-se um vetor à base de W_{k-1} . O ponto de partida W_0 é um subespaço nulo, sem vetores na base. Assim, $\dim W_k = k$, o número de equações lineares atendidas. Como $n = \dim W_k + \dim W_k^\perp$, tem-se uma correspondente redução progressiva na dimensão ($n - k$) dos complementos ortogonais W_k^\perp .

É fundamental testar, quando W_n acabou de ser calculado, se o correspondente ponto \mathbf{x}_n é uma solução compatível ao problema (1) de PL e, caso afirmativo, se é a solução ótima. A condição de solução ótima pode ser testada como segue.

Lema 4. Sejam o problema (1), $m \geq n$, $\boldsymbol{\alpha}$ uma sub-matriz quadrada de \mathbf{A} , formada por n linhas linearmente independentes de \mathbf{A} e $\boldsymbol{\beta}$ um sub-vetor de \mathbf{b} de mesmas linhas. Se o conjunto de soluções compatíveis admite mais de uma solução, então uma solução básica \mathbf{x}^* tal que $\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}^* = \boldsymbol{\beta}$ e compatível às restrições será a solução ótima de (1) se, e somente se,

$$(\boldsymbol{\alpha}')^{-1} \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \quad (7)$$

Demonstração. Seja \mathbf{x}^* a solução compatível ótima tal que $\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}^* = \boldsymbol{\beta}$. Supondo, sem perda de generalidade, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ as linhas linearmente independentes de $\boldsymbol{\alpha}$, as mesmas constituem uma base para o espaço \mathfrak{R}^n . Assim, \mathbf{c} pode ser escrito como uma combinação linear

$$\mathbf{c} = \lambda_1 \mathbf{a}'_1 + \lambda_2 \mathbf{a}'_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}'_n = \boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\Lambda},$$

onde $\Lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]'$. Daí, \mathbf{x}^* possui valor de função objetivo

$$z^* = \mathbf{c}'\mathbf{x}^* = \Lambda'\alpha\mathbf{x}^*$$

Fixado algum índice j entre 1 e n , seja $\mathbf{e}_j = [\delta_{ij}]$ de dimensão $n \times 1$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, isto é, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Para um número real $\varepsilon > 0$ obtém-se o ponto

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* - \varepsilon\alpha^{-1}\mathbf{e}_j \quad (8)$$

e, assim, $\alpha\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}^* - \varepsilon\mathbf{e}_j = \boldsymbol{\beta} - \varepsilon\mathbf{e}_j = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_j - \varepsilon \ \dots \ b_n]'$ é uma solução compatível com as n primeiras restrições. Considerando $\boldsymbol{\eta}_j = \alpha^{-1}\mathbf{e}_j$ a j -ésima coluna de α^{-1} , tem-se, de (8),

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\| = \varepsilon\|\boldsymbol{\eta}_j\|$$

Por hipótese, o conjunto S de soluções compatíveis de (1) admite mais infinitas soluções, e assim \mathbf{x}^* é ponto-fronteira de S . A escolha adequada de ε permite obter um ponto \mathbf{x} suficientemente próximo de \mathbf{x}^* de forma que $\mathbf{x} \in S$. Pré-multiplicar (8) por $\mathbf{c}' = \Lambda'\alpha$ resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'\mathbf{x} &= \mathbf{c}'\mathbf{x}^* - \varepsilon\mathbf{c}'\alpha^{-1}\mathbf{e}_j = \mathbf{c}'\mathbf{x}^* - \varepsilon\Lambda'\alpha\alpha^{-1}\mathbf{e}_j \\ \mathbf{c}'\mathbf{x} &= \mathbf{c}'\mathbf{x}^* - \varepsilon\lambda_j \end{aligned}$$

Como \mathbf{x}^* é a solução ótima, $\mathbf{c}'\mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}'\mathbf{x}$ equivale a $\lambda_j \geq 0$. Isto é válido para todo j entre 1 e n , e assim $\Lambda = (\alpha')^{-1}\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$.

