SPOLM 2008

ISSN 2175-6295 Rio de Janeiro- Brasil, 05 e 06 de agosto de 2008.

MODELO DE INSUMO-PRODUTO DINÂMICO: CONSTRUÇÃO, SOLUÇÃO E ESTABILIDADE

Tácito Augusto Farias –Doutor em Ciências - ESALQ / USP.
NPGMAT / UFS.
Av. Marechal Rondon, s/n Jardim Rosa Elze CEP 49100-000 São Cristóvão - SE
tacitoaugusto@yahoo.com.br

Nehemias Anastácio Santos da Silva
UFPE / PPGEP.
Av. Acadêmico Hélio Ramos, s/n, Cidade Universitária, Recife-PE, Cep: 50740-530
nehemiasufs@yahoo.com.br

RESUMO: Neste artigo foi desenvolvido um modelo de insumo-produto dinâmico em tempo continuo que mostra a evolução dos produtos de duas indústrias no decorrer do tempo. Realizamos a nossa tarefa, primeiro construindo um modelo específico de dois setores abstratos para em seguida usarmos um exemplo numérico consistente. Ademais apresentamos nosso modelo na versão de sistema de quantidades e de preços e aplicamos o Teorema de Estabilidade Dual para mostrar que à medida que um dos sistemas for estável o outro será estável (daí a dualidade).

Palavras-Chaves: Insumo-produto; Leontief; Modelo Dinâmico.

ABSTRACT: In this article have been developed a time continuous dynamic input-output model that shows the development of products, two industries over time. We did our paper, first building a abstract model of two specific sectors, then use a numerical example consistent. We also present our version of the model system of quantities and prices and apply the Stability Dual theorem showing that as one of the systems is stable, the other will be stable (hence occure the duality).

Keywords: Input-Output; Leontief; Dynamic Model.

1. Modelo Insumo-Produto Estático - Construção

Para uma melhor compreensão do modelo insumo-produto dinâmico de Leontief é importante conhecer sue modelo estático. Para tanto, vamos desenvolver de modo sucinto considerações acerca do modelo estático (Miller & BLAIR,1985).

A análise de equilíbrio geral toma forma operacional a partir da analise de insumo produto desenvolvida por Wassily Leontief em seu trabalho pioneiro **A Economia do Insumo-Produto (1981).** Uma característica fundamental referente a analise de insumo produto estática, consistente na ênfase que atribui a interdependência da economia, permitindo que seja utilizada pelos governos e firmas, para fins de previsão e planejamento global. Algumas hipóteses simplificadoras são introduzidas por Leontief no sentido de tornar operacionalizável a analise de equilíbrio geral contemplado em seu modelo de insumo produto:

Hipótese 1:A variável de seu modelo é o vetor de quantidade de mercadorias produzidas

Hipótese 2: A demanda de todas as mercadorias é dada.

Hipótese 3: Os insumos são utilizados em proporções fixas

Hipótese 4: Retornos constantes de escala.

Hipótese 5: No longo prazo não haverá lucro econômico.

Ora, conhecendo os elementos sobre os quais será construído o modelo, é importante salientar que objetivos a análise de insumo-produto pretende alcançar. Simplificadamente:

a) Determinação da quantidade de bens a ser produzido

b) Determinação da quantidade de cada insumo e bem intermediário que deve ser empregado para alcançar uma dada produção.

c) Determinação do nível de equilíbrio de cada indústria

d) determinação dos índices de ligações setoriais.

e) Determinação dos multiplicadores agregados e desagregados.

Formalmente a matemática do modelo de insumo-produto em su aversão simplificada segundo Leontief (1981): Sejam X_1, X_2,....X_n a produção dos *n* setores da economia; X_{11}, X_{12},.....X_{in} as quantidades de X consumidos pelos *n* setores da economia e Y_1, Y_2,.....Y_n as quantidades de X_1,.....X_n consumidos pelo setor autônomo. De fato, nossa economia possui *n* setores produtivos e um autônomo, promovendo uma economia nacional com (*n*+1) setores. De posse dessas informações construímos:

$$\begin{cases} X_1 = X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} + Y_1 \\ X_2 = X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n} + Y_2 \\ \mathrm{M} \\ X_n = X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_m + Y_n \end{cases}$$

e definido $a_{ij} = \dfrac{X_{ij}}{X_j}$ como coeficiente técnico (coeficiente de insumo-produto),façamos:

$$\begin{cases} X_1 - a_{11} X_1 + \ldots + a_{1n} X_n + Y_1 \\ X_2 = a_{21} X_1 + \ldots + a_{2n} X_n + Y_2 \\ \mathrm{M} \\ X_n - a_{n1} X_1 + \ldots + a_{nn} X_n + Y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 - a_{11} X_1 - a_{12} X_2 - \ldots - a_{1n} X_n = Y_1 \\ X_2 - a_{21} X_1 - a_{22} X_2 - \ldots - a_{2n} X_n = Y_2 \\ \mathrm{M} \\ X_n - a_{n1} X_1 - a_{n2} X_2 - \ldots - a_{nn} X_n = Y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - a_{12} X_1 - a_{12} X_2 - \ldots - a_{1n} X_n = Y_1 \\ - a_{21} X_1 + (1 - a_{22}) X_2 - \ldots - a_{2n} X_n = Y_2 \\ \mathrm{M} \\ - a_{n1} X_1 - a_{n2} X_2 - \ldots + (1 - a_{nn}) X_n = Y_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & (1-a_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Matriz unitária	Matriz dos coeficientes Técnicos diretos (matriz tecnológica)	Vetor das quantidades de produção	Vetor de demanda final

$$(I-A).X = Y \therefore (I-A)^{-1}.(I-A)X = (I-A)^{-1}X$$

$$\boxed{X = [I-A]^{-1}Y}$$

onde $[I-A]^{-1}$ é denominado **matriz inversa de Leontief**, cujos elementos dão os coeficientes técnicos diretos e indiretos. Qualquer alteração na demanda final de um ou mais setores poderá ser calculada usando-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_1 = \alpha_{11}Y_1 + \ldots + \alpha_{1n}Y_n \\ \vdots \\ X_n = \alpha_{n1}Y_1 + \ldots + \alpha nnY_n \end{cases}$$

Significa dizer que a produção final de cada setor depende de suas respectivas demandas finais. Ademais, o vetor de preços apresentará os preços relativos unitários dos produtos de cada setor.

1.1 Os Coeficientes Técnicos de Produção

Antes de proceder a um quadro numérico sobre o modelo insumo-produto estático façamos algumas considerações sobre coeficientes técnicos diretos e indiretos (YAN,1975). Uma das hipóteses básicas do modelo estático é que os coeficientes diretos e indiretos de produção são fixos, contudo esses coeficientes pedem sofrer mudanças ao longo do tempo resultante de modificações em certas variáveis econômicas e tecnológicas, tais como:

a) o aparecimento de novas indústrias, ou seja, indústrias com uma composição de insumo-produto diferente das existentes;

b) a alteração na condição de produto e, consequentemente de insumos, de indústrias já estabelecidas;

c) a substituição de insumos como resultados de inovações tecnológicas, a exemplo, a troca de matérias-primas naturais por sintéticos;

d) a substituição de insumos importados (que estão fora da matriz de fluxos interindústriais) por insumos nacionais, ou vice-versa;

e) a alteração nos preços relativos, fazendo com que em termos monetários, aumente a participação de alguns insumos e decresça a participação de outros na composição dos diferentes bens e serviços.

Para paises que já atingiram elevado grau de industrialização, as mudanças nos coeficientes técnicos de produção tendem a ser mais lenta do que nos paises que possuem baixo grau de industrialização (BLITZER, CLARK, TAYLOR,1975). Por conseguinte, nos paises de baixo grau de industrialização as mudanças nos preços relativos resultantes do próprio processo de desenvolvimento são mais profundas e perceptíveis; enquanto que nos paises de elevado grau de industrialização o aparecimento de novas indústrias esta na dependência exclusiva do avanço tecnológico, nos paises de baixo grau de industrialização o aparecimento de novas indústrias é conseqüência da industrialização (MYIAZAWA,1976).

1.3. Planejamento Global, Previsão, Descrição e Análise da Estrutura Econômica

O modelo de insumo-produto pode ser utilizado para a descrição e analise da estrutura de uma economia, bem como para previsão e planejamento econômico. O modelo de insumo-produto pode ser utilizado para a descrição e análise da estrutura econômica mostra a interdependência entre os diferentes setores da atividade, a contribuição de cada um desses na produção de bens e serviços dirigidos à demanda final, as necessidades de importação tanto de insumo como de produtos dirigidos à demanda final e o valor adicionado de cada setor (SCARF & SHOVEN,1984).

A principal diferença entre o emprego do modelo de insumo-produto para previsão e para fins de planejamento está no fato que no primeiro caso, as alterações iniciais são previstas ou estimadas, enquanto que na planificação elas são planejadas. Na previsão é mais comum partirmos das modificações iniciais na produção total – mudanças essas que são estimadas a parte – para então, utilizando-se do modelo, determinaram-se as mudanças nas outras variáveis, enquanto que no planejamento é usual tomar como ponto de partida às alterações na demanda final, que constituem os objetivos previstos do plano. (DEVIS & MELO & ROBINSON, 1982). Segue um quadro-exemplo de uma matriz de insumo-produto hipotética:

Insumos		Setores de Processamento				Setores de demanda final					
	Produtos	Primário	Secundário	Terciário	Sub - total	Exportação	Consumo	nvestimento Bruto	Variação de Estoque	Sub – total	Total
Setores de processamento	1 . Primário	15	25	15	55	15	70	8	1	94	149
	2 . Secundário	18	35	30	83	6	80	22	2	110	193
	3 . Terciário	37	40	105	182	3	134	11	1	149	331
	4 . Sub – total	70	100	150	320	24	284	41	4	353	
Serotes de	5 . Importação	1	5	3	9	-	5	10	-	15	
	6 . Valor adicionado	65	71	152	287	-	20	-	-	20	
	7 . Impostos indiretos	9	11	18	39	-	-	-	-	-	
	8 . subsídios	-1	-1	-1	-3	-	-	-	-	-	

pagamento	9 . Depreciação de capital	5	7	9	18	-	-	-	-	-	
	10 . Sub - total	79	93	181		-	25	20		35	
	11 .TOTAL	14 9	193	331							

2. MODELO DE INSUMO-PRODUTO DINÂMICO

O modelo de insumo-produto dinâmico o fluxo de investimento é considerável endógeno. A endogenização do investimento é feita através de ligação das exigências de capital de cada setor ao produto daquele setor por intermédio de coeficientes técnicos $b_{ir} \geq 0$; cada um deles representa o estoque de capital do i-ésimo bem que a i-ésima indústria deve ter em mãos para cada unidade de seu produto. Para alicerçarmos nossa discussão vamos apresentar as hipóteses básicas do modelo insumo-produto dinâmico:

Hipótese 1: Demanda de investimentos por origem estão relacionadas a demanda de investimento simples.

Hipótese 2: Demandas de investimento por destino são determinadas por uma relação acelerador simples

Vamos em seguida descrever o modelo completo de insumo-produto dinâmico. Seja S_{ik} o estoque de capital do i-ésimo produto possuído pela i-ésima indústria e seja X_k o produto total de K-ésima indústria. Ou seja,

$$S_{ik} = b_{ik} X_k \qquad \begin{cases} i \in \{1,2,...m\} \\ k \in \{1,2,...m\} \end{cases} \tag{1}$$

de modo que, diferenciando ambos os membros com relação ao tempo, temos:

$$S_{ik}^{'} = b_{ik} X_k^{'} \tag{2}$$

A equação 2 é uma versão continua do principio de aceleração, desde que este liga a variação no estoque de capital (investimento) a variação no produto através dos coeficientes de capital apropriados. A partir de (2), as equações de equilíbrio do modelo estatístico devem ser modificadas:

$$X_t = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} X_k + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} X_k^{'} + Y_i, \qquad \{i \in \{1,2,...m\} \tag{3}$$

Verificamos que o lado esquerdo de c representa o produto total da i-ésima indústria, que em equilíbrio deve igualar a quantidade demandada. A demanda na economia é constituída por três componentes:

a) a quantidade do i-ésimo produto utilizado como um insumo por todas as indústrias:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} X_k$$

b) a quantidade do i-ésimo produto demandado como investimento por todas as indústrias:

$$\sum_{k=1}^{m} b_{ik} X_k^{'}$$

c) a quantidade do i-ésimo produto utilizado para satisfazer a demanda final:

Y_i

Comparando os itens a, b e c do modelo de insumo-produto dinâmico com o modelo de insumo-produto estático, verificamos que a novidade é o surgimento de c. Neste produto podemos distinguir, entre modelo aberto (no qual demandas finais são exógenas) e modelo fechado (no qual demandas finais são endógenas). O resultado é que, o "produto" deste setor é trabalhado e seus insumos são os vários bens de consumo, durável e não-duráveis. Ao introduzir esta modificação nas equações (3), temos:

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} X'_k, \qquad \{i \in \{1,2,...n\} \qquad (4)$$

Onde: $a_{in} X_n + b_{in} X'_n$

Notamos que o fechamento do modelo implica que o n-ésimo setor existem coeficientes fixos a_{in}, b_{in} e este por sua vez significa que existe proporcionalidade estrita entre a quantidade de produtos que as famílias compram e a quantidade de trabalho que eles produzem.

2.1. Modelo Simplificado: Sistema Dinâmico de Quantidades

Para facilitar nossa compreensão da operacionalização do modelo insumo-produto dinâmico vamos reduzi-lo a uma economia com duas indústrias. Deste modelo podemos ilustrar de imediato as propriedades vistas até aqui. Se utilizarmos à equação (3) com demanda final temos:

$$\begin{cases} X_1 = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + b_{11} X'_1 + b_{12} X'_2 + Y_1 \\ X_2 = a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + b_{21} X'_2 + b_{22} X'_2 + Y_2 \end{cases} \qquad (4')$$

2.1.1. Modelo Simplificado: Solução Homogênea

De imediato verificamos que para resolver o modelo nos precisamos conhecer a forma dos Ys ou seja, das demandas finais de cada setor. Portanto, a solução envolve diretamente resolver a parte homogênea do modelo, para o qual a forma dos Ys é irrelevante. Nossa tarefa fica estabelecida da seguinte forma:

[1] Primeiro vamos resolver a parte homogênea

[2] Segundo a parte não-homogênea

[3] Juntar as duas partes e obter a solução final.

