



SPOLM2009

ISSN 2175-6295

Rio de Janeiro- Brasil, 05 e 06 de agosto de 2009.

025/2009 - MÉTODO PREDITOR-CORRETOR-AINV PARA O PROBLEMA DE DISTRIBUIÇÃO DINÂMICO

Luis Ernesto Torres Guardia

Universidade Federal Fluminense
Departamento de Engenharia de Produção
Rua Passos da Pátria 156, São Domingos
24210-240, Niterói, RJ, Brasil.
tepletg@vm.uff.br

Ricardo Felício de Souza

Universidade Federal Fluminense
Graduação em Engenharia de Produção
Rua Passos da Pátria 156, São Domingos
24210-240, Niterói, RJ, Brasil.
ricardofel.souza@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o método preditor-corretor para o problema de programação linear de distribuição dinâmico, formulado como um problema linear de fluxo em rede. O sistema linear resultante, mas com diferentes lados direitos, é resolvido usando o método AINV de decomposição da respectiva matriz inversa associada ao sistema linear. O referido método preditor-corretor é aplicado a este modelo de distribuição dinâmico em diferentes dimensões, e a experiência computacional mostra que este método é eficiente para resolver este tipo especial de problema linear.

PALAVRAS CHAVE. Programação linear. Método preditor-corretor. Logística

ABSTRACT

This work presents the predictor-corrector method to the linear programming problem of dynamic distribution, formulated as a flow network. With the same matrix of coefficients in each iteration, the resulting linear system, but with different right sides, is solved using the AINV method of decomposition of the matrix associated with the inverse linear system. This predictor-corrector method is applied to dynamic distribution problems of different sizes, and computational experience shows that this method is efficient to solve this special type of linear problem.

KEYWORDS. Linear programming. Predictor-corrector method. Logistic.

1. Introdução

O problema de distribuição consiste em determinar o número de unidades, de um certo produto, transportadas dos centros de fabricação aos centros de armazenagem, e depois transportadas aos centros de consumos, de tal modo a minimizar o custo total de transporte. O caso do problema de distribuição dinâmico consiste em um modelo de distribuição para

satisfazer futuras demandas do produto em um planejamento de horizonte finito, como analisado no trabalho de Cheung e Powell (1996) e aplicados em outros modelos de logística, como mencionados nos trabalhos desses autores. Consideramos neste trabalho que a demanda é conhecida. Esse problema de distribuição pode ser formulado como um problema de programação linear, o qual pode ser resolvido por diferentes métodos, entre eles temos o método de pontos interiores.

Depois que o método simplex teve resultados superados pelo método de pontos interiores proposto por Karmarkar (1984) para resolver problemas de programação linear, muitos outros métodos foram desenvolvidos com base em seus estudos desde então, evoluindo a logística. Dentre os métodos desenvolvidos estão o método primal-dual, de 1986, apresentado por Meggido, e o preditor-corretor, desenvolvido por Mehrotra em 1992.

O método exige um esforço computacional para solucionar os sistemas de equações lineares de Newton que surgem das suas iterações, e na prática é determinada uma decomposição da matriz associada ao sistema linear, e podem ser realizadas diversas vezes essas decomposições se essas soluções do sistema linear ajudam a diminuir o número total de iterações do método de pontos interiores. Essa é a idéia básica realizada por Mehrotra (1992) no seu método denominado preditor-corretor.

Um outro passo crucial para o método de pontos interiores é determinar um ponto inicial viável. Esse problema pode ser evitado se usamos a técnica denominada homogêneo e auto-dual, primeiro proposto por Ye et al. (1994). Essa técnica foi depois simplificada por Xu et al. (1996) combinando com a técnica de Mehrotra (1992) de preditor-corretor, de tal modo que, em cada iteração do método homogêneo e auto-dual, a matriz do sistema linear é a mesma, para o passo do preditor e corretor, mas com diferentes lados direitos. Esse método homogêneo e auto-dual é aplicado por Berkelaar et al. (2002) e Sun e Liu (2006) na solução do problema linear estocástico formulado através de cenários, o qual resulta em um problema de programação linear de grande porte.

