



ISSN 2175-6295

Rio de Janeiro- Brasil, 05 e 06 de agosto de 2009.

SPOLM2009

029/2009 - USO DA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL NA MODELAGEM DA MORFOGENESE

Geraldo Azar Miguez

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação – COPPE/UFRJ
Cidade Universitária, Centro de Tecnologia, Bloco H, Sala 319 – Rio de Janeiro
geraldomiguez@yahoo.com

Luis Alfredo Vidal de Carvalho

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação – COPPE/UFRJ
Cidade Universitária, Centro de Tecnologia, Bloco H, Sala 319 – Rio de Janeiro
alfredo@cos.ufrj.br

Resumo

Com o uso de técnicas de Inteligência Artificial foi desenvolvido este sistema para aplicação na modelagem de sistemas complexos, em especial processos de morfogênese. Esta é uma das áreas de maior interesse da Embriologia e de outros processos sociais e industriais. Os autômatos celulares são uma das ferramentas conceituais mais empregadas na modelagem destes sistemas. Sua utilização neste trabalho é inovada pela obtenção das regras de transição através da utilização de redes neuronais. Não há necessidade de conhecimentos específicos dos processos subjacentes à morfogênese para sua utilização. O modelo permite gerar uma imagem completa, a partir de uma semente inicial, possibilitando avaliar o comportamento do processo diante de alterações ocorridas em suas fases iniciais. Ele procura representar um processo natural que geraria aquela forma, englobando o comportamento de todos os agentes que podem influenciar nesta geração. Sua utilização, conforme testes realizados, pode abranger o tratamento de diversas categorias de imagens, abrindo uma perspectiva ainda maior para o seu uso.

Palavras-Chaves: Inteligência artificial; Redes neuronais; Autômatos celulares; Modelagem matemática; Morfogênese.

Abstract

With the use of Artificial Intelligence techniques, a system was devised to be used in the modeling of complex systems, specifically processes of morphogenesis. This is one of the fields of greatest interest in embryology. Cellular automata are one of the most employed conceptual tools in the modeling of these systems. They use the knowledge of the biological substratum that explains the generation of forms to generate their transition rules. This is one of the hindrances to their employment, because such knowledge is not always available or is not always easy to use.

The use of cellular automata in my work introduces the obtainment of transition rules. It is done with the use of neural networks which, through a learning process with basic patterns, generate the necessary rules for the modeling of biological processes of morphogenesis. One does not need specific knowledge of the processes subjacent to the morphogenesis to use what I describe in this work. The model allows us to generate a complete image from an initial seed, permitting us to evaluate the behavior of the process if changes are made at its initial stages. The model seeks to represent a natural process that would generate a given form, encompassing the behavior of all the agents that could influence it. Its employment, according to tests made, may include the treatment of several categories of images, opening up an even greater perspective for its use.

Keywords: Artificial intelligence; Neural network; Cellular automata; Mathematical model; Morphogenesis.

1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de sistemas complexos tem se desenvolvido, principalmente, com o uso de equações diferenciais e utilização de autômatos celulares. Enquanto as equações diferenciais procuram representar os processos subjacentes que geram o comportamento observado, os autômatos celulares se caracterizam por tentar reproduzir o que se acredita que sejam as leis da natureza, ou seja, obter um resultado complexo com base na interação de regras simples.

Os sistemas biológicos se enquadram na categoria de sistemas complexos e, como tal, têm sido objeto de estudo ao longo dos tempos. Um dos principais focos deste estudo tem sido a busca pela melhor maneira de desenvolver modelos matemáticos para representá-los, pois, com a melhoria destes modelos, será possível a realização de estudos que normalmente são difíceis de serem feitos pela observação direta.

A morfologia é uma característica que se destaca como objeto de estudos nesta área. Ela é a parte da embriologia que cuida do desenvolvimento de padrões e formas. Desde o pioneiro Alan Turing, vários modelos de morfogênese vêm sendo propostos e têm a sua importância reconhecida em vários campos da biologia como, por exemplo, o da biologia celular, o da embriologia e o da ecologia.

