SPOLM 2007

ISSN 2175-6295 Rio de Janeiro- Brasil, 08 e 09 novembro de 2007.

PROGRAMAÇÃO DE ROTAS AÉREAS NUM CENÁRIO DE RESTRIÇÕES OPERACIONAIS

Otávio Simões Barbosa Filho
Secretaria Especial de Informática do Senado Federal
Anexo "C" do Senado Federal
70165-900, Brasília-DF
otaviosb@senado.gov.br

Resumo

Apresenta-se um modelo de programação inteira cujo objetivo é o de otimizar a designação de aeronaves comerciais segundo rotas rentáveis, de sorte que restrições impostas pelas limitações de tráfego aéreo (número de pousos e decolagens), demanda de passageiros e interdição de conexões sejam observadas.
Palavras-chave: Programação Inteira, Programação Linear, Tráfego Aéreo, Administração Aeroportos.

Abstract

An integer programming model is presented which aims to optimize the allocation of commercial aircrafts upon a set of profitable routes in such a way that constraints imposed by limitation on air traffic (number of landings and take-offs) and client demand be observed. Also, constraints concerning restrictions on flight connections are considered.
Keywords; Integer Programming, Linear Programming, Air Traffic, Airport Administration.

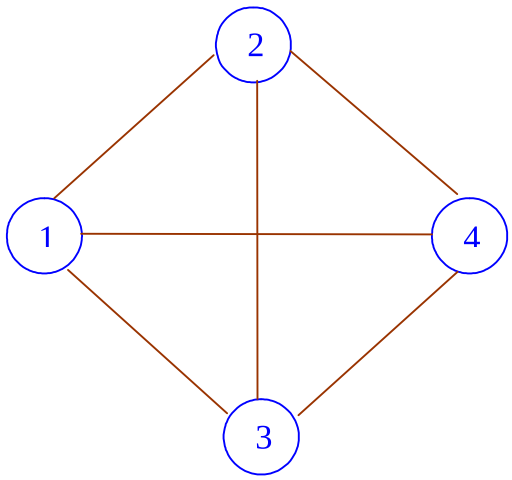
1. Introdução

Este trabalho apresenta um modelo de programação inteira (ver [Taha], por exemplo) que otimiza a designação de aeronaves por rotas aéreas diversas, de sorte que restrições quanto ao número de pousos e decolagens, eventualmente existentes nos respectivos aeroportos, sejam observadas, atendendo, na medida do possível, a demanda de passageiros.

Considera-se *rota* uma seqüência de um ou mais trechos aéreos que interliguem dois aeroportos quaisquer de sorte que, caso essa seqüência tenha mais de um trecho, o ponto final de cada um deles, à exceção do último, coincida com o inicial do subseqüente. Para efeito de clareza de exposição, o modelo apresentado a seguir é de tamanho reduzido, sem prejuízo do seu emprego numa situação em que variáveis e restrições assumam volumes compatíveis com a realidade.

2. A Instância Protótipo

A instância cuja solução apresentaremos representa um cenário que contempla apenas quatro aeroportos. Uma companhia aérea hipotética possui uma frota de 70 aeronaves e deve programar quantas deverá designar para cada rota existente, sem violar restrições de volume de tráfego impostas pelas autoridades aeroportuárias e satisfazendo, na medida do possível, a demanda de passageiros. Além disso, um dos aeroportos (o de número *3*, no gráfico abaixo) somente pode funcionar como ponto como ponto inicial ou final de rota.



A tabela abaixo representa a demanda (hipotética) de passageiros entre aeroportos (o rótulo das linhas representa a origem; o das colunas, o destino).

		Aeroporto			
	Demanda (passageiros/dia)	1	2	3	4
Aeroporto	1		1500	600	300
	2	1450		1000	500
	3	550	1000		400
	4	1300	750	500	
		3300	3250	2100	1200

Tabela 1

A tabela 2 apresenta a cota de pousos e decolagens referente à empresa em questão, determinada pelas condições operacionais de cada aeroporto.

	Aeroporto			
	1	2	3	4
Operações Permitidas (Pousos ou Decolagens)	40	30	20	30

Tabela 2

Arbitramos ainda que cada aeronave tenha capacidade de transportar o mesmo número de passageiros (190). (O caso de aeronaves com capacidades distintas pode ser incorporado à custa de um maior número de variáveis e restrições).