Neste trabalho, apresentamos o método preditor-corretor para resolver um problema de programação linear e aplicamos para determinar a solução do problema linear de distribuição dinâmico formulado como um problema linear de fluxo em rede, problema este que é de grande porte devido a sua estrutura de rede que formam a matriz de restrições. Esta estrutura de rede pode ser explorada por ser esparsa e portanto a matriz de restrições não precisa ser armazenada.

Para uma maior compreensão na teoria do fluxo em rede e de suas aplicações, sugere-se consultar o livro de Ahuja et al. (1993). Para um maior entendimento quanto a teoria de pontos interiores e outros métodos, sugere-se a leitura de Wriarth (1997) e Vanderbei (2008).

Este trabalho é organizado como segue: a seção 2 descreve o preditor-corretor para resolver o problema de programação linear; na seção 3 apresenta-se a formulação matemática do problema linear de distribuição dinâmico formulado como um problema linear de fluxo em rede e os resultados computacionais do método preditor-corretor aplicado ao caso em diferentes dimensões, e finalmente, na última seção são apresentadas as conclusões tiradas do trabalho.

2. Método preditor – corretor para programação linear

Apresenta-se a seguir uma breve descrição do método de pontos interiores primal – dual para resolver o seguinte problema de programação linear, na forma padrão, denominado de primal (P) e dado por:

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & \text{minimizar } c^T x \\ & \text{sujeito a: } Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

Em que c é um vetor, $c \in \mathbb{R}^n$, A é uma matriz e de posto completo, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ são dados, e x é o vetor de decisão, $x \in \mathbb{R}^n$.

O problema dual de (P) pode ser descrito como:

$$(D) \quad \text{maximizar } b^T y$$

$$\text{sujeito a: } A^T y + z = c$$

$$z \geq 0,$$

Em que y é o vetor de multiplicadores de Lagrange, $y \in \mathbb{R}^m$ e $z \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dual de folga.

Podemos assumir que os problemas primal (P) e dual (D) satisfazem a condição de ponto interior (CPI), isto é, existe um ponto x^0, y^0, z^0 tal que:

$$Ax^0 = b, x^0 > 0, A^T y^0 + z^0 = c, z^0 > 0$$

As condições de otimalidade de primeira ordem, também conhecidas como as condições de Karush – Kuhn – Tucker, (KKT), correspondentes ao problema primal (P) e dual (D) são:

$$(1.1) \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

$$(1.2) \quad A^T y + z = c, \quad z \geq 0$$

$$(1.3) \quad XZe = 0$$

Em que X é uma matriz diagonal dada pelos componentes do vetor x , isto é, $X = \text{diag}(x)$. O mesmo para a matriz diagonal $Z = \text{diag}(z)$ e $e = (1, \dots, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor com componentes de 1's, A idéia básica do método de pontos interiores primal – dual é substituir a equação (1.3) pela equação parametrizada dada por $Xze = \mu e$. Assim, temos as condições de otimalidade perturbadas de KKT dadas por:

$$(2.1) \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

$$(2.2) \quad A^T y + z = c, \quad z \geq 0,$$

$$(2.3) \quad XZe = \mu e,$$

em que μ é um parâmetro positivo denominado de barreira.

Se a condição (CPI) satisfaz, então o sistema (2) tem uma única solução para $\mu > 0$. Pode-se observar que quando μ aproxima-se a zero, o sistema (2) aproxima-se ao sistema (1), e assim temos uma solução ótima para os problemas (P), (D).

Aplicando o método de Newton ao sistema (2) a partir de um ponto interior dado, temos o seguinte sistema linear de equações:

$$(3) \quad \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 1 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p \\ r_d \\ r_c \end{pmatrix}$$

em que: $r_p = b - Ax$, $r_d = c - A^T y - z$, $r_c = \mu e - XZe$, e denominadas de folga primal, folga dual e folga de complementaridade, respectivamente.

Se eliminamos Δz da terceira equação do sistema (3), temos o seguinte sistema, denominado de sistema aumentado ou indefinido:

$$(4.1) \quad \begin{pmatrix} X^{-1}Z & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_d - X^{-1}r_c \\ r_p \end{pmatrix}$$

$$(4.2) \quad \Delta z = r_d - A^T \Delta y$$

E se realizamos mais uma substituição, eliminando Δx , temos o seguinte sistema denominado sistema normal:

$$(5.1) \quad (AZ^{-1}XA^T) \Delta y = r_p + A (Z^{-1}Xr_d + x - \mu Z^{-1}e)$$

$$(5.2) \quad \Delta z = r_d - A^T \Delta y,$$

$$(5.3) \quad \Delta x = Z^{-1} (r_c - X \Delta z)$$

Comparando o sistema de equações normais (5.1) e o sistema indefinido (4.1), pode-se observar que a matriz para o sistema normal é simétrica e definida positiva, de menor porte e talvez mais densa. A matriz do sistema aumentado é simétrica indefinida e usualmente mais esparsa.