2 AUTÔMATOS CELULARES

Os Autômatos Celulares formam uma classe de modelos computacionais que representam uma idealização matemática de um sistema físico dinâmico discreto, ou seja, onde o tempo e o espaço são discretos e podem somente assumir um número finito e contável de estados. Eles são suficientemente simples de forma a permitir uma análise matemática detalhada, embora sejam complexos o bastante para representarem um amplo espectro de fenômenos. Tentam emular a maneira de funcionamento que se supõe que seja a das leis da natureza que regem os sistemas complexos. [4] [12].

Eles são formados por uma estrutura reticular regular n-dimensional de células, seus elementos básicos, as quais possuem, além de um conjunto finito de estados predefinidos, um conjunto de regras de transição que definem as condições necessárias para a mudança de estados. Normalmente, a aplicação destas regras de transição é baseada no estado atual da célula e no de suas vizinhas, sendo que os estados são alterados ao mesmo tempo para todas as células do arranjo. A idéia básica por trás da utilização dos Autômatos Celulares para representar um sistema complexo é a de deixar a complexidade emergir pela interação de indivíduos simples, seguindo regras simples. Ou seja, apesar de cada célula deste arranjo ter um estado discreto, ele apresenta um comportamento dinâmico descrito pelas regras que descrevem o estado das células para o próximo período. Os Autômatos Celulares podem, também, serem considerados como uma alternativa discreta às equações diferenciais parciais, freqüentemente usadas para descrever os sistemas naturais [11] [13].

3 REDES NEURONAIS ARTIFICIAIS

As redes neuronais artificiais extraem o seu poder computacional de sua estrutura distribuída paralelamente e de sua habilidade de aprender e generalizar. Esta generalização permite que se obtenham saídas adequadas para entradas que não estavam presentes no treinamento. Estas redes se constituem em uma alternativa à computação algorítmica convencional. São sistemas paralelos distribuídos compostos por unidade de processamento simples que calculam funções matemáticas determinadas, sendo dispostas em uma ou mais camadas. A maneira pela qual os neurônios estão organizados em uma rede é intimamente ligada com o algoritmo de aprendizado usado para treinar a rede.

Redes Neuronais Artificiais conhecidas por Perceptrons Multicamadas (MLP) têm sido aplicadas com sucesso em uma variedade de áreas, desempenhando tarefas tais como: classificação de padrões (reconhecimento), controle e processamento de sinais. Elas são constituídas por um conjunto de nós fonte, os quais formam a camada de entrada da rede, uma ou mais camadas escondidas e uma camada de saída. O algoritmo de treinamento mais usado para este tipo de rede é o conhecido na literatura por Aprendizado por Retropropagação de Erros [2] [5].

4 MORFOGÊNESE

A Embriologia é uma parte da biologia que se ocupa da formação e do desenvolvimento do embrião desde a fertilização até o nascimento e a Morfologia é a parte da embriologia que cuida do desenvolvimento de padrões e formas. O desenvolvimento inicial de um organismo multicelular é um fenômeno complexo e um dos principais problemas atualmente na biologia é o de como a informação genética é fisicamente traduzida nos padrões e formas necessários [7].

Modelos de morfogênese são importantes em variados campos da biologia, incluindo a biologia celular, a embriologia, a ecologia entre outros [1]. Os padrões complexos observados nos sistemas biológicos se desdobram no tempo e no espaço. São processos, em sua maioria randômicos, que dão origem à formação de um padrão específico. O entendimento de como isto ocorre, com as interações entre suas unidades componentes, também é relevante para o projeto de equipamentos distribuídos, onde a solução de problemas pode ser feita pela descoberta de um padrão específico, como ocorre na morfogênese.

Um trabalho pioneiro nesta área foi desenvolvido por Alan Turing que mostrou como padrões poderiam emergir como resultado de uma instabilidade difusiva ou de Turing: Perturbações espaciais não-homogêneas podem, sob certas condições, crescer exponencialmente, enquanto que perturbações espaciais constantes desaparecem [3] [9] [10].