Considerando-se rotas de 2, 3 ou 4 pontos e a interdição do aeroporto 3 para conexões, as rotas passíveis de consideração são apresentadas na tabela abaixo (Tabela 3), com os respectivos custos e retornos financeiros (No Anexo 1 demonstra-se como custo e retorno foram estipulados para cada rota).

Nº Rota	Pontos	Custo ($)	Retorno ($)	Lucro ($)	Nº Rota	Pontos	Custo ($)	Retorno ($)	Lucro ($)
1	12	70	190	120	7	31	130	190	60
2	13	130	190	60	8	32	60	190	130
3	14	210	190	-20	9	34	80	190	110
4	21	70	190	120	10	41	210	190	-20
5	23	60	190	130	11	42	140	190	50
6	24	140	190	50	12	43	80	190	110

Tabela 3 (a)

Nº Rota	Pontos	Custo ($)	Retorno ($)	Lucro ($)	Nº Rota	Pontos	Custo ($)	Retorno ($)	Lucro ($)
13	123	130	275	145	22	314	340	0	-340
14	124	210	230	20	23	321	130	240	110
15	142	350	255	-95	24	324	200	228	28
16	143	290	294	4	25	341	290	225	-65
17	213	200	183	-17	26	342	220	258	38
18	214	280	180	-100	27	412	280	213	-67
19	241	350	260	-90	28	413	340	240	-100
20	243	220	252	32	29	421	210	210	0
21	312	200	244	44	30	423	200	243	43

Tabela 3 (b)

Nº Rota	Pontos	Custo ($)	Retorno ($)	Lucro ($)	Nº Rota	Pontos	Custo ($)	Retorno ($)	Lucro ($)
31	1243	290	352	62	37	3214	340	168	-172
32	1423	410	332	-78	38	3241	410	208	-202
33	2143	380	0	-380	39	3412	360	0	-360
34	2413	480	215	-265	40	3421	290	218	-72
35	3124	340	255	-85	41	4123	340	339	-1
36	3142	480	270	-210	42	4213	340	224	-116

Tabela 3 (c)

Descartando-se as rotas deficitárias (3, 10, 15, 17, 18, 19, 22, 25, 27, 28, 32 a 42) ou neutras (29) restam 20, para as quais se quer determinar o número de aeronaves a serem designadas para cada uma, de sorte a maximizar o lucro (retorno subtraído do custo), satisfazendo as restrições de demanda e de limitação do número de pousos e decolagens (Tabela 2).

Consideremos ainda, na tabela abaixo, as capacidades máximas de transporte de passageiros para cada aeroporto por rota que o acessa. (O Anexo 1 apresenta a metodologia empregada para estimá-las).

	Aeroporto											
	1			2			3			4		
	Nº Rota	Pontos	Cap.	Nº Rota	Pontos	Cap.	Nº Rota	Pontos	Cap.	Nº Rota	Pontos	Cap.
Rota	4	21	190	1	12	190	2	13	190	6	24	190
	7	31	190	8	32	190	5	23	190	9	34	190
	21	312	44	11	42	190	12	43	190	14	124	80
	23	321	160	13	123	99	13	123	176	16	143	63
				14	124	150	16	143	231	20	243	63
				21	312	200	20	243	189	24	324	108
				23	321	80	30	423	162	26	342	48
				24	324	120	31	1243	168	31	1243	64
				26	342	210						
				30	423	81						
				31	1243	120						

Tabela 4

O retorno unitário (\$/vôo) correspondente a cada rota foi considerado como proporcional à capacidade máxima de transporte de passageiros (Anexo 1).

Definamos ainda,

x_i : No de aeronaves designadas para a rota *i*, para cada *i* referente a uma rota rentável.