Procedamos à primeira parte. Seja o sistema homogêneo

$$\begin{cases} -b_{11} X'_1 + (1 - a_{11}) X_1 - b_{12} X'_2 - a_{12} X_2 = 0 \\ -b_{21} X'_1 - a_{21} X_1 - b_{22} X'_2 + (1 - a_{22}) X_2 = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

de primeira ordem, estabelecido em forma não-normal, desde que as derivadas de ambas as funções apareçam. Calculamos a equação característica como segue:

$$\begin{vmatrix} -b_{11}\lambda + (1 - a_{11}) & -b_{12}\lambda - a_{12} \\ -b_{21}\lambda - a_{21} & -b_{22}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21})\lambda^2 - [(1 - a_{11}) b_{22} + (1 - a_{22}) b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{21} b_{12}]\lambda + [(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{21} a_{12}] = 0 \qquad (6)$$

O descriminante expandido da equação do 2º grau em λ é:

$$\Delta = \left[(1-a_{11})b_{22} - (1-a_{22})b_{11} + a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}\right]^2 +$$
$$+ 4\left[(1-a_{11})b_{22}a_{21}b_{12} + (1-a_{22})b_{11}a_{12}b_{21} + b_{22}b_{11}a_{21}a_{12} + b_{12}b_{21}(1-a_{11})(1-a_{22})\right] \quad (7)$$

Lembramos que: para que um sistema seja viável $(1-a_{11})$, $(1-a_{22})$ e $\left[(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}\right]$ devem ser todos positivos. Neste caso, é suficiente que $(1-a_{11})$ e $(1-a_{22})$ sejam positivos para garantia de viabilidade. A partir desta constatação podemos afirmar que ao menos uma das raízes da equação é positiva. Ao realizarmos com a devida atenção o exame de equação (6) tendo em vista os sinais de seus coeficientes temos:

a) o coeficiente em λ^2 pode assumir qualquer sinal.
b) o coeficiente em λ é negativo, devido à condição de viabilidade.
c) o termo constante é positivo, devido à condição de viabilidade.

Assim independentemente do sinal do coeficiente de λ^2, existe certamente uma variação na seqüência dos sinais dos coeficientes, e isto significa uma raiz positiva ($\Delta > 0$). Com efeito, temos três casos para analisar:

Caso 1: $b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21} < 0$

Usando esta informação em (6) verificamos que a sucessão de sinais é - - +, e assim existem duas raízes: uma negativa e uma positiva.

Caso 2: $b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21} = 0$

Usando esta informação em (6) verificamos que reduzimos a equação característica a

$$-\left[(1-a_{11})b_{22} + (1-a_{22})b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{21}b_{12}\right]\lambda + \left[(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{21}a_{12}\right] = 0$$

que é uma equação característica de 1º grau em λ; cuja única raiz é necessariamente positiva.

Caso 3: $b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21} > 0$

Usando esta informação em (6) verificamos que a sucessão de sinais é + - + e assim concluímos que existem duas raízes positivas. Abstraindo para visualização geométrica (plano de fase), em geral o movimento realizado pela parte homogênea do sistema é divergente, significando que para *t* suficientemente grande, o termo contendo raiz positiva maior, dominará de modo que todas as variáveis tenderão a crescer na mesma taxa proporcional dada pela raiz dominante. A solução de (5) é dada por

$$X_1(E) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$$

onde λ_1, λ_2 são raízes de (6) e os coeficientes α_1 e α_2 correspondem a

$$\alpha_1 = \frac{1-a_{11}-b_{11}\lambda_1}{a_{12}+b_{12}\lambda_1} \qquad \alpha_2 = \frac{1-a_{11}-b_{11}\lambda_2}{a_{12}+b_{12}\lambda_2}$$

2.1.2. Modelo Simplificado: Solução Geral

Nosso propósito nesta seção é determinar a solução particular do sistema não-homogêneo (4). Para isso vamos examinar dois casos: demandas finais constantes e demandas finais exponencialmente crescentes.