Na estratégia preditor – corretor de Mehotra (1992), no primeiro passo, é determinar uma direção afim de escalonamento (passo preditor). Esta direção resolve um sistema de equações lineares de Newton (3) para $\mu = 0$, isto é $r_c = -XZe$, e denominar essa direção por $(\Delta x^a, \Delta y^a, \Delta z^a)$.

A seguir, novamente resolve-se o sistema de Newton (3), agora sendo o lado direito $r_p = 0$, $r_d = 0$ e $r_c = \sigma \mu e - \Delta X^a = \text{diag}(\Delta Z^a)$.

Pode se observar que a característica do método preditor – corretor é resolver dois sistemas de equações lineares, sendo a matriz de coeficientes a mesma para os passos preditor e corretor, mas com diferentes vetores no lado direito e pode-se aproveitar desta característica para usar uma decomposição de matriz de coeficientes.

A seguir, apresentamos o método de pontos interiores preditor – corretor, ver Mehrotra (1992), Wright (1997), ou variações desse método, por exemplo consultar os trabalhos de Tits et al (2005) Salahi e Terlaky (2007), (2008) e Salahi, et al (2007) dentre outros.

Dados. $x \in \mathbb{R}^n$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^n$, $z > 0$, $\mu = x^T z / n$

Parâmetro $\beta \in (0,1)$

Passo1: Determinar a direção afim de escalonamento, isto é, resolver:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 1 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^a \\ \Delta y^a \\ \Delta z^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - Ax \\ c - A^T y - z \\ -XZe \end{pmatrix}$$

Para determinar $(\Delta x^a, \Delta y^a, \Delta z^a)$ e calcular

$$t_p^a = \arg \max \{t \in [0,1] / x + t \Delta x^a \geq 0\},$$

$$t_d^a = \arg \max \{t \in [0,1] / z + t \Delta z^a \geq 0\}.$$

Passo2. Determinar o parâmetro de centro

$$\sigma = (\mu^a / \mu)^3,$$

onde $\mu^a = (x + t_p^a \Delta x^a)^T (z + t_p^a \Delta z^a) / n$.

Passo3. Determinar a direção corretor de centro, isto é, resolver:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 1 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^c \\ \Delta y^c \\ \Delta z^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma \mu e - \Delta X^a \Delta Z^a e \end{pmatrix}$$

Para determinar $(\Delta x^c, \Delta y^c, \Delta z^c)$

Passo4: Formar a direção de busca total

$$(\Delta x^m, \Delta y^m, \Delta z^m) = (\Delta x^a, \Delta y^a, \Delta z^a) + (\Delta x^c, \Delta y^c, \Delta z^c),$$

E calcular

$$t_{\max}^p = \arg \max \{t \in [0,1] / x + t \Delta x^m \geq 0\},$$

$$t_{\max}^d = \arg \max \{t \in [0,1] / x + t \Delta z^m \geq 0\}.$$

Passo5: Atualização das variáveis: calcular

$$t_p^m = \min \{ \beta t_{\max}^p, 1 \},$$

$$t_d^m = \min \{ \beta t_{\max}^d, 1 \},$$

e calcular:

$$(x^+, y^+, z^+) = (x, y, z) + (t_p^m \Delta x^m, t_d^m \Delta y^m, t_d^m \Delta z^m)$$

e determinar:

$$\mu = (x^+)^T (z^+) / n.$$

Pode-se notar que a principal característica deste método preditor – corretor é que a mesma matriz de coeficiente é usada para os passos preditor e corretor. Isto nos leva significativamente a um menor esforço computacional, portanto apropriado para resolver problemas de grande porte. Por outro lado, o passo corretor desse método usa alguma informação encontrada no passo preditor, isto é, de μ^a e $\Delta x^a \Delta z^a$. Devido a seu superior desempenho computacional comparado com outros métodos de pontos interiores, este método primal – dual preditor – corretor é aplicado em outros problemas como por exemplo do problema linear estocástico apresentado nos trabalhos de Berkelaar et al (2002) e Sun e Liu (2006) dentre outros.