Reciprocamente, admita-se $\Lambda = (\alpha')^{-1}\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$. Dada uma solução ótima $\alpha\mathbf{x}^* = \boldsymbol{\beta}$ e uma solução compatível \mathbf{x} para (1), tal que $\alpha\mathbf{x} + \mathbf{x}_f = \boldsymbol{\beta}$; $\mathbf{x}_f \geq \mathbf{0}$, tem-se

$$\alpha(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) = \mathbf{x}_f \geq \mathbf{0}.$$

Pré-multiplicando a desigualdade acima por $\Lambda' = \mathbf{c}'\alpha^{-1}$ tem-se

$$\mathbf{c}'\alpha^{-1}\alpha(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \geq \mathbf{c}'\alpha^{-1}\mathbf{0}.$$

$$\mathbf{c}'(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \geq 0$$

$$\mathbf{c}'\mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

ou seja, a solução \mathbf{x}^* é ótima.

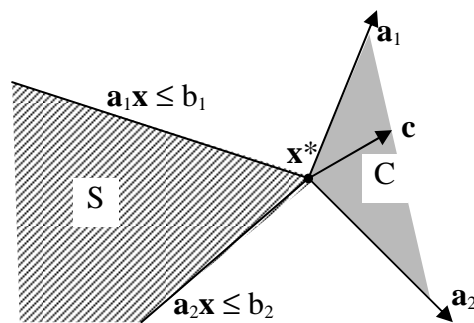


Figura 3. Parte do conjunto de soluções compatíveis S de um problema de PL de duas variáveis, mostrando a interseção das restrições $\mathbf{a}_1\mathbf{x} \leq b_1$ e $\mathbf{a}_2\mathbf{x} \leq b_2$, o vértice de solução ótima \mathbf{x}^* e o cone convexo C determinado por todas as combinações da forma $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$, com $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Quando o vetor \mathbf{c} pertence ao cone, a solução \mathbf{x}^* é ótima.

3. UM EXEMPLO DE BUSCA SIMPLES

O objetivo desta seção é fornecer, mediante simples, uma visão de como o emprego dos lemas apresentados conduz à solução ótima, embora os procedimentos adotados não reflitam ainda num algoritmo completo. O método cria uma seqüência de pontos \mathbf{x}_i e de vetores \mathbf{d}_i para $i = 0, 1, 2, \dots$ até a alcançar a solução ótima. Seja o problema de PL

$$\begin{aligned} \max Z &= 1x_1 + 1,5x_2 + 1,5x_3 \\ \text{sujeito a} \\ 3x_1 + 1x_2 + 4x_3 &\leq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 1x_3 &\leq 16 \\ 1x_1 + 1x_2 + 3x_3 &\leq 9. \end{aligned}$$

As matrizes em uso são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}.$$

Sejam $\mathbf{d}_0 = \mathbf{c} = [1 \ 1,5 \ 1,5]'$ e $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0]'$, que fornecem $Z_0 = \mathbf{c}'\mathbf{x}_0 = 0$. O deslocamento de \mathbf{x}_0 na direção \mathbf{d}_0 sobre o $H_1: 3x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 12$ (escolhido ao acaso) resulta no ponto \mathbf{x}_1 calculado como segue:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{a}_1\mathbf{c}_0 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 12 - (3 \times 0 + 1 \times 0 + 4 \times 0) \\ 3 \times 1 + 1 \times 1,5 + 4 \times 1,5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1429 \\ 1,7143 \\ 1,7143 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = \mathbf{c}'\mathbf{x}_1 = 1 \times 1,1429 + 1,5 \times 1,7143 + 1,5 \times 1,7143 = 6,2857.$$