A modelagem nesta área toma diversas formas, dependendo da escala espaço-temporal e do nível de detalhes que se esteja buscando capturar. Em um extremo temos sistemas bem ajustados de equações diferenciais ordinárias, nos quais se assume que o sistema é bem homogêneo e que as informações espaciais foram perdidas e que todos os indivíduos, como por exemplo, as moléculas, são considerados como tendo estados idênticos. Do outro lado, estão os modelos de autômatos celulares, nos quais cada elemento pode representar um indivíduo, ou um grupo de indivíduos, com características específicas, por exemplo, a idade, que pode variar de um indivíduo para o outro. Este enfoque possibilita que o comportamento da população evolua em resposta a interações entre os indivíduos. Nos autômatos celulares híbridos é possível modelar os fenômenos intracelulares com equações diferenciais ordinárias enquanto que o comportamento global pode ser modelado por equações diferenciais parciais. Desta forma é possível se resolver o problema crucial de se modelar em diferentes escalas. Existem muitos níveis de modelagem entre estes dois extremos, cada qual com seus pontos fortes e fracos [6] [8].

5 MODELO DESENVOLVIDO

O modelo desenvolvido apresenta as características de um sistema tradicional de Autômatos Celulares associado com um de Redes Neurais Artificiais (RNA). Ele procura combinar o reconhecido poder de aprendizagem e generalização das RNAs com a facilidade de uso e a já consagrada capacidade de representação pelos Autômatos Celulares dos processos de morfogênese.

Ele é baseado em um arranjo bi-dimensional de Autômatos Celulares e, para o treinamento e execução dos testes de avaliação, o arranjo adotado é composto por conjunto de 2500 células, organizadas na forma de uma matriz com 50 linhas e 50 colunas. O formato da célula adotado foi o quadrangular, não por restrição do modelo, mas pela facilidade de implementação que esta forma oferece no uso do software escolhido. A aplicação das regras de transição, como é comum, é baseada nos estados das células vizinhas e no da própria célula. A vizinhança das células é definida local e uniformemente, ou seja, todas as células do autômato o mesmo número de vizinhos e a mesma geometria. O número de camadas de células contíguas considerado, que chamamos de raio da vizinhança, define o número de células a serem avaliadas. Foram avaliadas diversas características para a vizinhança. Como por exemplo, uma vizinhança irregular, com todas as células do arranjo como vizinhos. Os resultados obtidos foram satisfatórios, entretanto houve um aumento muito grande no tempo de processamento gasto para o treinamento das redes neuronais. Objetivando uma redução deste tempo de processamento, sem perda na qualidade da geração da imagem, foram testados outros tipos de vizinhança, variando o raio e a geometria, usando entre outros a vizinhança radial. Como resultado do processo de otimização do modelo, a vizinhança adotada foi o modelo conhecido como vizinhança de Moore, com raio igual a um. Para tratar a necessidade de que o autômato seja infinito em todas as dimensões, são definidas condições de limite para que se possa simular um autômato infinito, contornando o problema de implementação trazido pelas limitações físicas computacionais. Foi adotada como forma de comportamento nas bordas do arranjo a complementação do conjunto de vizinhos das células com o que conhecemos por limites de valores fixos que é obtida simplesmente descrevendo os estados das células no contorno do autômato. Foram considerados os limites como não tendo nenhum sinal em qualquer instante da simulação, ou seja, apresentam sempre o estado zero, sem ativação.

Na implementação deste modelo a condição inicial do sistema é dada pelos sinais de ativação das células formadoras da semente apresentada. A geração da forma se inicia a partir deste ponto. A semente fornecida pode ser considerada como sendo a representação de como a geração da forma desejada transcorreu até aquele momento inicial. Pela convenção adotada nestes testes o ponto designado como sendo a origem da forma estudada é aquele em que se encontra a célula mais à esquerda e mais próxima do limite inferior do autômato. A existência de uma semente a partir de um ponto diferente daquele designado como sendo a origem, pode ser entendida como alguma deformação ocorrida no processo inicial de geração da forma. Isto pode implicar na geração de uma imagem diferente da usada no treino inicial, pois reflete o fato da geração iniciar posteriormente ao surgimento da anomalia inicial.

O autômato celular possui um conjunto de estados, finito e pré-definido, que apresenta os possíveis estados em que cada célula poderá se encontrar num determinado instante. Neste modelo foram considerados dois estados: o estado ativo que indica que a célula faz parte da imagem gerada ou da semente fornecida; e outro estado que representa uma célula inativa, cujo valor foi avaliado e considerado que ela não faz parte da imagem que está sendo gerada.

