UMA COMPARAÇÃO DE MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIOBJETIVO

Alcino Teixeira de Mello Lobianco
Universidade Federal Fluminense
Av. dos Trabalhadores 420, 27255-125, Volta Redonda, RJ
alcinomlobianco@terra.com.br

Lidia Angulo-Meza
Universidade Federal Fluminense
Av. dos Trabalhadores 420, 27255-125, Volta Redonda, RJ
lidia@metal.eeimvr.uff.br

Resumo

Este artigo tem como objetivo comparar os três métodos de solução, baseados em diferentes enfoques de escalarização, para problemas de programação linear multiobjetivo. Esta comparação, salientando vantagens e desvantagens do uso, será feita utilizando um modelo multiobjetivo utilizado na Análise Envoltória de Dados para determinar alvos, metas de consumo e produção, que cada unidade deve atingir para se tornar eficiente. Os dados utilizados para a comparação são referentes a concessionárias de rodovias federais.

Palavras-Chaves: Programação Linear Multiobjetivo; Funções de Escalarização; ADBASE; TRIMAP; Análise Envoltória de Dados; Alvos alternativos.

Abstract

The main objective of this paper is to compare three solution methods for multiobjective linear programming problems. While pointing out advantages and disadvantages, this comparison would be carried out with a multiobjective linear programming model used in Data Envelopment Analysis. This model is used to establish target for units to achieve efficiency. The database used in the comparison are concerned to federal highways concessionaires.

Keywords: Multiobjective Linear Programming; Methods; Escalarization Functions; ADABSE, TRIMAP, Data Envelopment Analysis, Alternative Target.

1. INTRODUÇÃO

A programação linear dentro do contexto da Pesquisa Operacional tem sido amplamente divulgada e aplicada nas mais diversas áreas. No entanto, existem casos em que mais de um objetivo, muitas vezes conflitantes, podem ocorrer quando tentamos encontrar a melhor solução possível a um problema de otimização. Nestes casos a Programação Linear Multiobjetivo (PLMO) se apresenta como uma forma de encontrar uma solução, que neste caso, dado que existem múltiplos objetivos, será um conjunto de soluções eficientes, chamadas de não dominadas, para o problema. (Angulo Meza et al., 2006).

A utilização de problemas multiobjetivo pode representar uma grande vantagem com relação à programação linear mono objetivo, pois considera vários aspectos de um problema. Além disso, enquanto que ao otimizar um problema de programação linear mono objetivo (ou na otimização escalar) é obtida uma solução ou um conjunto de soluções ótimas, com um mesmo valor na função objetivo. Já , na otimização de problemas linear multiobjetivo (ou na otimização vetorial) obtém-se um conjunto de soluções eficientes, também chamadas de não dominadas, não comparáveis entre si em termos dos valores das funções objetivo, dentre as quais o decisor ou usuário poderá escolher levando em consideração aspectos operacionais e gerenciais.

Existem vários enfoques na otimização vetorial. Neste trabalho será feita uma comparação das funções de escalarizaçãocao, funções que transformam múltiplas funções objetivo em uma única função, de forma a identificar características, vantagens e desvantagens de cada método. É interessante e importante comparar estes métodos, pois dado que utilizam métodos diferentes, eles fornecem diversos tipos de informações, pois enquanto uns fornecem os pontos extremos da fronteira não dominada, os outros podem fornecem todas as soluções não dominadas, como será visto adiante.

2. PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTI-OBJETIVO E SEUS MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Tal como mencionado anteriormente, nos problemas de programação linear com múltiplos objetivos tem-se um conjunto de soluções eficientes, ou não dominadas (Ávila et al, 2003, Climaco et al., 2003). Estas soluções não são comparáveis entre si, isto significa elas não são melhores em termos das funções objetivo. Estas soluções são Pareto Ótimas (Takahashi, 2007) em que um conjunto de soluções é eficiente quando está formado por soluções viáveis tais que não existe outra soluções viável que forneça uma melhora em uma função objetivo sem provocar uma piora em pelo menos um outra função objetivo. (Romero, 1993).

Existem vários métodos para determinar estas soluções não dominadas no sentido de Pareto. Todos eles utilizam um processo de escalarização, que consiste na transformação do problema multiobjetivo em um problema de otimização de uma função escalar substituta, cuja solução ótima é também uma solução não dominada do problema PLMO, incluindo parâmetros de informação das preferências do decisor. A função substituta utilizada para construir um equivalente escalar do problema PLMO chama-se de função escalarizante ou função de escalarização (Clímaco et al., 2003).

Existem três tipos de funções de escalarização utilizadas e consistem:

- Na otimização de uma das funções objetivo restringindo as outras;
- Na soma ponderada das funções objetivo ou método das ponderações;
- Em uma métrica ou distância a um ponto de referência ou ponto ideal.