No **passo 1** do método preditor – corretor apresentado acima, o sistema de equações lineares é expresso em um sistema normal descrito anteriormente. Neste caso, resolve-se o seguinte sistema de equações:

$$(6.1) \quad (AZ^{-1}XA^T) \Delta y^a = r_p + A[Z^{-1}Xr_d + x]$$

$$(6.2) \quad \Delta z^a = r_d - A^T \Delta y^a$$

$$(6.3) \quad \Delta x^a = -x - Z^{-1}X \Delta z^a$$

Agora no **passo 3**, o correspondente sistema normal é dado por:

$$(7.1) \quad (AZ^{-1}XA^T) \Delta y^c = AZ^{-1} [-\sigma \mu e + \Delta X^a \Delta Z^a e]$$

$$(7.2) \quad \Delta z^c = -A^T \Delta y^c$$

$$(7.3) \quad \Delta x^c = Z^{-1} [\sigma \mu e - \Delta X^a \Delta Z^a e] - Z^{-1}X \Delta z^c.$$

Como se pode observar, a mesma matriz $(AZ^{-1}XA^T)$ é usada no passo (6.1) e (7.1) para resolver o correspondente sistema de equações, mas com diferentes lados direitos. Neste caso, é preferível usar uma decomposição da matriz $(AZ^{-1}XA^T)$, digamos o método tradicional de Cholesky, sugere-se consultar o livro Nocedal e Wright (1996) e o trabalho de Mészáros (2005). A decomposição de Cholesky é dada tal que:

$$(AZ^{-1}XA^T) = U^T U,$$

em que U é uma matriz triangular superior.

Mas também existem outros métodos de decomposição, como é o caso do método AINV de Benzi et al. (2000)

Nesse caso a decomposição é da inversa da matriz $(AZ^{-1}XA^T)$, ou seja:

$$(AZ^{-1}XA^T)^{-1} \approx LP^{-1}L^T,$$

onde L é uma matriz triangular superior com elementos na diagonal igual a 1's, e P é uma matriz diagonal.

Nesses dois casos (AINV ou Cholesky), a solução do sistema normal é determinada através da solução de dois sistemas triangulares facilmente calculadas. Por exemplo, se usamos o método de Cholesky, temos que resolver o seguinte sistema:

$$U^T U \Delta y = \psi.$$

Para qualquer vetor ψ , seja dado pelo lado direito de (6.1) ou de (7.1).

A solução de Δz é determinada em duas etapas usando o seguinte esquema:

- 1) Resolver $U^T g = \psi$, para determinar g .
- 2) Resolver $U \Delta y = g$, para determinar Δy .

A solução de cada sistema linear de 1) ou de 2) é facilmente determinada devido ao fato de que são sistemas triangulares. Para maiores detalhes da solução deste tipo especial de sistema triangular, consultar o livro Nocedal e Wright (1996).

Similarmente, pode-se usar esse esquema se a decomposição seja usando o método AINV, isto é:

$$(LP^{-1}L^T) \Delta y = \psi,$$

sendo que P é uma matriz diagonal.

3. O problema de distribuição dinâmico

Como uma aplicação na logística, temos os seguintes fatores:

Uma cadeia de suprimentos pode ser entendida como uma forma de colaboração entre fornecedores, varejistas e consumidores para a criação de valor envolvendo fluxos físicos, informativos, financeiros e de conhecimento, cujo objetivo é satisfazer os requisitos do consumidor final com produtos e serviços de vários fornecedores ligados (AYERS, 2001, p. 4-5).