Quando se analisa ou se caracteriza um autômato celular duas questões básicas surgem. Como pode ser previsto o comportamento global partindo-se das regras locais? Este é o enfoque conhecido como de baixo para cima (bottom-up). A outra questão diz respeito ao enfoque inverso, ou seja, de cima para baixo (top-down) e implica em como podemos especificar as regras locais para que se obtenha um comportamento global pré-selecionado.

A especificação destas regras, ou funções de transição, é muito importante para a implementação de um autômato celular e, em especial para o caso de estudo da morfogênese, a obtenção de regras locais a partir de um dado comportamento global, enfoque top-down é, normalmente, extremamente difícil.

Este ponto é o que apresenta a maior inovação do modelo desenvolvido em comparação com os modelos tradicionalmente utilizados. Ao invés da descrição dos processos de geração da forma em estudo, neste modelo foi feita a opção pela obtenção destas regras usando um enfoque top-down. A regra global que se quer aprender é baseada na maneira que a Natureza adota na geração da forma, ou seja, consideramos que a forma gerada pela natureza trás em si o resultado da influência de todos os processos subjacentes que participam da morfogênese. Assim, com o uso de RNAs, mais especificamente, usando uma rede neuronal artificial para avaliar a ativação ou não de cada célula, procura-se fazer com que o modelo aprenda como reagir em presença dos sinais advindos de células da sua vizinhança, criando para cada célula do arranjo as suas próprias regras locais. Estas regras locais reproduzem, assim, as leis globais do processo de morfogênese. Desta maneira, espera-se que autômato evolua de forma o mais próximo possível do que se acredita que acontece na natureza.

Foram adotadas redes neurais artificiais do tipo Perceptron Multicamadas (Multilayer Perceptron – MLP) com o objetivo de aprender as formas apresentadas. Cada rede é constituída por um conjunto de nós fonte, os quais formam a camada de entrada da rede, uma camada escondida e uma camada de saída. Todas as camadas são constituídas por neurônios e, portanto, apresentam capacidade computacional. É uma rede progressiva (feedforward) e está completamente conectada, pois cada nó em uma camada é conectado a todos os outros nós da camada adjacente. O número de nós fonte na camada de entrada da rede é determinado pela dimensionalidade do espaço de observação, que é responsável pela geração dos sinais de entrada. No modelo desenvolvido a quantidade de nós na camada de entrada é igual ao número de células da vizinhança adotada acrescida de mais uma entrada livre para o uso de bias ou polarização. O número de neurônios na camada de saída é determinado pela dimensionalidade requerida da resposta desejada e, no presente caso, a camada de saída é constituída por um único neurônio responsável por indicar o estado correspondente à célula onde se encontra a rede neuronal para o próximo período.

Outro ponto importante se refere à determinação do número de camadas escondidas e do número de neurônios em cada uma das camadas escondidas. Como não existem regras determinadas para tal especificação, foi adotado o uso de uma camada oculta, com a mesma quantidade de neurônios que os presentes na camada inicial. A existência de camadas ocultas se deve para permitir a extração de estatísticas de ordem superior de algum desconhecido processo aleatório subjacente, responsável pelo "comportamento" dos dados de entrada, processo sobre o qual a rede está tentando adquirir conhecimento. Este é um valor arbitrário e pode variar em função da análise do desempenho do modelo.

Para permitir que a rede neuronal artificial adquira uma perspectiva global do processo aleatório, apesar de sua conectividade local é fundamental a utilização de um algoritmo de treino supervisionado adequado. O algoritmo de treino consagrado pela literatura para isto é o algoritmo de retro-propagação do erro (backpropagation) e é o que foi utilizado neste modelo com o acréscimo do termo conhecido como momento, que procura contornar o problema que surge quando o vetor gradiente pode oscilar bastante entre pontos da superfície de erros, dificultando e diminuindo a velocidade de convergência para o erro médio quadrático desejado. Este termo faz com que a alteração dos pesos na iteração corrente dependa proporcionalmente também a alteração de pesos da iteração anterior. O modelo de cada neurônio da rede inclui uma função de ativação não-linear e adotamos a função sigmoideal definida pela tangente hiperbólica.