2.1. OTIMIZAÇÃO DE UMA DAS FUNÇÕES OBJETIVO, RESTRINGINDO AS OUTRAS

Neste processo, uma das funções objetivo é escolhida como função substituta, em geral aquela que o decisor considera como a mais importante, enquanto que os outros objetivos são tratados como restrições, com valores mínimos que o mesmo está disposto a aceitar.

$$\begin{aligned} &\text{Max } f_i(\underline{x}) \\ &\text{Sujeito a:} \\ &f_k(\underline{x}) \geq e_k,\ k = 1, \ldots, p;\ k \neq i. \\ &\quad \underline{x} \in X \end{aligned} \tag{1}$$

Neste problema $\underline{x}$ representa o vetor de variáveis de decisão, i = 1,..., p são as p funções objetivo do problema, sem perda de generalidade considera-se todas as funções objetivo de maximização. Além disso, e_k é o limite inferior (no caso da função objetivo de maximização). A partir do problema (1), tem-se como resultado todo o conjunto de soluções eficientes, a partir da variação dos valores dos limites e_k.

Cabe mencionar que segundo vários autores tais como Clímaco et al (2003) e Takahashi (2007), salientam que a determinação de valores para e_k não é uma tarefa trivial.

Além disso, dependendo da fixação da função a otimizar, o modelo pode se tornar pouco flexível e, conseqüentemente, seus resultados muito dependentes da função selecionada e dos valores do e_k.

2.2. Soma Ponderada das Funções Objetivo

Um método clássico, de fácil compreensão e o mais utilizado, é a soma ponderada das funções objetivo. A função escalarizante é a soma ponderada das funções objetivo, desta forma obtemos o modelo apresentado em (2).

$$\begin{aligned}&\text{Max } \lambda_1 \, f_1(\underline{x}) + \lambda_2 \, f_2(\underline{x}) + ... + \lambda_p \, f_p(\underline{x}) \\ &\text{Sujeito a:} \\ &\underline{x} \in X \\ &\lambda \in \Lambda\end{aligned} \qquad (2)$$

onde $\Lambda = \{\lambda : \lambda \in \Re^p, \sum \lambda_k = 1, \lambda_k > 0, k = 1, 2, .., p\}$

Neste modelo, é dado um peso, λ_p, a cada uma das p funções objetivo, tal que a soma dos pesos dados a cada função objetivo seja igual 1. Kornbluth (1974) notou que diferentes conjuntos de pesos das funções objetivo levam as mesmas soluções não dominadas. De fato, os intervalos de variação dos λ_p são chamados de regiões de indiferença, isto é, uma região ou intervalo em que os pesos, λ_p, das funções objetivos podem variar e a solução continuar eficiente. Uma característica desta função de escalarização é que somente gera os pontos extremos da fronteira não dominada e não os pontos interiores, que também são não dominados.

Este enfoque é a base do Simplex Multiobjetivo (Zeleny, 1982)

2.3. Minimização da distância a um ponto de referência.

Neste enfoque pretende-se calcular uma solução eficiente admissível que esteja tão perto quanto possível (segundo uma dada métrica) das aspirações do decisor, uma solução ideal ou outro ponto de referência fornecido.

Uma métrica mede a distância entre dois pontos em $\Re^n$, isto é, trata-se de uma função de distância que atribui a cada par de vetores $\underline{z}^1, \underline{z}^2 \in \Re^n$, um escalar $\left\| \underline{z}^1 - \underline{z}^2 \right\| \in \Re$.

Para a métrica Lp a distância entre dois pontos em $\Re^n$ é dada por (3)

$$\begin{aligned}&\left\| \underline{z}^1 - \underline{z}^2 \right\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} \left| z_i^1 - z_i^2 \right|^p \right]^{1/p}, \quad p \in \{1, 2, ..\} \\ &\left\| \underline{z}^1 - \underline{z}^2 \right\|_\infty = \max \left| z_i^1 - z_i^2 \right|, \quad i = 1, .., n.\end{aligned} \qquad (3)$$

Na figura 1, obtida de (Clímaco et al., 2003) , são apresentados os pontos z_1, z_2 e z_∞ que minimizam as distâncias a z*, utilizando-se as métricas L_1, L_2 e L_∞ respectivamente.

Desta família de métricas pode-se destacar a métrica L_1, que representa o somatório das distâncias em todas as componentes, e chamada “city block”, a L_2, distância euclideana, e L_∞, distância de Tchebycheff, na que é considerado apenas o pior caso, isto é, a maior diferença entre as componentes dos vetores (Climaco et al., 2003).