Para ilustrar a eficiência do método preditor-corretor, consideremos o problema de distribuição dinâmica em um horizonte de planejamento T , o qual pode ser formulado como um problema de programação linear da seguinte forma:

$$\min \sum_{i \in P} \sum_{j \in A} c_{ij}(t) x_{ij}(t) + \sum_{j \in A} \sum_{k \in C} q_{jk}(t) y_{jk}(t)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in A} x_{ij}(1) + x_{ii}(1) = a_i(1); i \in P$$

$$-\sum_{i \in A} x_{ij}(1) + y_{jj}(1) + \sum_{k \in C} y_{jk}(1) = 0; j \in A$$

$$\sum_{j \in A} x_{ij}(t) + x_{ii}(t) = a_i(t) + x_{ii}(t-1); i \in P$$

$$-\sum_{i \in A} x_{ij}(t) + y_{jj}(t-1) + \sum_{k \in C} y_{jk}(t) + y_{jj}(t) = 0; j \in A$$

$$\sum_{j \in A} y_{jk}(t) = d_k(t); k \in C$$

$$x_{ij} \geq 0, i \in P, j \in A, y_{jk} \geq 0, j \in A, k \in C$$

Onde:

- P → Centros de produção, com $i \in P$,
- A → Centros de armazenagem, com $j \in A$,
- C → Centros de consumo, com $k \in C$,
- $x_{ij}(t)$ → Número de unidades transportadas do centro de produção i ao centro de armazenagem j , no período t ,
- $x_{ii}(t)$ → Número de unidades remanescentes no centro de produção i e que resultam em um custo de armazenagem $c_{ii}(t)$, no período t ,
- $y_{jk}(t)$ → Número de unidades transportadas do centro de armazenagem j ao centro de consumo k , no período t ,
- $y_{jj}(t)$ → Número de unidades remanescentes no centro de armazenagem j , e que resultam em um custo de armazenagem $q_{jj}(t)$, no período t ,
- $c_{ii}(t)$ → Representa o custo de armazenamento no centro de produção, no período t ,
- $c_{ij}(t)$ → Representa o custo de transporte dos centros de produção para os centros de armazenagem, no período t ,
- $q_{jj}(t)$ → Representa o custo de armazenamento no centro de armazenagem, no período t ,
- $q_{jk}(t)$ → Representa o custo de transporte dos centros de armazenagem para os centros de consumo, no período t .

Conforme a figura abaixo:

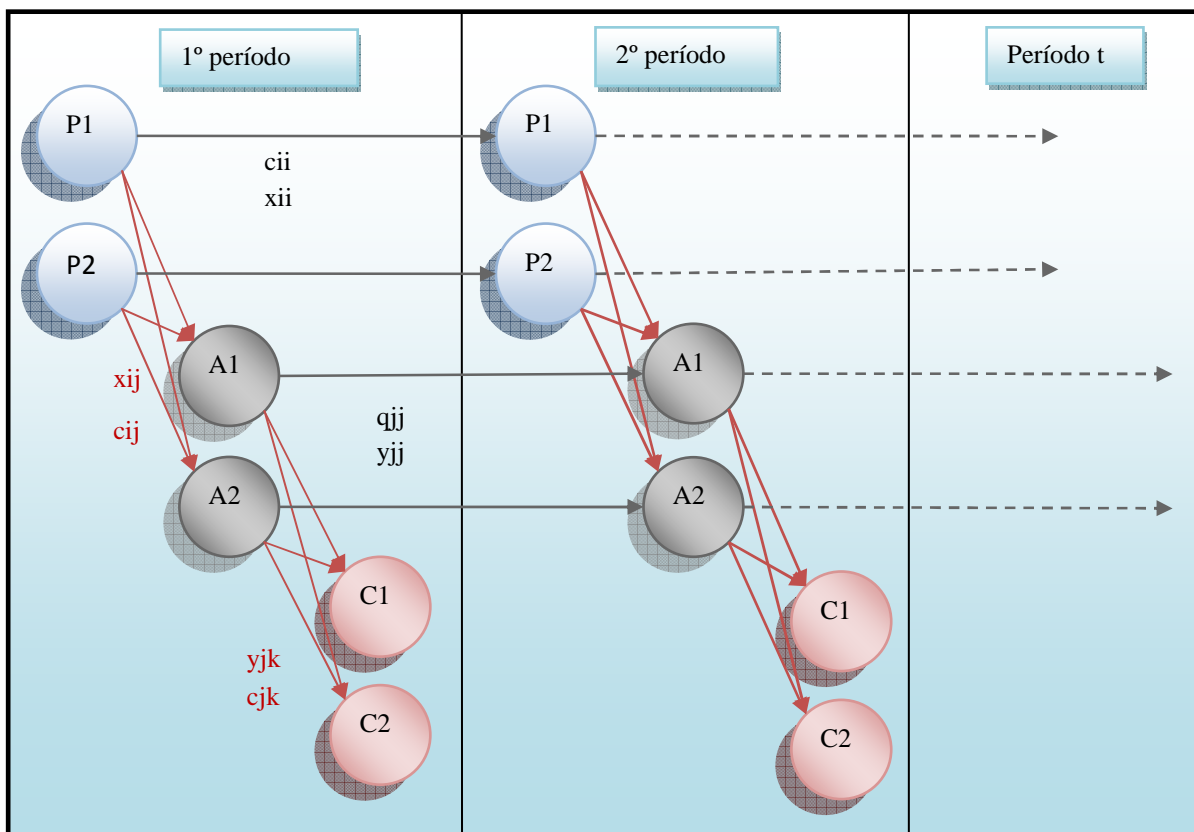


Figura 1. Problema da distribuição dinâmica

Em um período observado t os centros de fabricação produzem bens que são enviados a centros de armazenagem que atendem as necessidades de cada centro de consumo no mesmo período. Em $t+1$ os centros de fabricação continuam a produzir bens a serem distribuídos para os centros de consumo, porém é possível que ainda existam bens residuais (estoques do período anterior) dentro dos próprios centros de fabricação ou dos centros de armazenagem.

Tais estoques devem agora ser considerados no planejamento da distribuição de bens, sabendo que o total de fluxo de entrada deverá ser igual ao fluxo de saída em cada nó, e que ainda obedeçam a seguinte restrição:

$$\sum_{t=1}^N a_i(t) = \sum_{t=1}^N d_k(t) ; i \in P \text{ e } k \in C$$

$a_i(t)$ → Quantidade de bens produzidos no período t no centro de produção $i \in P$,

$d_k(t)$ → Quantidade de bens consumidos no período t no centro de consumo $k, k \in C$.

Foram analisadas redes de diferentes dimensões, variando o número de centros de produção, centros de armazenamento e centros de consumo. Para isso foi implementado um programa específico, em linguagem FORTRAN, que determina o nó de origem e o nó de destino que definem o arco de rede.

Um ponto inicial no método preditor - corretor é dado a seguir:

$$x^0 = e, \quad y^0 = -0,25, \quad z^0 = e, \quad \tau^0 = 1, \quad k^0 = 1$$

Mas uma boa escolha de outro ponto inicial poderia ser usada e talvez melhorar o desempenho computacional.

Para determinar o tamanho de passo α correspondente, foi usado em todos os testes computacionais o valor de $\theta = 0,99995$

O critério de parada do método em estudo é estabelecido em termos de proximidade do valor da função objetivo no ponto atual e no ponto anterior. Exige-se também que a diferença (diff) relativa dos valores das funções objetivas do problema primal e dual seja menor ou igual a 10^{-8} , isto é:

$$\left| \frac{c^T x - b^T y}{1 + b^T y} \right| < 10^{-8}$$

O método preditor – corretor foi inteiramente codificado na linguagem FORTRAN com dupla precisão. Todos os experimentos foram realizados em um microcomputador PC Duron com 1GB de RAM e 1600MHZ de frequência rodando na plataforma Windows XP.

Como foi mencionado anteriormente, a matriz inversa $(AZ^{-1}XA^T)$ é decomposta usando o método AINV de tal forma que:

$$(AZ^{-1}XA^T)^{-1} \approx LP^{-1}L^T$$

Neste caso, aplicando o algoritmo AINV, solicita-se realizar o produto $(AZ^{-1}XA^T)$ para um vetor p, não sendo necessário armazenar a matriz A nem a matriz $(AZ^{-1}XA^T)$. Por outro lado, a matriz L, que é triangular superior, é armazenada em um vetor usando a seqüência $l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{13}, l_{23}$, etc.

A seguir apresentamos os resultados computacionais para redes de diferentes dimensões.

Sendo que:

- M → Número de centros de produção,
- N → Número de centros de armazenagem,
- P → Número de centros de consumo,
- H → Número de períodos,
- N-link → Número de arcos,
- N-node → Número de nós,
- Iteração → Número de iterações realizadas
- Primal → Valor da função objetivo do problema primal,
- Dual → Valor da função objetivo do problema dual,
- μ → Parâmetro de barreira,
- Tempo → Tempo do processamento dado em segundos.