5.1 PADRÕES DE TREINAMENTO

Para a realização dos testes do modelo foi escolhido um conjunto de padrões correspondentes à imagens bastante presentes na natureza, representando ramificações que podem ser galhos de árvores, raízes de plantas ou mesmo a vascularização de um determinado tecido. Foram gerados diagramas a partir de imagens representando ramificações comuns na Natureza, digitalizadas e tratadas para se adequar aos limites do modelo utilizado. A simplificação que surge do tratamento automático destas imagens não implica na falta de capacidade do sistema de lidar com imagens mais complexa, mas apenas procura adequar ao arranjo utilizado e facilitar a visualização dos resultados obtidos.

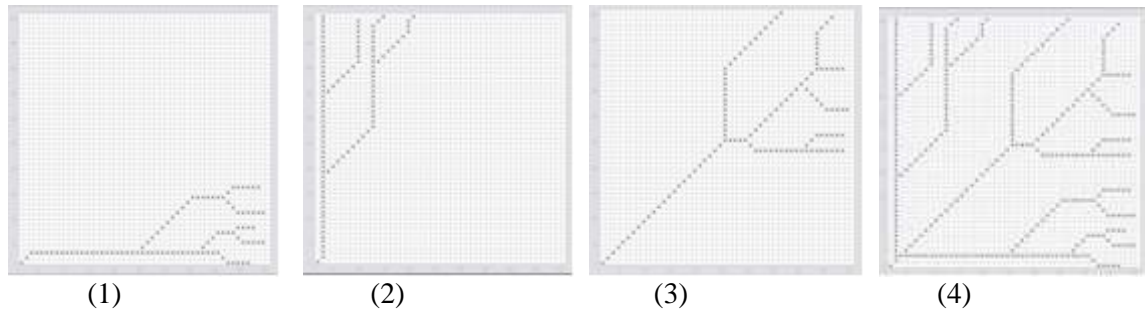


Figura 2. Padrões usados no treinamento

5.2 TESTES REALIZADOS

Foram realizados vários testes, alterando-se os parâmetros do sistema, para análise de sensibilidade, de forma a possibilitar a obtenção de um desempenho considerado satisfatório para o uso do protótipo. Os resultados apresentados abaixo representam o estado final do modelo, após a execução de processos de poda das redes neuronais utilizadas. Um dos primeiros testes foi realizado com as redes tendo como entrada os valores encontrados em cada uma das células do arranjo, o que apesar de apresentar um resultado satisfatório com relação à imagem gerada, tinha como contrapartida o elevado tempo total de treinamento da rede. Para que se possa avaliar este tempo, podemos considerar que a alteração do número de células da vizinhança, inicialmente todas as células do arranjo, para uma vizinhança de raio um, permitiu que a complexidade algorítmica para o treinamento das redes que apresentava $O(n^3)$ fosse reduzido para $O(n)$, onde n indica o número de células que compõem o arranjo.

5.2.1 IMAGENS GERADAS 1

O teste do modelo foi realizado marcando, em um primeiro momento, a semente que identifica unicamente cada um dos padrões, para determinar a capacidade de aprendizagem e geração das formas. A semente inicial é apresentada na figura marcada com o símbolo “+” e, a imagem gerada é marcada com o símbolo “o”, para possibilitar a diferenciação das duas partes da imagem. As imagens obtidas, como esperado, reproduzem fielmente os padrões fornecidos para o treinamento, mostrando a capacidade de discriminação do modelo, acompanhando a geração da imagem aprendida no treinamento.