W_1 possui base $\{\mathbf{a}_1\}$. Portanto $\boldsymbol{\alpha} = [3 \ 1 \ 4]$ e $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha} = 3^2 + 1^2 + 4^2 = 26$. A projeção \mathbf{d}_1 de \mathbf{c} sobre o subespaço perpendicular W^\perp é calculada por

$$\mathbf{d}_1 = [\mathbf{I}_3 - \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}')^{-1}\boldsymbol{\alpha}]\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} 26^{-1} [3 \ 1 \ 4] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2115 \\ 1,0962 \\ -0,1154 \end{bmatrix}.$$

O deslocamento de \mathbf{x}_1 na direção \mathbf{d}_1 sobre $H_2: 2x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 12$ resulta no ponto

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{a}_2\mathbf{c}_1 \end{pmatrix} \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 0,86 \\ 3,18 \\ 1,56 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = \mathbf{c}'\mathbf{x}_2 = 1 \times 0,86 + 1,5 \times 3,18 + 1 \times 1,56 = 7,97.$$

Projeção \mathbf{d}_2 de \mathbf{d}_1 sobre o subespaço perpendicular à W_2 de base $\{\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2\}$, isto é, sobre a reta de interseção dos planos $3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$ e $2x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 0$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}')^{-1} = \begin{bmatrix} 0,06 & -0,04 \\ -0,04 & 0,0743 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{d}_2 = [\mathbf{I}_3 - \boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}')^{-1}\boldsymbol{\alpha}]\mathbf{d}_1 =$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,06 & -0,04 \\ -0,04 & 0,0743 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0,86 \\ 3,18 \\ 1,56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,3214 \\ 0,1071 \\ 0,2143 \end{bmatrix}$$

Deslocamento de \mathbf{x}_2 na direção \mathbf{d}_2 sobre $H_3: 1x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 9$.

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3 \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{a}_3 \mathbf{c}_2 \end{pmatrix} \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 0,65 \\ 3,25 \\ 1,70 \end{bmatrix}$$

$$Z_3 = \mathbf{c}' \mathbf{x}_3 = 1 \times 0,65 + 1,5 \times 3,25 + 1 \times 1,70 = 8,075.$$

A solução \mathbf{x}_3 é compatível às restrições e é solução de $\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}_3 = \mathbf{b}$, onde $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}$. Como

$$(\boldsymbol{\alpha}')^{-1} \mathbf{c} = [0,025 \ 0,275 \ 0,375]' > \mathbf{0}$$

o critério (7) de solução ótima é atendido.

4. O ALGORITMO PROJECT COMPLETO

O exemplo da seção anterior serviu para ilustrar a forma como uma seqüência de deslocamentos de pontos e de projeções do vetor direção sobre subespaços de dimensão decrescente pode conduzir à solução ótima. A obtenção da solução ótima ocorreu mediante uma só seqüência de deslocamentos: \mathbf{x}_0 era um por livre do espaço \mathfrak{R}^3 . O primeiro deslocamento sobre um plano, restringiu o espaço de busca a este plano, mediante a redução de uma dimensão. O segundo deslocamento, sobre outro plano, restringiu o espaço de busca à reta de intersecção destes dois hiperplanos. Finalmente, o deslocamento final na direção da reta culminou no ponto de intersecção da reta com o terceiro plano, que é o ponto de ótimo, dado que todas as restrições foram atendidas e que o critério (7) de solução ótima foi atendido. Porém, na maioria das circunstâncias, o número de restrições supera o número de variáveis. Um algoritmo completo deve considerar a escolha dos hiperplanos de forma que conduzam à solução ótima.

Lema 5. Sejam o problema de PL(1), $m \geq n$, $\boldsymbol{\alpha}$ uma sub-matriz quadrada de \mathbf{A} , formada por n linhas linearmente independentes de \mathbf{A} e $\boldsymbol{\beta}$ um sub-vetor de \mathbf{b} de mesmas linhas. Se o conjunto de soluções compatíveis possui solução básica ótima \mathbf{x}^* tal que $\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}^* = \boldsymbol{\beta}$, então existe ao menos uma linha \mathbf{a}_k ($1 \leq k \leq n$) tal que $\mathbf{a}_k \mathbf{c} \geq 0$.