2.1.2.1. Demandas finais constantes

Sejam $Y_1 = c_1, Y_2 = c_2$, onde c_1 e c_2 são duas constantes positivas. Como uma solução particular tentamos $\overline{X}_1 = B_1$ e $\overline{X_2} = B_2$ onde B_1 e B_2 são constantes indeterminadas. Fazendo a substituição dessas constantes em (4) temos:

$$B_1 = a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + b_{11}.0 + b_{12}.0 + c_1$$
$$B_1 = a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + 0 + 0 + c_1$$
$$B_1 - a_{11}B_1 = a_{12}B_2 + c_1$$
$$(1 - a_{11})B_1 - a_{12}B_2 = c_1 \tag{9}$$

e

$$B_2 = a_{21}B + a_{22}B_2 + b_{21}.0 + b_{22}.0 + c_2$$
$$B_2 = a_{21}B + a_{22}B_2 + 0 + 0 + c_2$$
$$B_2 - a_{22}B_2 = a_{21}B_1 + c_2$$
$$(1 - a_{22})B_2 - a_{21}B_1 = c_2 \tag{10}$$

Resolvendo (9) e (10) para B_1 e B_2 utilizando a regra de **Cramer**:

$$\begin{cases} (1 - a_{11})B_1 - a_{12}B_2 = c_1 \\ -a_{21}B_1 + (1 - a_{22})B_2 = c_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1 - a_{11}) & (-a_{12}) \\ (-a_{21}) & (1 - a_{22}) \end{vmatrix} = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - (-a_{12})(-a_{21}) \neq 0$$

Ou seja, $\Delta \neq 0$ corresponde a condição de compatibilidade do sistema, o que do ponto de vista econômico significativo condição de viabilidade econômica.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & (-a_{12}) \\ c_2 & (1 - a_{22}) \end{vmatrix} \therefore \Delta_t = c_t(1 - a_{22}) + c_2 a_{12}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 - a_{11} & (-a_{12}) \\ -a_2 & (1 - a_{22}) \end{vmatrix} \therefore \Delta_2 = (1 - a_{11})c_2 + c_1 a_{21}$$

Façamos:

$$B_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \therefore B_1 = \frac{c_1(1 - a_{22}) + c_2 a_{12}}{(1 - c_{11})(1 - a_{22}) + (a_{12})(a_{21})}$$

$$B_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \therefore B_2 = \frac{(1 - a_{11})c_2 + c_1 a_{21}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) + (a_{12})(a_{21})} \tag{11}$$

Conjugando as soluções homogênea e particular do sistema não-homogêneo obtemos a solução geral:

$$X_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + B_1$$

$$X_2(t) = A_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + A_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t} + B_2 \tag{12}$$

Façamos $X_1(0)$ e $X_2(0)$ em (12) para determinarmos A_1 e A_2. Logo:

$$\begin{cases} X_1(0) = A_1 l^{\lambda_1 - 0} + A_2 l^{\lambda_2 - 0} + B_1 \\ X_2(0) = A_1\alpha_1 l^{\lambda_1 - 0} + A_2\alpha_2 l^{\lambda_2 - 0} + B_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1(0) = A_1 + A_2 + B_1 \\ X_2(0) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + B_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = X_1(0) - B_1 \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = X_2(0) - B_2 \end{cases}$$

Utilizando a regra de Cramer para resolver o sistema temos:

$$A_1 = \frac{[X_1(0) - B_1]\alpha_2 - [X_2 - (0) - B_2]}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

$$A_2 = \frac{[X_2(0) - B_2] - [X_1(0) - B_1].\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \tag{13}$$

onde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \therefore \Delta = \alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$$

é a condição de compatibilidade do sistema. Enfim substituindo (13) em (12) obtemos:

$$X_1(t) = \frac{[X_1(0) - B_1]\alpha_2 - [X_2(0) - B_2]}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\lambda_1 t} + \left\{ \frac{[X_2(0) - B_2] - [X_1(0) - B_1]\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right\} e^{\lambda_2 t} + B_1$$

$$X_1(t) = \frac{[X_1(0) - B_1]\alpha_2 - [X_2(0) - B_2]}{\alpha_2 - \alpha_1} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \left\{ \frac{[X_2(0) - B_2] - [X_1(0) - B_1]\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right\} \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + B_1 \tag{14}$$

que é a solução geral do sistema não-homogênea na forma modificada.

2.2.2.2. Demandas finais exponenciais crescentes

Seja $Y_1 = d_1 e^{ut}$, $Y_2 = d_2 e^{ut}$ onde d_1, d_2 e u são constantes positivas dados. Façamos como no item anterior, $\overline{X_1}(t) = B_1 e^{ut}$, $\overline{X_2}(t) = B_2 e^{ut}$ onde B_1 e B_2 são constantes indeterminadas. Fazendo a substituição destes valores em (4) temos:

$$\begin{cases} B_1 e^{ut} = a_{11}B_1 e^{ut} + a_{12}B_2 e^{ut} + b_{11}uB_1 e^{ut} + b_{12}uB_2 e^{ut} + d_1 e^{ut} \\ B_2 e^{ut} = a_{21}B_1 e^{ut} + a_{22}B_2 e^{ut} + b_{21}uB_1 e^{ut} + b_{22}uB_2 e^{ut} + d_2 e^{ut} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{ut}\left[(1-a_{11}-ub_{11})B_1-(a_{12}+b_{12}u)B_2-d_1\right]=0 \\ e^{ut}\left[-(a_{21}+b_{21}u)B_1+(1-a_{22}-ub_{22})B_2-d_2\right]=0 \end{cases} \qquad (15)$$