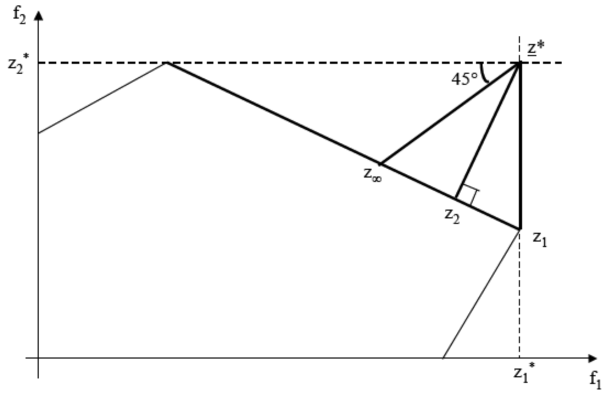

Figura 1. Funções de distância utilizando as métricas L_1, L_2 e L_∞.
(Climaco et al. Programação Linear Multiobjetivo)

Utilizando este enfoque é possível obter todos os pontos da fronteira não dominada, sejam estes pontos extremos ou não da região eficiente. Esta é a base de vários métodos utilizados na atualidade tais como Step Method (STEM), o TRIMAP, o Pareto Race e o Método de Zionts e Wallenius, entre outros.

2.4. Alguns softwares utilizados na programação linear multiobjetivo

Alguns dos métodos mencionados anteriormente foram implementados em programas computacionais, dentre os quais temos:

- **ADBASE** (Steuer, 1983): software baseado na ponderação das funções objetivo do problema multiobjetivo. É executado em ambiente DOS.
- **TRIMAP** (Clímaco e Antunes, 1987, 19892004): software interactivo que gera soluções não dominadas e permite a visualização das regiões de indiferença dos pesos das funções objetivo. Restringe em três, o número de funções objetivo. Pode ser utilizado em ambiente Windows e Macintosh.
- **VIG**: é um software interativo, visual e dinâmico que implementa o Pareto Race (Korhonen e Wallenius, 1988). A informação requerida ao decisor consiste na especificação das funções objetivo a serem melhoradas. Ele está baseado no método de minimização da distância a um ponto de referência.

Outros softwares podem ser encontrados disponíveis na internet, mas neste trabalho utilizaremos os primeiros dois softwares.

3. MODELO MULTIOBJETIVO PARA DETERMINAÇÃO DE ALVOS

A Análise de Envoltória de Dados (Data Envelopment Analysis – DEA) foi desenvolvida por Charnes et al. (1978) para determinar a eficiência de unidades produtivas chamadas de DMUs (Decision Making Units), onde não seja relevante ou não se deseja considerar somente o aspecto financeiro. Este enfoque tem por objetivo em comparar um certo número de DMUs que realizam tarefas similares e se diferenciam nas quantidades de inputs que consomem e de outputs que produzem. Esta comparação é feita utilizando modelos de programação linear com um único objetivo.

Além de um índice de eficiência para as DMUs os modelos DEA fornecem informações úteis para as DMUs ineficientes, tais como os níveis que os inputs e outputs devem atingir para elas se tornarem eficientes. Em DEA, estas metas são chamadas de alvos.

Nos modelos clássicos tem-se somente um alvo a ser atingido pela DMU que depende da orientação do modelo: orientação a inputs, em que minimiza-se o consumo dos inputs enquanto se mantém os outputs constantes, e orientação a outptus, em que maximiza-se o incremento dos outputs enquanto o consumo de inputs é mantido.

Pode-se notar, dada a estrutura mono objetivo dos modelos DEA, o alvo é único. Entretanto, este alvo pode ser considerado não adequado às políticas gerenciais das unidades. Soares de Mello et al (2002) destacavam que o alvo único é, portanto, uma limitação à atividade gerencial. Assim, de forma a fornecer um maior grau de liberdade ao gestor torna-se necessário fornecer alvos alternativos.

Neste artigo será utilizado o modelo multiobjetivo proposto por Lins et al (2002) e detalhado e utilizado Quariguasi-Frota-Neto e Angulo-Meza (2007) apresentado em (4)

$$
\begin{aligned}
& \max \phi_1 \\
& \ldots\ldots. \\
& \max \phi_s \\
& \min \varphi_1 \\
& \ldots\ldots. \\
& \min \varphi_m \\
& \text{sujeito a} \\
& \phi_r y_{rj_0} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j, \quad \forall\ r=1,\ldots,s \\
& \varphi_i x_{ij_0} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j, \quad \forall\ i=1,\ldots,m \\
& \phi_r, \varphi_i, \lambda_j \geq 0,\ \forall\ r, i, j.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Neste modelo ϕ_r é o fator de incremento do output r, φ_i é o fator de decremento do input i, x_{ij} e y_{rj}, são os valores do input i e o output r para a DMU j, λ_j são os coeficientes da combinação linear convexa que representam os *benchmarks*, isto é, as DMUs eficientes, para a DMU j.

Brevemente, este modelo visa independência na maximização dos outputs e na minimização dos inputs, de tal forma que seja encontrado um conjunto de metas na fronteira eficiente.