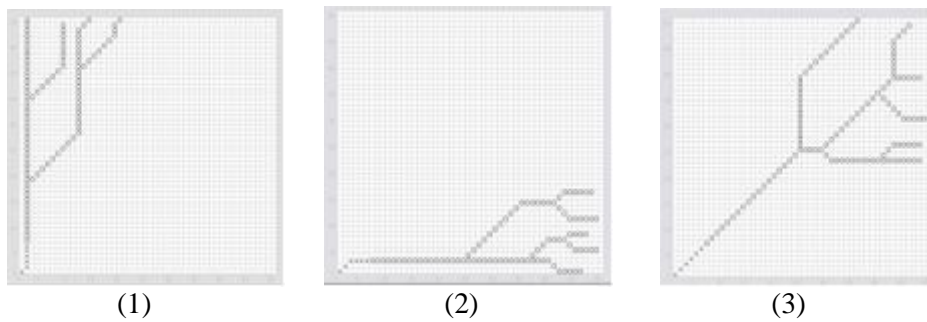


Figura 3. Imagens geradas com a semente identificando os padrões de treinamento

5.2.3 IMAGEM GERADA 2

O modelo consegue gerar as imagens fornecidas no treinamento, e para testar a sua capacidade de combinar os padrões fornecidos, esta imagem será gerada a partir de uma semente que não identifica unicamente um dos padrões, testando a sua capacidade de generalização.

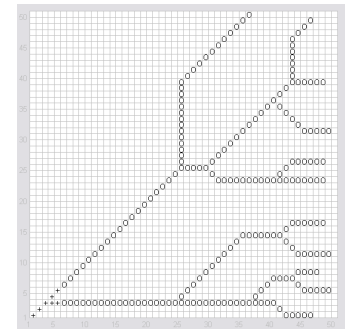


Fig. 4. Imagem gerada 2

5.2.3 IMAGEM GERADA 3

Para testar a sua capacidade reconhecer uma descontinuidade, um processo que não existe na morfogênese biológica, a próxima imagem será gerada a partir de uma semente que não identifica unicamente um dos padrões, mas apresenta uma descontinuidade no eixo horizontal. A imagem gerada acompanhou o padrão da diagonal, mas não deu continuidade ao padrão horizontal, uma vez que com a delimitação do quadrilátero definido pela origem e pelo ponto mais distante da semente, apareceu uma descontinuidade no eixo horizontal.

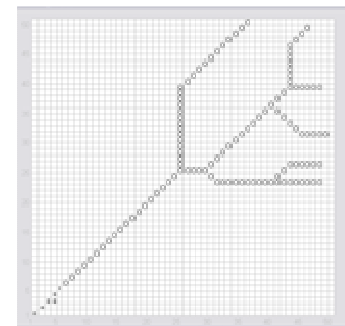


Fig. 5. Imagem gerada 3

6 CONCLUSÕES

Enquanto as metodologias atualmente em uso para a geração de padrões espaciais bidimensionais se utilizam da aplicação de autômatos celulares com regras definidas especificamente ou de modelos baseados em equações diferenciais parciais, este modelo procura resolver este problema diretamente pelo aprendizado dos padrões observados. Os outros métodos apresentam dificuldades na sua elaboração, pois dependem do conhecimento dos processos subjacentes para realizar a geração dos padrões desejados.

A utilização deste procedimento de aprender a criar as regras de transição a partir do comportamento geral do processo, mais especificamente da morfogênese, pela observação da forma gerada, traz a vantagem de incorporar influências externas que possam ter acontecido e provocado a geração do padrão observado como, por exemplo, a falta de algum nutriente durante o processo de geração da forma, ou seja, são incorporadas os processos de interação entre as células, a sua proliferação e o reagrupamento que pode ocorrer.

Como, em muitos casos, o interesse está na obtenção da forma gerada esperada a partir de segmentos iniciais da mesma, este modelo permite contornar as dificuldades inerentes à esta necessidade do conhecimento do substrato físico que condiciona a geração da forma. Pela análise dos testes realizados, foi possível constatar que, depois de treinado adequadamente, ele consegue reproduzir padrões espaciais completos e complexos, a partir de partes conhecidas do mesmo. A maior inovação deste método é a de não depender do conhecimento de todos os processos envolvidos na geração da forma, mas tão somente do conhecimento de como ela evolui ao longo do tempo. Esta informação é bem mais fácil e rápida de ser obtida bastando observar a ocorrência do processo.

Outro ponto de destaque do modelo desenvolvido é a sua capacidade de diminuir algumas das restrições existentes nos ambientes computacionais para modelagem dinâmica. Por exemplo, em relação à vizinhança normalmente considerada nos autômatos celulares tradicionais, como sendo estacionária, neste modelo ela pode ser adotada como uma matriz em que qualquer número de vizinhos pode ser considerado, bem como estes podem estar em qualquer direção, ou seja, variando sua configuração espacial, através de modificações de parâmetros de execução.