Sabemos que: $a.b=0$ se $a=0$ ou $b=0$. Aplicamos isso em (15) temos:

$$\begin{cases} (1-a_{11}-ub_{11})B-(a_{12}+b_{12}u)B_2=d_1 \\ -(a_{21}+b_{21}u)B_1+(1-a_{22}-ub_{22})B_2=d_2 \end{cases} \qquad (16)$$

Resolvendo o sistema (16) aplicando a regra de Cramer:

$$B_1=\frac{(1-a_{22}-ub_{22})d_1+(a_{12}+b_{12}u)d_2}{(1-a_{11}-ub_{11})(1-a_{22}-ub_{22})-(a_{12}+b_{12}u)(a_{21}+b_{21}u)}$$

$$(17)$$

$$B_2=\frac{(1-a_{11}-ub_{11})d_2+(a_{12}+b_{12}u)d_2}{(1-a_{11}-ub_{11})(1-a_{22}-ub_{22})-(a_{12}+b_{12}u)(a_{21}+b_{21}u)}$$

Conjugando as soluções homogêneas e a particular do sistema não homogêneo obtemos a solução geral:

$$\begin{cases} X_1(t)=A_1e^{\lambda_1-t}+A_2e^{\lambda_2-t}+B_1e^{ut} \\ X_2(t)=A_1\alpha_1e^{\lambda_1-t}+A_2\alpha_2e^{\lambda_2-t}+B_2e^{ut} \end{cases} \qquad (18)$$

que escrito de outra forma:

$$X_1(t)=A_1e^{\lambda_1-t}+A_2e^{\lambda_2-t}+\left[\frac{(1-a_{22}-ub_{22})d_1+(a_{12}+b_{12}u)d_2}{(1-a_{11}-ub_{11})(1-a_{22}-ub_{22})-(a_{12}+b_{12}u)(a_{21}+b_{21}u)}\right].e^{ut}$$

$$(19)$$

$$X_2(t)=A_1\alpha_1e^{\lambda_1-t}+A_2\alpha_2e^{\lambda_2-t}+\left[\frac{(1-a_{11}-ub_{11})d_2+(a_{21}+b_{21}u)d_1}{(1-a_{11}-ub_{11})(1-a_{22}-ub_{22})-(a_{12}+b_{12}u)(a_{21}+b_{21}u)}\right].e^{ut}$$

Façamos $X_1(0)$ e $X_2(0)$ em (12) para determinarmos A_1 e A_2. Logo:

$$\begin{cases} A_1+A_2=X_1(0)-B_1 \\ \alpha_1A_1+\alpha_2X_2=X_2(0)-B_2 \end{cases} \qquad (20)$$

Resolvendo (20) pela regra de Cramer para A_1 e A_2:

$$A_1=\frac{\left[X_1(0)-B_1\right]\alpha_2-\left[X_2(0)-B_2\right]}{\alpha_2-\alpha_1}$$

$$A_2=\frac{\left[X_2(0)-B_2\right]-\left[X_1(0)-B_1\right]\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} \qquad (21)$$

Se substituirmos (21) em (19) obteremos uma expressão para a solução geral:

$$X_1(t)=\left\{\frac{[X_1(0)-B_1]\alpha_2-[X_2(0)-B_2]}{\alpha_2-\alpha_1}\right\}e^{\lambda_1 t}+\left\{\frac{[X_2(0)-B_2]-[X_1(0)-B_1]\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right\}e^{\lambda_2 t}+B_1.e^{ut}$$

$$X_2(t)=\left\{\frac{[X_1(0)-B_1]\alpha_2-[X_2(0)-B_2]}{\alpha_2-\alpha_1}\right\}\alpha_1 e^{\lambda_1 t}+\left\{\frac{[X_2(0)-B_2]-[X_1(0)-B_1]\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right\}\alpha_2 e^{\lambda_2 t}+B_1.e^{ut} \quad (22)$$

2.3. Modelo Simplificado: Sistema Dinâmico de Preços

Vamos considerar agora a introdução do sistema dinâmico de preços em nossa economia hipotética simplificada de dois setores. As equações de preços que vamos considerar são as seguintes (neste caso vamos seguir SAMUELSON & DORFMAN & SOLOW, 1958):

$$\begin{cases} p_1=(a_{11}p_1+a_{21}p_2)+r(b_{11}p_1+b_{21}p_2)-(b_{11}p_1^{'}+b_{21}p_2^{'}) \\ p_2=(a_{21}p_1+a_{22}p_2)+r(b_{12}p_1+b_{22}p_2)-b_{12}p_1^{'}+b_{22}p_2^{'}) \end{cases}$$

onde r é a taxa de juros. Reescrevendo (23):

$$\begin{cases} b_{11}p_1^{'}+(1-a_{11}-rb_{11})p_1+b_{21}p_2^{'}-(a_{21}+rb_{21})p_2=0 \\ b_{12}p_1^{'}-(a_{12}+rb_{12})p_1+b_{22}p_2^{'}+(1-a_{22}-rb_{22})p_2=0 \end{cases} \quad (24)$$