Tal como vimos na seção 2, temos três enfoques usando diferentes tipos de escalarização. Do ponto de vista do tipo de solução fornecida, elas podem de dois tipos.Na solução de modelos multiobjetivo têm-se dois tipos de métodos de solução. Um encontra soluções básicas não dominadas, que corresponde ao método de ponderação das funções objetivo; outro permite percorrer a fronteira não dominada, os outros métodos de escalarização. O primeiro desses métodos equivale em DEA a considerar como possíveis alvos as DMUs extremo-eficientes e DMU virtuais que limitam a região viável de projeção (pontos B, a e b, respectivamente, da Figura 12 obtida de, Soares de Mello et al, 2002). O segundo equivale a percorrer de forma interativa a região de projeção, obrigatoriamente Pareto eficiente.

Clímaco et al (2003) e Soares de Mello et al (2002) notaram que quando a fronteira é percorrida de forma interativa, encontra-se uma infinidade de possíveis alvos e, portanto, precisa-se da intervenção do especialista para a escolha de um deles. Já no primeiro caso, conta-se com um conjunto finito de possíveis alvos que possibilita uma análise global dessas alternativas.

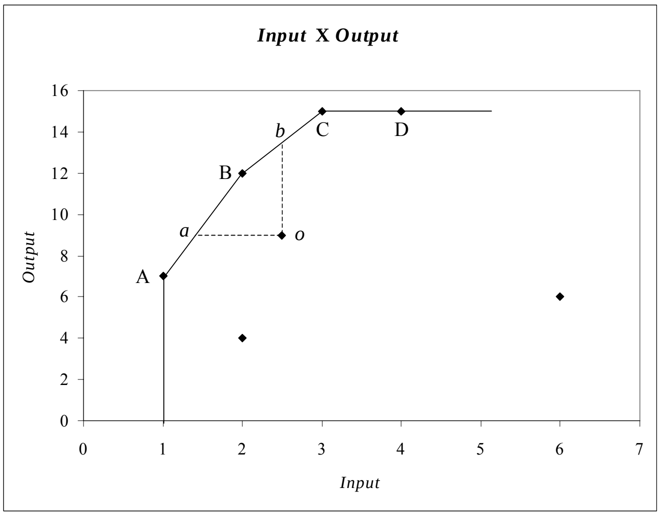

Figura 1. Exemplo de projeções no modelo MORO-D-VRS.

4. O ESTUDO DE CASO

Até o ano de 2002 existiam cerca de 10 mil Km de auto-estradas privatizadas (Rocha, 2002). Neste trabalho foram avaliadas cinco auto-estradas federais brasileiras. Os dados utilizados referem-se à situação das seguintes rodovias: Ponte Rio-Niterói, Rodovia Rio-Teresópolis, Rodovia Rio-Juiz de Fora, Rodovia Presidente Dutra e Rodovia Osório-Porto Alegre, correspondentes aos anos de 1999 e 2000 e, obtidos da Revista Portuguesa e Brasileira de Gestão, de Abril/Junho de 2004.

No trabalho de Soares de MelloGomes et al (2003) estas concessionárias foram estudadas usando Análise Envoltória de Dados (Data Envelopment Analysis – DEA) para avaliar a eficiência das concessionárias.

As unidades de avaliação (DMU's) são as auto-estradas anteriormente citadas. A fim de avaliar-se a evolução temporal da eficiência dessas auto-estradas, a mesma auto-estrada com os dados de 1999 e 2000 é considerada como duas DMU's diferentes (Soares de Mello et al., 2003). Nesse trabalho foram utilizados dois modelos parciais e um modelo global.

GomesSoares de Mello et al (2003) usaram vários modelos para avaliar a eficiência das concessionárias. O primeiro é o modelo parcial, que permitem mostrar a eficiência do ponto de vista de quem deseja melhorar os serviço, seja o usuário ou a agência reguladora. Não refletindo, portanto, a eficiência empresarial. O outro modelo é o global, onde se pretende agregar em uma só análise as informações obtidas nos modelos parciais, obtendo um único índice de eficiência. Este pode ter duas abordagens: agressiva, sendo o *input* unitário para todas as DMU's e o *outputs* são os índices de eficiência (Soares de Mello et al., 2000; Gomes et al., 2002), e benevolente, onde para uma DMU ser eficiente basta que seja em um único modelo parcial utilizado.

Desta forma uma concessionária é eficiente se tiver uma alta relação entre investimento e acidentes. Entretanto, também é eficiente se tiver alta relação entre investimentos e receita, o que significa que uma concessionária que tenha vários acidentes pode ser considerada eficiente se estiver usando um grande percentual de suas receitas para melhorar as condições da auto-estrada.

Nesse modelo, os inputs são acidentes/Km e receita-dia/Km, e o output é investimento/Km. O modelo parcial reflete a eficiência do ponto de vista de quem deseja melhores serviços, seja o usuário ou a agência reguladora. Não refletem, portanto, a eficiência empresarial.