Demonstração. Supondo $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ as linhas linearmente independentes de $\boldsymbol{\alpha}$, as mesmas constituem uma base para o espaço \mathfrak{R}^n . Assim \mathbf{c} pode ser escrito como uma combinação linear

$$\mathbf{c} = \lambda_1 \mathbf{a}_1' + \lambda_2 \mathbf{a}_2' + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n' = \boldsymbol{\Lambda}' \boldsymbol{\alpha},$$

onde $\boldsymbol{\Lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \dots \ \lambda_n]'$. Pré-multiplicando por $\boldsymbol{\Lambda}' \boldsymbol{\alpha}$,

$$\boldsymbol{\Lambda}' \boldsymbol{\alpha} \mathbf{c} = \boldsymbol{\Lambda}' \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\Lambda}$$

Como $\boldsymbol{\Lambda}' \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\Lambda})' (\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\Lambda}) = \|\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\Lambda}\|^2 \geq 0$, tem-se, $\boldsymbol{\Lambda}' \boldsymbol{\alpha} \mathbf{c} \geq 0$, o mesmo que

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{c} + \lambda_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{c} + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n \mathbf{c} \geq 0.$$

Pelo lema (4), $\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{\alpha}')^{-1} \mathbf{c} \geq \mathbf{0}$, ou seja, $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$. Para valer a desigualdade acima, deve existir ao menos uma linha \mathbf{a}_k ($1 \leq k \leq n$) tal que $\mathbf{a}_k \mathbf{c} \geq 0$.

Uma seqüência de deslocamentos combinados com projeções da direção de crescimento da função objetivo progressivamente reduz o número de restrições restantes, assim como muda a direção \mathbf{d} de crescimento mediante a projeção da direção imediatamente anterior. Não obstante, a cada passo tem-se um novo problema de PL. Pode-se, desta forma, considerar o lema 5 trocando-se a direção inicial \mathbf{c} de crescimento da função objetivo por alguma direção projetada \mathbf{d} , numa determinada iteração. O conjunto de índices ativos apresentado no lema 1 passa a ser reformulado como

$$I_{\bar{A}} = \{i \mid \mathbf{a}_i \mathbf{d} > 0; \mathbf{a}_i \text{ é linha de } \bar{\mathbf{A}}\}$$

considerando a direção atual \mathbf{d} de busca do ótimo e $\bar{\mathbf{A}}$ a submatriz de \mathbf{A} formada pelas linhas sobre as quais ainda nenhum deslocamento tenha sido efetuado.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[KOOP51] T. C. Koopmans. Ed. Activity analysis of production and allocation. New York : Wiley, 1951.

[DANT53-1] G. B. Dantzig. Computacional algorithm of the revised simplex method. RM-1266, The RAND Corp., oct., 1953.

[DANT53-2] G. B. Dantzig and A. ORDEN. Duality Theorems. RM-1265, The RAND Corp., oct., 1953.

[DANT57] G. B. Dantzig and P. WOLFE. The decomposition of Mathematical programming problems. P-1818, The RAND Corp., may, 1959.

[KUHN55], H. W. The hungarian method for the assignment problem. Naval Research Logistics Quartely, 2, 83-87, 1955.

[FULK61] FULKERSON, D. R. An Out-of-Kilter method for minimal-cost flow problems. Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematicas, 9(1), 18-27, 1961.

[KHAC79] KHACHIYAN, L. G. A polynomial algorithm in linear programming. Doklady Akademiia Nauk SSSR Novaia Seriia, 244(5), 1093-1096, 1979.

[RÖDD80] Rödder, W. e BLAUTH, M. Project – an alternative LP-code. Boletim de Produção e Sistemas. UFSC, Florianópolis : 2(2), 24-35, 1980.

[RÖDD80] Rödder, W. A note on linear dependency in project. Boletim de Produção e Sistemas. UFSC, Florianópolis : 2(3), 52-63, 1981.