A equação característica de (24) é:

$$\begin{vmatrix} b_{11}p+1-a_{11}-rb_{11} & b_{21}p-a_{21}-rb_{21} \\ b_{12}p-a_{12}-rb_{12} & b_{22}p+1-a_{22}-rb_{22} \end{vmatrix}=0 \quad (25)$$

Que pode ser reescrita:

$$\begin{vmatrix} -b_{11}\lambda+(1-a_{11}) & -b_{21}\lambda-a_{21} \\ -b_{12}\lambda-a_{12} & -b_{22}\lambda+(1-a_{22}) \end{vmatrix}=0$$

onde $\lambda=r-p$. A solução de (24) é:

$$\begin{cases} p_1(t)=B_1e^{p_1t}+B_2e^{p_2t} \\ p_2(t)=B_2\alpha_1e^{p_1t}+B_2\alpha_2e^{p_2t} \end{cases} \quad (26)$$

Para evitar que façamos todos os cálculos novamente, teçamos alguma consideração: dede que $p=r-\lambda$ segue que as raízes características do sistema de preços pode ser obtida ao subtrair de r as raízes características do sistemas de quantidades.

2.4. Modelo Simplificado: Estabilidade

Com esta atitude deixamos espaço para fazer considerações de natureza relevante no tocante a estabilidade do sistema. Deste modo, afirmamos que o sistema é relativamente estável se, quando $t\to\infty$, todos os produtos tendem a crescer à taxa λ. Formalmente,

$$\lim_{t->\infty}\frac{X_1^{'}(t)}{X_1(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda_1A_1l^{\lambda_2t}+\lambda_2A_2l^{\lambda_2t}}{A_1l^{\lambda_1t}+A_2l^{\lambda_{21}t}}$$

$$= \lambda_1 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+(\frac{A_2}{A_1})l^{(\lambda_2-\lambda_1)}} + \lambda_2 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+(\frac{A_1}{A_2})l^{(\lambda_2-\lambda_3)t}}$$

$$= \lambda_1.1 + \lambda_2.0$$
$$= \lambda_1$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_2^{'}(t)}{X_2} = \frac{\lambda_1 A_1 \alpha_1 l^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 \alpha_2 l^{\lambda_2 t}}{A_1 \alpha_1 l^{\lambda_1 t} + A_2 \alpha_2 l^{\lambda_2 t}}$$
$$= \lambda_1$$

Nosso sistema atende ao TEOREMA DA ESTABILIDADE DUAL: se o sistema produção é relativamente estável (como mostra acima) o sistema preço é relativamente instável.

2.5. Aplicação

Após a resolução dos sistema proposto, vamos procurar ilustra-lo numericamente. Vamos realizar nossa tarefa da seguinte maneira:

[1] utilizar a equação diferencial em sua forma homogenaea e calculamos sua solução.
[2] utilizamos a equação diferencial em sua forma não homogênea e calculamos a sua solução.
[3] calculamos a solução final.

Façamos: $$\begin{cases} 0{,}9X_1 - 2X_1^{'} - 0{,}9X_2 = 90 \\ -3X_1^{'} - 0{,}4X_1 + 0{,}8X_2 = 80 \end{cases} \qquad (*)$$

o sistema de equações diferenciais não homogêneos que representa nossa economia simplificada de dois setores. Resolvemos o sistema determinando sua equação característica:

$$\begin{vmatrix} 0{,}9 & -2\lambda - 0{,}9 \\ -3\lambda - 0{,}4 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0 \therefore -6\lambda^2 - 3{,}5\lambda + 0{,}36 = 0$$

cujas raízes são $\lambda_1 = -0{,}6725$ e $\lambda_2 = 0{,}08916$. Os coeficientes são:

$$\alpha_1 = \frac{0{,}9}{0{,}9 - 2.0{,}6725} \therefore \alpha_1 = -2{,}0225$$

$$\alpha_1 = \frac{0{,}9}{0{,}9 - 2.0{,}08916} \therefore \alpha_2 = 0{,}8346$$

A solução homogênea do sistema proposto é:

$$X_1(t) = A_{1.}e^{-0{,}6725t} + A_2.e^{+0{,}08916t}$$
$$X_2(t) = A_1.(-2{,}0225)e^{-0{,}6725t} + A_2.(0{,}8346)e^{+0{,}08916t}$$