No presente trabalho e como complemento ao trabalho realizado por GomesSoares de Mello et al (2003) serão determinados os alvos para as concessionárias utilizando o modelo multiobjetivo apresentado em (4) que considerando os dois inputs e um output da análise tem-se o modelo (5).

$$\max \phi_1 \tag{5.1}$$

$$\min \varphi_1 \tag{5.2}$$

$$\min \varphi_2 \tag{5.3}$$

sujeito a

$$\phi_1 y_{1j_0} = \sum_{j=1}^{n} y_{1j}\lambda_j \tag{5.4}$$

$$\varphi_{1i} x_{1j_0} = \sum_{j=1}^{n} x_{1j}\lambda_j \tag{5.5}$$

$$\varphi_{2i} x_{2j_0} = \sum_{j=1}^{n} x_{2j}\lambda_j \tag{5.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \tag{5.7}$$

$$\phi_1 \geq 1 \tag{5.8}$$

$$\varphi_1 \leq 1 \tag{5.9}$$

$$\varphi_2 \leq 1 \tag{5.10}$$

As funções objetivo consideram variações independentes para cada variável, neste caso maximizam o *output* investimento/Km (5.1) e minimizam os *inputs* acidentes/Km (5.2) e receita dia/Km (5.3), e estão sujeitas a que o aumento na variável *output* (5.4) e o decremento nas variáveis *input* (5.5) e (5.6) sejam até a fronteira eficiente, determinada pelas concessionárias eficientes. A restrição (5.7) determina um fronteira VRS. Finalmente , as restrições (5.8), (5.9) e (5.10) garantem que o alvo calculado possa ser obtido de forma tal a não aumentar os acidentes/Km e a receita/Km e nem diminuir o investimento/Km em relação aos valores originais da concessionária.

Os dados utilizados nesses modelos encontram-se na Tabela 1, que se encontra a seguir.

Tabela 1 – Dados Utilizados no Estudo de Caso

DMU	Acidentes/Km	Receita-dia/km	Investimento/Km
CONCEPA 1999	14,3	1.151,30	668,90
CONCEPA 2000	12,7	1.559,80	965,90
CONCER 1999	9,8	992,50	1.163,70
CONCER 2000	12,5	1.133,10	1.474,50
CRT 1999	5,7	744,50	406,40
CRT 2000	5,0	794,80	556,50
NovaDutra 1999	24,2	2.049,10	1.706,87
NovaDutra 2000	22,9	1.987,30	1.886,20
Ponte 1999	75,4	7.566,68	4.777,60
Ponte 2000	78,0	8.958,00	6.902,30

.

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados desta aplicação foram obtidos por três softwares diferentes: TRIMAP e ADBASE. O terceiro, oO LINDO, também foi utilizado para aplicação do enfoque da restrição das funções objetivo enquanto otimiza-se somente uma.

Os resultados obtidos pelo TRIMAP e ADBASE se encontram na mesma tabela, pois estes encontraram as mesmas soluções e conseqüentemente os mesmos alvos para as DMU's analisadas. Mas a comparação entre eles só será feita posteriormente.

4.1. ADBASE E TRIMAP

Primeiramente é importante destacar que as DMU's escolhidas para análise foram a CONCER 2000, pois foi a única que se apresentou eficiente, DUTRA 2000 e PONTE 2000, por serem umas das mais importantes e rentáveis rodovias federais do país.

Utilizando os softwares mencionados anteriormente foram encontrados os resultados mostrados nas tabelas 2, 3 e 4.. Nestas tabelas apresentam-se os alvos para os inputs e outputs da aplicação são, respectivamente: acidentes/km, receita-dia/km e investimento/km.

Tabela 2 – Alvos para a CONCER 2000

DMU CONCER 2000		
	Valores Atuais	Alvo 1
Acidentes/Km	12,5	12,5
Receita-dia/km	1133,1	1133,1
Investimento/Km	1474,5	1474,5

Na tabela 2, observa-se que como a concessionária CONCER no ano 2000 foi eficiente, os alvos fornecidos são os níveis atuais já utilizados. Como a mesma é eficiente só há um alvo.

Tabela 3 – Alvos para a DUTRA 2000

DMU DUTRA 2000				
	Valores Atuais	Alvo 1	Alvo 2	Alvo 3
Acidentes/Km	22,9	21,9	15,9	19,6
Receita-dia/km	1987,3	1987,3	1608,7	1987,3
Investimento/Km	1886,2	2586,1	1886,2	2330,1

Na tabela 3, observa-se que como a concessionária DUTRA no ano 2000 foi ineficiente, os alvos fornecidos variam de maneira que se possam diminuir os inputs ou aumentar o output. Assim, o alvo 1 consegue diminuir Acidentes/Km e aumentar o Investimento/Km. O alvo 2, diminui Acidentes/Km e também Receita-dia, e o alvo 3, também diminui Acidentes/Km para um nível menor do que o alvo 1, mas tem que aumentar o investimento a um nível menor que o alvo 1.

Tabela 4 – Alvos para a PONTE 2000

DMU PONTE 2000			
	Valores Atuais	Alvo 1	Alvo 2
Acidentes/Km	78,0	58,5	58,1
Receita-dia/km	8958,0	5304,2	5886,9
Investimento/Km	6902,3	6902,3	6902,3

Na tabela 4, são apresentados dois alvos para a PONTE 2000. O alvo 1, reduz os acidentes/km, mantendo constante o investimento e reduzindo a receita-dia/km. Já para o alvo 2 há uma redução maior dos acidentes/km, com a manutenção do investimento, porém com uma redução menor da receita diária/km.