A utilização de redes neuronais artificiais independentes para cada um das células do arranjo, garante esta liberdade, bastando que sejam definidos os padrões adequadamente. Sendo estas redes do tipo *feedforward* com treinamento usando o algoritmo de *backpropagation*, bastante conhecidas na área de utilização, o seu uso é bastante facilitado, não exigindo conhecimentos muito profundos sobre sua modelagem. Além de sua fácil implementação, isso facilita a integração com outros elementos da equipe que, normalmente, são profissionais de fora da área de modelagem matemática e computacional.

Os resultados obtidos com os testes realizados permitem prever o sucesso em sua utilização em casos reais específicos. Ou seja, o objetivo proposto para este trabalho, que era o de mostrar a viabilidade de se conseguir a modelagem de processos de morfogênese usando um modelo discreto, constituído por um autômato celular e com suas regras de transição definidas pelo processo de aprendizagem de redes neuronais artificiais foi conseguido, abrindo-se uma nova perspectiva de estudos nesta área.

A metodologia aplicada pode ser desenvolvida para sua utilização em diversas áreas, necessitando para cada caso apenas o treinamento do modelo com as formas e padrões mais adequados. Ele pode ser adaptado facilmente para a utilização de mais estados por célula, abrindo o caminho para utilização, por exemplo, de esquemas coloridos. Esta metodologia também pode ser utilizada para autômatos tri-dimensionais, abrindo ainda mais o leque de aplicações e pesquisas. Para a obtenção de resultados mais adequados a cada tipo de processo avaliado, será necessária a experimentação com uma variação controlada dos seus parâmetros para se obter, dentro do limite de qualidade desejado, um menor tempo no processo de execução do seu treinamento. Também podem ser adotados outros critérios de direcionamento na geração da imagem, para permitir melhor adequação à geração de imagens fora do padrão biológico, como por exemplo, de paisagens em um filme, para seu uso na compactação e transmissão de imagens através do uso de sementes criadas, permitindo a sua reconstituição pelo receptor.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Berzins, M. et al. *Morphogenesis and Morphological Evolution*. Report on the Workshop held at the Santa Fe Institute, July 29-31, 2000
- [2] Braga, A. P., A. P. L. F. Carvalho and T. B. Ludermir, *Redes Neurais Artificiais: Teoria e Aplicações*, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2000.

- [3] Dartnell, L., *How the leopard got its spots*. Millennium Mathematics Project, University of Cambridge, 2004.
- [4] Griswold, R.E., *Drawdown Automata: Basic Concepts*, 2004, disponível em http://www.cs.arizona.edu/patterns/weaving/webdocs/gre_dda1.pdf acesso em 01/04/2005.
- [5] Haykin, S. *Redes Neurais: princípios e prática*. 2. ed. Porto Alegre, Bookman, 2001.
- [6] Maini, P.K., Foreword, *Cellular Automaton Modeling of Biological Pattern Formation*, by A. Deutsch and S. Dorman, Birkhauser, vii-viii (2005)
- [7] Prusinkiewicz, P., Lindenmayer, A., *Algorithmic Beauty of Plants*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [8] Schnell, S., R. Grima and P.K. Maini, *Multiscale Modeling in Biology*, American Scientist , 95, 134-142 (2007).
- [9] Swinton, J., “Watching the daisies grow: Turing and Fibonacci phyllotaxis”. To appear in *Alan Turing: a 90th Anniversary Festschrift*, ed C Teuscher, Springer-Verlag 2003. disponível em www.swintons.net/jonathan/turing.htm acesso em 26/02/2006.
- [10] Turing, A. M., The Chemical Basis of Morphogenesis. *Philosophical Transactions of The Royal Society*, v. 237, pp. 37-72, 1952.
- [11] Toffoli, T. “Cellular Automata as an alternative to (rather than an approximation of) differential equations in modeling physics”. *Physica*, v. 10D, (1984), pp. 117-127.
- [12] Wolfram, S. *Cellular Automata and Complexity: Collected Papers*, Cambridge: West View Press, 1994.
- [13] Wolfram, S. “Cellular Automata”, *Los Alamos Science*, v. 9, (Fall 1983), pp. 2-21