Finalmente, utilizando os valores de lucro unitário disponíveis na Tabela 3, podemos equacionar o problema na forma:

$$\begin{aligned}\text{Maximizar } z = {} & 120x_1 + 60x_2 + 120x_4 + 130x_5 + 50x_6 + 60x_7 + \\ & + 130x_8 + 110x_9 + 50x_{11} + 110x_{12} + 145x_{13} + 20x_{14} + \\ & + 4x_{16} + 32x_{20} + 44x_{21} + 110x_{23} + 28x_{24} + 38x_{26} + \\ & + 43x_{30} + 62x_{31}\end{aligned}$$

Sujeito a

Restrições de demanda (Coeficientes do lado esquerdo, na Tabela 4; termos do lado direito das restrições, na Tabela 1):

$$\text{Aeroporto 1:} \quad 190x_4 + 190x_7 + 44x_{21} + 160x_{23} \quad <= \quad 3300$$

$$\begin{aligned}\text{Aeroporto 2:} \quad & 190x_1 + 190x_8 + 190x_{11} + 99x_{13} + 150x_{14} + \\ & + 200x_{21} + 80x_{23} + 120x_{24} + 210x_{26} + 81x_{30} + \\ & + 120x_{31} \quad <= \quad 3250\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Aeroporto 3:} \quad & 190x_2 + 190x_5 + 190x_{12} + 176x_{13} + 231x_{16} + \\ & + 189x_{20} + 162x_{30} + 168x_{31} \quad <= \quad 2100\end{aligned}$$

Aeroporto 4: $190x_6 + 190x_9 + 80x_{14} + 63x_{16} + 63x_{20} +$

$+ 108x_{24} + 48x_{26} + 64x_{31} \quad <= \quad 1200$

A fim de que a solução encontrada seja reproduzível período após período, é necessário que ao início de cada ciclo o número de aeronaves em cada aeroporto seja constante, ou seja, ao final de cada período, em cada aeroporto, o número de pousos tem, necessariamente, que ser igual ao de decolagens, o que se traduz como:

Aeroporto 1:

$x_4 + x_7 + x_{21} + x_{23} =$

$x_1 + x_2 + x_{13} + x_{14} + x_{16} + x_{21} + x_{31}$

ou seja (eliminando-se termos comuns em ambos os membros da equação),

$x_4 + x_7 + x_{23} = x_1 + x_2 + x_{13} + x_{14} + x_{16} + x_{31}$

Aeroporto 2:

$x_1 + x_8 + x_{11} + x_{13} + x_{14} + x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{26} + x_{30} + x_{31} =$

$x_4 + x_5 + x_6 + x_{13} + x_{14} + x_{20} + x_{23} + x_{24} + x_{30} + x_{31}$

ou seja,

$x_1 + x_8 + x_{11} + x_{21} + x_{26} = x_4 + x_5 + x_6 + x_{20}$

Aeroporto 3:

$x_2 + x_5 + x_{12} + x_{13} + x_{16} + x_{20} + x_{30} + x_{31} =$

$x_7 + x_8 + x_9 + x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{26}$

Aeroporto 4:

$x_5 + x_9 + x_{14} + x_{16} + x_{20} + x_{24} + x_{26} + x_{31} =$

$x_{11} + x_{12} + x_{16} + x_{20} + x_{26} + x_{30} + x_{31}$

ou seja,

$x_5 + x_9 + x_{14} + x_{24} = x_{11} + x_{12} + x_{30}$

Estamos supondo que a empresa em questão disponha de 70 aeronaves, o que impõe

$\Sigma x_i \quad <= \quad 70$

Submetendo o modelo acima ao programa *Solver* (Anexo 2), encontramos o resultado resumido na tabela abaixo

Nº Rota	1	2	4	5	6	7	8	9	11	12
Pontos	12	13	21	23	24	31	32	34	42	43
Aeronaves	15	2	13	2	0	4	0	6	0	6

Para todas as demais rotas a designação correspondente foi de 0 (zero) aeronaves.

Ou seja, são requeridas 48 aeronaves para o período operacional distribuídas pelas rotas 1 (15 aeronaves), 2 (2), 4 (13), 5 (2), 7(4), 9 (6), 12 (6), o que implica um excedente de 22, que pode vir a ser utilizado num procedimento de rodízio que facilite operações de revisão e manutenção preventiva.

A demanda de passageiros que pode ser atendida em relação à total é mostrada na tabela abaixo, construída a partir da solução ótima produzida pelo *Solver*.

		Demanda de Passageiros	
		Atendida	Máxima
Aeroporto	1	3230	3300
	2	2850	3250
	3	1900	2100
	4	1140	1200

Os valores da coluna “Atendida” resultam do cômputo das expressões referentes às restrições de demanda (pág. 4).