Como solução particular do sistema proposto tentamos $\overline{X_1} = B$ e $\overline{X_2} = B_2$ onde, novamente B_1 e B_2 são constantes indeterminadas. Portanto:

$$\begin{cases} 0{,}9B_1 - 0{,}9B_2 = 90 \\ -0{,}4B_1 + 0{,}8B_2 = 80 \end{cases}$$

Usando a regra de Cramer para solução do sistema temos:

$B_1 = 400$ e $B_2 = 300$

A solução do sistema proposto é a conjugação da solução homogênea com a solução particular

$$X_1(t) = A_{1.}e^{-0,6725t} + A_2.e^{+0,08916t} + 400$$

$$(**)$$

$$X_2(t) = A_1.(-2,0225)e^{-0,6725t} + A_2.(0,8346)e^{+0,08916t} + 300$$

se quisermos determinar A_1 e A_2 procedemos tomando $t = 0$, resultando

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + 400 = 500 \\ -2,00225A_1 + 0,8346A_2 + 300 = 400 \end{cases}$$

fornecendo $A_1 = 5,789$ e $A_2 = 105,789$. Substituindo A_1 e A_2 em (**) obtemos a forma final da solução do sistema dinâmico não homogêneo:

$$\begin{cases} X_1(t) = (-5,789)e^{-0,6725t} + (105,789)e^{+0,08916t} + 400 \\ X_2(t) = (-0,5789)(-2,0225)e^{-0,6725t} + (105,789)(0,8346)e^{+0,08916t} + 300 \end{cases} \quad (***)$$

As equações-soluções (***) mostram a evolução do produto de cada setor (indústria) de economia no decorrer do tempo.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste paper foi desenvolvido um modelo de insumo-produto dinâmico na versão em temo continuo que mostra a evolução dos produtos de duas indústrias no decorrer do tempo. Realizamos a nossa tarefa, primeiro construindo um modelo especifico de dois setores abstratos para em seguida usarmos um exemplo numérico consistente. Ademais apresentamos nosso modelo na versão de sistema de quantidades e de preços e aplicamos o Teorema de Estabilidade Dual para mostrar que à medida que um dos sistemas for estável o outro será estável. (daí a dualidade).

Uma outra forma de ter desenvolvido nosso paper teria sido usando uma versão de tempo discreto que levaríamos a solução de equações à diferença e uso de idéias semelhantes quanto à execução do problema de estabilidade do sistema.

BIBLIOGRAFIA

ALLEN, R.G.D. *Mathematical Economics*. MacMillan Company. 1957. Chapters 5, 10, 11, 12, 13, 14.

BLITZER, CHARLES R; PETER B. CLARK: LANCE TAYLOR. *Economy-Wide Molels and Development Planning.* Oxford University Press. 1975. Pages 1-12, 33-109.

BUSHAW, D.W.;R.W.CLOWER. *Introduction to Mathematical Economics***.** Richad D. Irwin Inc 1957. Chapters 3, 4, 6, 11, 12.

DERVIS, KEMEL; JAIME DE MELO; SHERMAN ROBINSON. *General Equilibrium Models for Development Policy***.** Cambridge University Press. 1982 Pages 17-61.

LEONTIEF, WASSILY. *Input-Output Economics*. 1985. Pages 19-40; 294-320.

LEONTIEF, WASSILY. *A economia do Insumo-Produto*. Abril Cultural. 1981.

MILLER, R.E. P. O. BLAIR. *Input-Output Analysis; Foundations and Extensions*. Prentice Hall. 1985.

INTRILIGATOR, MICHAEL D. *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Prentice-Hall. 1971. Chapters 9, Appendix B.

LANCASTER, KELVIN. *Mathematical Economics*. MacMillan Company. 1968. Chapters 6, 9, 10, 12. Part IV. R. 2, R. 3, R. 5, R. 6, R. 7, R. 10.

MIYAZAWA, K. *Input-Output Anaslysis and the Structure of Income Distribuition.* Springer-Verlag. 1976. Pages 1-21.

PASINETT, LUIGI L. *Lectures on the theory of Production* 19. Pages 1-34, 35-47; 48-53; 54-70; 191-225.

ROSE, ADAM Z; KAREN R. POLENSKE; RONALD E. MILLER. *Frontiers of Input-Output Analysis*. 1989. Pages 3-11; 37-50; 193-205; 209-221.

SAMUELSON, P.A.; R. DORFMAN; R. SOLOW. *Linear Programming Economics Analysis*. McGraw-Hill Ltd. 1958. Chapters 9, 10, 11, Appendix B.

SCARF, H.E.; J.B. SHOVEN. *Applied General Equilibrium Analysis*. Cambridge University Press. 1984.

WEINTRAUB E.R. *General Equilibrium Analysis: Studies in Apraisal*. The University of Michigan Press. 1993.

YAN, C.S. *Introdução á Economia de Insumo-Produto*. DIFEL/FORUM: São Paulo, 1975.