Tabela 1. Resultados computacionais.

M	8	7	5	5
N	10	9	6	8
P	12	11	10	10
H	10	15	22	20
N-link	2.381	2.833	2.313	2.781
N-node	330	432	483	483
Iteração	4	4	5	4
Primal	110.000,000000	154.000,000000	178.249,999999	157.500,000000
Dual	109.999,999999	153.999,999999	178.249,999985	157.499,999999
μ	0,00000000216	0,00000000361	0,00000000628	0,00000000299
Tempo	1,65	4,22	7,21	5,87

Com os dados da tabela 1, é possível observar que a diferença entre os valores da função objetiva do correspondente problema linear primal e dual é mínima. Percebe-se também que o número de iterações do método preditor-corretor não é elevado e que o parâmetro de barreira é muito próximo a zero. Assim, é possível afirmar que este método comporta-se muito bem para o caso do problema linear dinâmico de fluxo em rede de diferentes dimensões.

4. Conclusões

Este artigo apresentou o método preditor-corretor para resolver o problema de programação linear de grande porte como é o caso do problema de distribuição dinâmico formulado como um problema linear de fluxo em rede, que pela sua estrutura, a matriz A de restrições lineares é esparsa. O método estudado explora essa estrutura matricial, não sendo necessária a armazenagem da matriz A , nem da matriz $(AZ^{-1}XA^T)$ quando foi resolvido o correspondente sistema linear. O método AINV é usado na solução de mais de um sistema linear, que tem a mesma matriz de coeficientes para diferentes lados direitos, quando é aplicado tanto o passo preditor e o corretor respectivamente.

Os resultados numéricos realizados em algumas redes de diferentes dimensões confirmam a eficiência do preditor-corretor.

5. Referências

- Ahuja, A., Magnanti, T. e Orlin, J.,** (1993) Networks Flows: Theory, Algorithms and Applications, Prentice-Hall, Inc. New Jersey.
- Benzi, M., Cullum, J. e Tuma, M.,** (2000), Robust approximate inverse pre-conditioning for the conjugate gradient method, SIAM Journal of Scientific Computing, v. 22, p. 1318-1332.
- Berkelaar, A., Dert, C., Oldenkamp, B. e Zhang, S.,** (2002), A primal-dual decomposition-based interior point approach to two-stage stochastic linear programming, Operation Research, v. 50, p. 904-915.
- Gondzio, J.,** (1996), Multiple centrality corrections in a primal-dual method for linear programming, computational Optimization and Applications, v. 6, p. 137-156.
- Karmakar, N.,** (1984), A polynomial-time algorithm for linear programming, Combinatorica, v. 4, p. 373-395.
- Mehrotra, S.,** (1992), On the implementation of a primal-dual interior point, SIAM Journal on Optimization, v. 2, p. 575-601.
- Mészáros, C.** (2005), The Cholesky factorization in interior point methods, Computers and Mathematics with Applications, v. 50, p. 1157-1166
- Nocedal, J. e Wright, S.,** (1999) Numerical Optimization, Springer-Verlag, New York.

- Sun, J. e Liu, X.,** (2006), Scenario formulation of stochastic linear programs and the homogeneous self-dual interior-point method, *INFORMS Journal on Computing*, v. 18, p. 444-454.
- Salahy, M e Terlaky, T.,** (2007), Adaptive large-neighborhood self-regular predictor-corrector interior-point methods for linear optimization, *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 132, n.1, p. 143 – 160.
- Salahy, M e Terlaky, T.,** (2008), Mehotra – type predictor-corrector algorithms, revisited, *Optimization, Methods and Software*, v. 23, n. 2, p. 259-273
- Salahy, M, Peng, J. e Terlaky, T.,** (2007), On Mehotra – type predictor-corrector algorithms, *SIAM Journal on Optimization*, v. 18, n.4, p. 1377-1397.
- Tits, A., Absil, P. e Woessner, W.,** (2006), Constraint reduction for linear programs with many inequality constraints, *SIAM journal on Optimization*, v.17, n. 1, p. 119-146.
- Vanderbei, R.,** *Linear Programming: Foundations and extensions*, 3rd. Ed Kluwer Academic, Boston, 2008.
- Wright, S.,** (1997) *Primal-Dual Interior-Point methods*, SIAM, Philadelphia.