Da mesma forma, as restrições de replicação de condições iniciais (pág. 5), que impõem um número igual de pousos e decolagens em cada aeroporto, foram satisfeitas. Ademais, como mostra a tabela abaixo, nos aeroportos 1 e 4 o número de pousos (e de decolagens) ficou aquém do limite.

		Pousos	
		Obtido	Máximo
Aeroporto	1	17	20
	2	15	15
	3	10	10
	4	6	15

O valor ótimo encontrado para a função-objetivo foi de 5.300,00 unidades monetárias.

Alternativamente, uma outra função-objetivo – focada em investimento – que visasse antes a maximização da oferta de assentos nas rotas rentáveis, poderia ser definida como

$$\begin{aligned} z = {} & 190x_1 + 190x_2 + 190x_4 + 190x_5 + 190x_6 + 190x_7 + \\ & + 190x_8 + 190x_9 + 190x_{11} + 190x_{12} + 275x_{13} + 230x_{14} + \\ & + 294x_{16} + 252x_{20} + 244x_{21} + 240x_{23} + 228x_{24} + 258x_{26} + \\ & + 243x_{30} + 352x_{31} \end{aligned}$$

submetida às mesmas restrições. Nesse caso, aplicando-se o fator de conversão apropriado (1 assento/unidade monetária) definido no Anexo 1, os coeficientes das variáveis representam, para cada rota, a capacidade de oferta de assentos (Tabela 3).

3. Conclusão

O modelo apresentado incorpora aspectos conjunturais de saturação de tráfego aéreo e de condições inadequadas de localização e manutenção de aeroportos, atualmente presentes no cenário da aviação civil nacional, para as quais não se vislumbra uma correção a curto ou médio prazo. Embora na instância apresentada tenhamos considerado todas as combinações de rota possíveis (à exceção daquelas que representassem conexão no aeroporto 3), no caso real algumas combinações podem ser imediatamente descartadas (por exemplo, uma rota do tipo Rio de Janeiro – Manaus - Porto Alegre - Teresina).

Assim, a generalização da versão apresentada, incorporando aspectos mais próximos da realidade (número maior de aeroportos, tipos de aeronaves com capacidades diferentes, função de lucro e estimativa de demanda de passageiros baseadas no histórico de operação) pode vir a contribuir tanto para a segurança de vôo, quanto para um melhor desempenho operacional e econômico das empresas aéreas.

Não foram consideradas restrições de ordem temporal que pudessem restringir o número de aeronaves designadas para eventuais rotas cujos tempos de vôo fossem grandes o suficiente para que, em virtude de horários rígidos de decolagem, não lograssem aterrissar dentro do mesmo período operacional (considerado como de 24 horas). Essa hipótese é bastante razoável num cenário em que a duração dos vôos – como é o caso de vôos domésticos – é bem inferior à amplitude do período operacional considerado.

Bibliografia
Taha, Hamdy A. *Operations Research, an Introduction,* Macmillan Publishing Co, 3ª edição, New York, 1982.

Anexo 1

1. Estimativa de Custos ($)

Os custos de transporte aéreo entre dois quaisquer pontos de qualquer rota foram considerados proporcionais ao tempo de vôo entre eles. A tabela abaixo contém a duração dos vôos (em horas), arbitrariamente estipulados.

Tempo de Vôo entre Aeroportos (horas)

	1	2	3	4
1		0,7	1,3	2,1
2	0,7		0,6	1,4
3	1,3	0,6		0,8
4	2,1	1,4	0,8	

A simetria da tabela indica mesmo tempo de vôo de ida e de volta entre quaisquer dois pontos. Considerou-se, para efeito de operacionalização do modelo, um fator de conversão igual a 100 unidades monetárias por hora. Assim, para a rota 31 (1243), por exemplo, o custo é dado por 100 x (0,7 + 1,4 + 0,8) = 290 unidades monetárias (vide Tabela 3.c).

2. Estimativas de Retorno ($) e de Capacidade Máxima de Transporte de Passageiros

A estimativa de retorno de cada rota toma por base seu potencial financeiro, considerado como o montante máximo passível de ser auferido, isto é, no caso de ocupação total de assentos. Assim, para as rotas de dois pontos, considerou-se o potencial de lucro correspondente à lotação máxima da aeronave (190 passageiros). Para as demais rotas, utilizou-se a metodologia abaixo ilustrada para a rota 1243.