Na figura 2 abaixo é mostrado o triângulo obtido através do TRIMAP que exibe as áreas referentes a cada solução possível, chamadas de regiões de indiferença. Neste triangulo mostram-se as variações dos pesos das funções objetivo (usados nos enfoque de solução da soma ponderada). Pode-se observar que a solução 1 para a Dutra 2000 possui uma área maior do que as outras, isto quer dizer que os valores dos pesos das funções objetivo podem ter uma variação maior e mesmo assim fornecem a mesma solução. Já a solução 3 ter uma área menor, isto quer dizer que a variação dos pesos das funções objetivos é menor, neste caso a solução 3 dá um peso maior à função objetivo 1, isto é a minimização dos Acidentes/Km, também para a função objetivo 3, e muito pouco para a função objetivo 2.

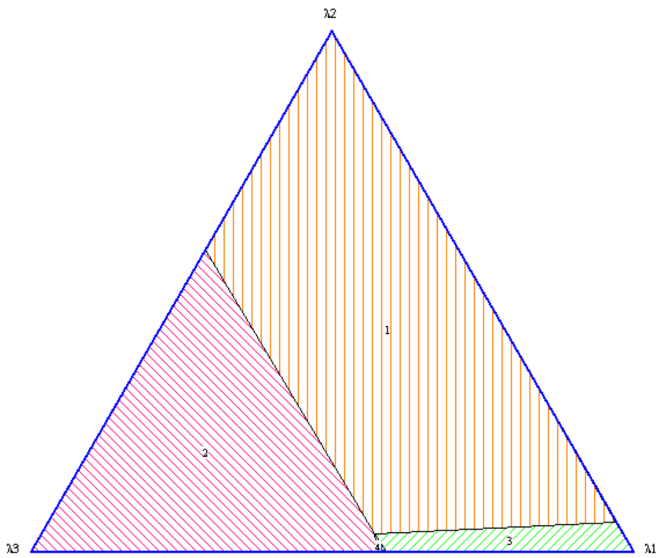

Figura 2 – Espaço de soluções para a DMU DUTRA 2000 usando o TRIMAP

4.2. RESTRIÇÃO ÀS FUNÇÕES OBJETIVO UTILIZANDO O LINDO

Através da restrição de Funções Objetivos (FO) serão encontrados intervalos paras as mesmas, com o objetivo de determinar várias soluções possíveis para cada DMU. De modo que as mesmas possam analisar e encontrar a melhor solução de acordo com cada necessidade e/ou possibilidade.

As funções objetivo escolhidas para se transformarem em restrições foram $\min \varphi_2$ e $\max \phi_1$ Max FI e Min F2. Logo, as restrições a serem incluídas no modelo são: $\varphi_2 \leq 1$FI <= L1 e $\phi_1 \geq 1$F2 >=L2. Para encontrar as diferentes soluções, isto é, os diferentes alvo, os respectivos limites L1 e L2 (iguais a 1) devem ser variados.

Tabela 5 – Alvos para a CONCER 2000

DMU CONCER 2000			
	F1	F2	F3
Mín F1	12,5	12,5	12,5
Mín F2	1133,1	1133,1	1133,1
Máx F3	1474,5	1474,5	1474,5

Para as DMUs, qualquer variação nos limites L1 e L2 das restrições das funções objetivo fornecem a mesma solução. Este é o caso da CONCER 2000.

Tabela 6 – Alvos para a DUTRA 2000

DMU DUTRA 2000			
	F1	F2	F3
Mín F1	15,8845	15,9902	15,9902
Mín F2	1608,71	1449,48	1449,48
Máx F3	1886,2	1886,2	1886,2

Tabela 7 – Alvos para a PONTE 2000

DMU PONTE 2000			
	F1	F2	F3
Mín F1	58,1271	58,5139	58,5139
Mín F2	5886,86	5304,17	5304,17
Máx F3	6902,3	6902,3	6902,3

Analisando a DMU PONTE 2000, encontramos os seguintes alvos para cada solução:

Tabela 8 5 – Alvos da DMU PONTE 2000

DMU PONTE 2000				
Soluções PossíveisAlvos	0,61	0,622	0,643	0,654
Acidentes/km Input 1	58,4670216	58,3481	58,22918	58,16972
Receita-dia/km Input 2	5374,8	5553,96	5733,12	5822,7
Investimento/Km Output	6902,3	6902,3	6902,3	6902,3

A linha de soluções possíveis corresponde aos valores usados para restringir o PPL com o objetivo de determinar as melhores soluções.

Os resultados para a PONTE 2000 são apresentados na tabela XXX5. Nesta tabela, para obter o alvo 1 foi utilizada a restrição .... de 0,6., pPara o alvo 2 ....0,62, e para o alvo 3 .... 0,64, Finalmente, e para o alvo 4............... o valor da restrição foi de 0,65.

Todos os valores foram atribuídos ao limite L2, já que o limite $L_1 \leq 1$. Tal como pode ser observado, infinitos alvos podem ser obtidos variando os valores dos limites L1 e L2.

Analisando os resultados da tabela 8, pode-se ver que mMantendo o investimento, a concessionária analisada deve diminuir os acidentes/km, entretanto terá que aumentar gradativamente a receita-dia/km para que isso ocorra. Porém é importante destacar que a receita-dia/Km se encontra abaixo do valor encontrado na situação inicial (R$ 8.958,00)

4.3. COMPARAÇÃO DE RESULTADOS.

Através dos softwares ADBASE e TRIMAP pode-se obter diversas soluções possíveis para cada DMU. O TRIMAP, ainda, fornece um triângulo que mostra as soluções dominantes e dominadas, de acordo com a área de cada uma.

O software LINDO, por meio do método de restrição das funções objetivas, forneceu soluções, para que em seguida pudesse fazer variações que, por sua vez, determinaram em quanto uma DMU podia variar seus inputs (acidentes/km e receita-dia/km). Na DMU PONTE 2000, o resultado foi o seguinte:

- Diminuição dos acidentes/km;
- Aumento da receita-dia/km; e
- Manutenção dos investimentos.

Com isso, verifica-se que através desses métodos determina-se, de acordo com o interesse, que se pode diminuir ou aumentar os inputs e outputs. Lembrando que do ponto de vista do usuário da rodovia deve-se minimizar os acidentes/km e receita-dia/km e maximizar os investimentos na estrada.

O gráfico abaixo serve para retificar, através da análise DEA os objetivos de cada DMU. Em destaque, vemos a meta da DMU PONTE 2000 em relação as DMU's eficientes CONCER 1999 e 2000.

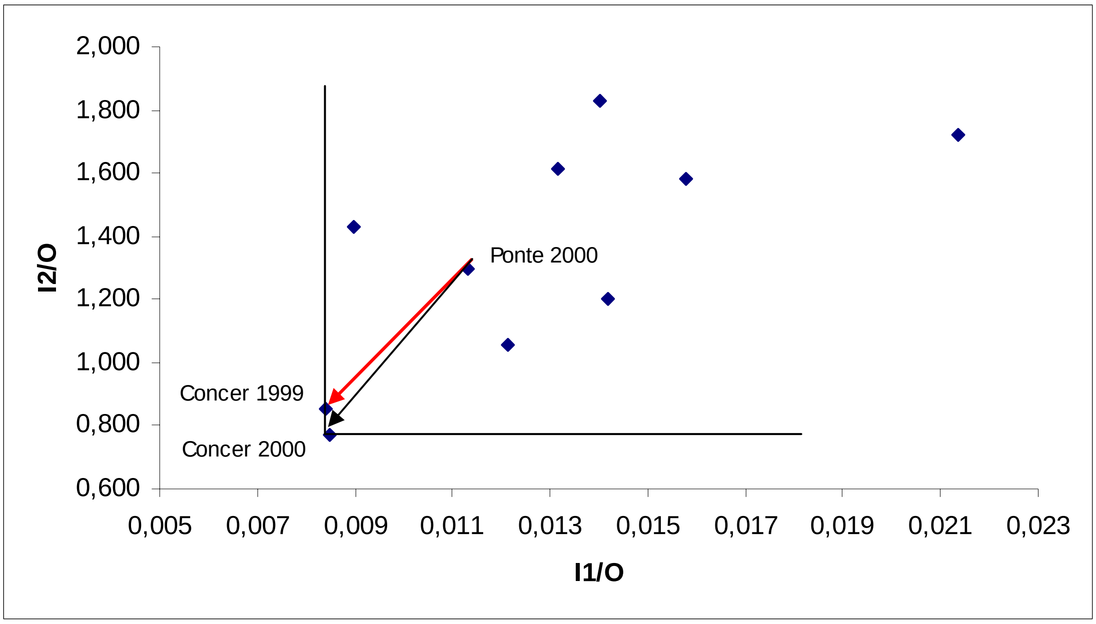

Figura 3 – Vista das DMU's Eficientes e da distância da fronteira eficiente da DMU PONTE 2000

5. COMENTÁRIOS FINAIS

O artigo tratou de analisar as soluções encontradas por meio de diferentes métodos de solução, com o auxílio de softwares específicos, aplicados a um estudo de caso com o objetivo de determinar os alvos das diversas DMU's analisadas.

Os métodos utilizados apresentam tanto pontos a favor quanto contra. A soma ponderada apresenta fácil compreensão, porém λ pode apresentar diversos valores e podem ser interpretados como a importância dada àquela função objetivo.