Rota 1243

Trecho		Tipo de Passageiro
1	12	12, 13, 14
2	24	13, 14, 23, 24

3	43	13, 23, 43

Na tabela acima, em cada linha, a segunda coluna identifica os pontos inicial e final do respectivo trecho e a terceira, ordenado em ordem crescente, o código do tipo de passageiro, definido pelos seus pontos de origem e destino. Por exemplo, o trecho 2 atende passageiros que partindo de 1 demandam 3 ou 4 e aqueles que, partindo de 2, demandam 3 ou 4.

Na tabela abaixo, em cada linha, as variáveis da segunda coluna designam a demanda passível de ser atendida correspondente ao tipo de passageiro; na terceira, figuram as demandas totais para o respectivo trecho, conforme a Tabela 1 (pág. 2). Em todos os casos, como no dessa rota, as variáveis *x, y, z, u, v, w* são associadas, nessa ordem, aos códigos de tipos de passageiro ordenados em ordem crescente.

Tipo de Passageiro	Demanda Atendida	Demanda Total
12	*x*	1500
13	*y*	600
14	*z*	300
23	*u*	1000
24	*v*	500
43	*w*	500

Para os trechos 1, 2 e 3 temos, respectivamente,

$x + y + z \quad <= \quad 190$ (capacidade da aeronave)

$y + z + u + v \quad <= \quad 190$

$y + u + w \quad <= \quad 190$

Admitindo-se que a procura, por tipo de passageiro, seja proporcional à demanda total do respectivo trecho, podemos escrever:

$x/1500 = y/600 = z/300 = u/1000 = v/500 = w/500$

Podemos então definir o seguinte problema:

maximizar $g = x + y + z + u + v + w$

Sujeito às três desigualdades acima e, ainda, às restrições decorrentes das proporções, quais sejam:

$2x - 5y = 0$

$y - 2z = 0$

$10z - 3u = 0$

$u - 2v = 0$

$v - w = 0$

Submetido ao Solver, a solução ótima encontrada para o problema acima (e também para as demais rotas rentáveis) apresenta-se na tabela abaixo.

Rota	x	y	z	u	v	w	
123	99	66	110				275
124	150	30	50				230
142	150	30	75				255
143	126	63	105				294
213	36	87	60				183
214	24	116	40				180
241	116	40	104				260
243	126	63	63				252
312	120	44	80				244
314	0	0	0				0
321	116	44	80				240
324	60	120	48				228
341	55	40	130				225
342	120	48	90				258
412	90	78	45				213
413	60	130	50				240
421	87	78	45				210
423	108	81	54				243
1243	120	48	24	80	40	40	352

Para o caso de rotas de três pontos somente três variáveis são definidas.

Arbitrariamente, considerou-se, tão-somente para efeito de operacionalização do modelo, um fator de conversão igual a 1 unidade monetária por assento. Assim, para a rota 1243, por exemplo, o retorno é dado por 1 x 352 = 352 unidades monetárias (vide Tabela 3.c).

Naturalmente, essas estimativas poderiam ser mais precisas se realizadas com base num histórico real de ocupação de aeronaves.

Anexo 2

Relatório do *Solver*

Microsoft Excel 11.0 Relatório de resposta
Planilha: [solver_72.xls]Solver
Relatório criado: 01/09/2007 16:42:14

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
B1	f.o.	5.365,79	5.300,00

Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
B5	x1	15	15
C5	x2	2,368421053	2
D5	x4	13,68421053	13
E5	x5	1,315789474	2
F5	x6	0	0
G5	x7	3,684210526	4
H5	x8	0	0
I5	x9	6,315789474	6
J5	x11	0	0
K5	x12	6,315789474	6
L5	x13	0	0
M5	x14	0	0
N5	x16	0	0
O5	x20	0	0
P5	x21	0	0
Q5	x23	0	0
R5	x24	0	0
S5	x26	0	0
T5	x30	0	0
U5	x31	0	0

Obs.: Na tabela acima, os valores da coluna “Valor original” correspondem à solução ótima do problema sem restringir as variáveis a valores inteiros.