Utilizando o método de minimização da distância é possível obter todos os pontos da fronteira não dominada, sejam estes pontos extremos ou não da região eficiente. Este é a base do TRIMAP. O método de restrição das funções objetivo proporciona obter uma solução para o PPL mantendo uma função, a qual julga-se a mais importante, e restringindo as outras. Posteriormente é estabelecida restrição na tentativa de encontrar as soluções possíveis. Porém aplicar esse método não é trivial, pois o valor desta restrição imposta pode abranger um intervalo com inúmeros valores.

Agradecimentos: Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq pelo apoio realização deste estudo só foi possível devido ao apoio financeiro do. Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Angulo-Meza, L., Soares de Mello, J. C. C. B., Clímaco, J. C. N. “Estudos Conjuntos de Análise Envoltória de Dados (DEA) e Programação Linear Multiobjetivo (PLMO): Uma Revisão Bibliográfica”. Relatório de Pesquisa em Engenharia de Produção v.6, n.5.

Ávila, L., Lima, B., CARPES Jr. Otimização: conceitos básico, ferramentas e aplicações. GRUCAD - Departamento de Engenharia Elétrica – UFSC – C.P. 476, Florianópolis. 2003.

[1]Revista Portuguesa e Brasileira de Gestão. Número 2. Ed. FGV, 2004.

[1]Angulo Meza. Programação Linear Multiobjetivo, 2006.

[3]Soares De Mello, J.C.C.B., Angulo Meza. L., Gomes, E.G., Serapião, B.P., Estellita Lins, M.P. Análise de envoltória de dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para companhias aéreas brasileiras. Pesquisa Operacional, v. 23, n.2, p.325-345, 2003.

[4]Clímaco, J.oão C.arlos N.amorado Clímaco, Antunes, C.arlos H.enggeler Antunes, Alves, M.aria J.oão T.eixeira G.omes Alves, "Programação Linear Multiobjectivo - do modelo de programação linear clássico à consideração explícita de várias funções objectivo", Imprensa da Universidade de Coimbra, 2003.

Clímaco, J., Antunes, J. “TRIMAP – an interactive tricriteria linear programming package”, Foundations of Control Engineering, v. 12, pp. 101-119, 1987.

Clímaco, J., Antunes, J. “Implementation of an user friendly software package – aguided tour of TRIMAP”, Mathematical and Computer Modelling, v. 12, pp. 1299-1309, 1989.

[5]LUCIANO ÁVILA, BORGES DE LIMA e CARPES JÚNIOR. Otimização: conceitos básico, ferramentas e aplicações. GRUCAD - Departamento de Engenharia Elétrica – UFSC – C.P. 476, Florianópolis. 2003.

[6]STEUER, R.E. Operating Manual for the ADBASE Multiple Objective Linear Programming Package. Terry College of Business, University og Georgia, Athens, Georgia, 1983.

Gomes, E. G., Soares de Mello, J. C. C. B., Biondi Neto, L., Angulo-Meza, L. “Gestão de auto-estradas: análise de eficiência das auto-estradas federais brasileiras com portagens.. Revista Portuguesa e Brasileira de Gestão, Lisboa - Rio de Janeiro, v. 3, n. 2, p. 68-75, 2004.

Korhonen, P., Wallenius, J. “A Pareto Race”, Naval Research Logistics, v. 35, pp. 615-623, 1988.

Kornbluth, J. S. H. “Duality, Indifference and Sensitivity Analysis in MOLP”, Operational Research Quarterly, v. 25, n. 4, pp. 599-614, 1974.

[7]Quariguasi Frota Neto, J.; Angulo-Meza, L. “Alternative Targets for Data Envelopment Analysis through Multi-Objective Linear Programming: Rio de Janeiro Odontological Public Health System Case Study”. Journal of the Operational Research Society, p. 1-9, 2007.

Rocha, J.G.C. “Estudo comparativo dos critérios de aferição na qualidade dos serviços das concessionárias brasileiras de rodovias”. In: Setti, J.R.A. e Santos, E.M. (eds), Panorama Nacional da Pesquisa em Transportes 2002 – Anais do XVI ANPET, Natal, RN, Outubro, v. 2, p. 395-405, 2002.

Romero, C. “Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, técnicas y aplicaciones”. Alianza Editorial S.A., Madrid, Espanha, 1993.

Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo Meza. L., Gomes, E.G., Serapião, B.P., Estellita Lins, M.P. Análise de envoltória de dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para companhias aéreas brasileiras. Pesquisa Operacional, v. 23, n.2, p.325-345, 2003.

Steuer, R.E. Operating Manual for the ADBASE Multiple Objective Linear Programming Package. Terry College of Business, University og Georgia, Athens, Georgia, 1983.

Takahashi, R. H. C. “Otimização Escalar e Vetorial, Volume 3: Otimização Vetorial”. Notas de aula. Departamento de Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.

Zeleny, M. “Compromise Programming”. In: Multiple Criteria Decision Making. Cochrane, J. L., Zeleny, M. (eds). University of South Carolina Press. Columbia, pp. 262-301, 1973.