



SPOLM 2007

ISSN 2175-6295

Rio de Janeiro- Brasil, 08 e 09 novembro de 2007.

PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR SEM RESTRIÇÃO APLICADA AO CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS DE TRELIÇAS

Milena de Andrade Sacramento

Universidade Federal Fluminense – UFF

Av. dos Trabalhadores, 420, Vila Santa Cecília, Volta Redonda, RJ - CEP: 27225-125

milenasacramento@vm.uff.br

Aline Michelly Silva Moreira

Universidade Federal Fluminense – UFF

Av. dos Trabalhadores, 420, Vila Santa Cecília, Volta Redonda, RJ - CEP: 27225-125

aline.michelly@vm.uff.br

Salette Souza de Oliveira Buffoni

Universidade Federal Fluminense – UFF

Av. dos Trabalhadores, 420, Vila Santa Cecília, Volta Redonda, RJ - CEP: 27225-125

salette@vm.uff.br

Resumo

O presente trabalho trata do estudo e implementação de métodos em programação não-linear sem restrição utilizando os métodos Univariante, Máximo Declive, Powell, Fletcher-Reeves, Newton Raphson Padrão, Newton Raphson Modificado, Correção de Posto Um (Rank One Correction), Correção de Posto Dois (Rank Two Correction) e BFGS. Os algoritmos são implementados em linguagem Fortran. Em seguida a implementação dos métodos executa-se um exemplo para o cálculo dos deslocamentos em uma treliça através da formulação da energia potencial mínima, no qual a função-objetivo é uma função não-linear das variáveis de decisão. Em seguida a solução do problema realiza-se uma comparação entre os métodos.

Palavras-chave: Programação Matemática; Otimização sem restrições; Elementos de treliça; Algoritmos.

Abstract

The main aim of the present work is to develop a formulation and some strategies for implementation and comparison of methods in nonlinear programming without restriction applied to the calculation of displacements in structural elements, presenting as example the analysis and calculation of the displacements in a truss element through the formulation of the minimum potential energy. The displacements had been calculated through the following methods: Univariant, Gradient Descent Method, Powell Conjugated Directions Method, Fletcher-Reeves Method, Standard Newton Raphson Method, Modified Newton Raphson Method, Rank One Correction Method, Rank Two Correction Method and BFGS Method. The algorithms had been implemented in Fortran language. After the solution of the problem it carries through comparisons between the methods.

Keywords: Mathematical programming; optimization without restrictions; Truss Elements; Algorithms.

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo o estudo das principais características do problema de programação não-linear sem restrição e implementação em linguagem Fortran de alguns métodos numéricos para determinação de deslocamentos em elementos de treliças. Os métodos implementados foram os Métodos Univariante, Método do Máximo Declive, Método de Powell, Método de Fletcher e Reeves, Método de Newton Raphson Padrão, Método de Newton Raphson Modificado, Método Correção de Posto Um (Rank One Correction), Método Correção de Posto Dois (Rank Two Correction) e Método BFGS. Nas implementações não se realizou mudanças de escala e foram obtidos os deslocamentos de uma treliça não-linear através da formulação da energia potencial mínima. Apresentam-se as trajetórias de busca e os resultados da aplicação dos métodos de otimização foram tabelados. Detalhes sobre o estudo apresentado podem ser encontrados no trabalho de Moreira, Sacramento & Buffoni [6]. As referências utilizadas no presente trabalho foram Filho [1], Friedlander [2], Gill, Murray & Wright [3] e Mahey [4].

2. MÉTODOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR SEM RESTRIÇÕES

Os métodos de programação não-linear sem restrição se dividem em métodos de ordem zero, métodos de primeira ordem e métodos de segunda ordem. Os métodos de ordem zero são utilizados quando o valor da função-objetivo é obtido com precisão pobre. Pode ser uma função não diferenciável ou altamente não-linear e, portanto, os valores das derivadas (ou gradientes) não são confiáveis e não devem ser utilizados, pois é difícil obter as derivadas de forma precisa. Dessa forma, somente o valor da função-objetivo é utilizado. Entre os mais importantes métodos de ordem zero, há o método univariante e o método das direções conjugadas de Powell. Os métodos de primeira ordem utilizam os valores da função-objetivo e de suas derivadas (gradientes) em relação às variáveis de projeto. Exemplos clássicos destes métodos são o “Steepest Descent” ou máximo declive, método dos gradientes conjugados e método de Fletcher e Reeves. Os métodos de segunda ordem utilizam os valores da função-objetivo, de suas derivadas e da matriz hessiana. Os exemplos mais importantes são os métodos de Newton Raphson e Quase-Newton.

Os métodos existentes para resolver problemas de Programação Não-Linear sem restrições procuram inicialmente, encontrar uma direção d a seguir que reduza a função-objetivo (f), às vezes chamada de direção de busca. Uma vez obtida essa direção, decidem o quanto “andar” nessa direção (t). Através desse procedimento, a cada passo, um problema de encontrar n variáveis x é reduzido a um problema de encontrar uma variável t , como está descrito na equação a seguir:

$$x = x_o + t_o d_o \Rightarrow f(x) = f(x_o + t_o d_o) = f(t) \quad (1)$$

onde x_o é o ponto inicial. O problema de encontrar t pode ser resolvido fazendo uso de técnicas de minimização de uma função de uma variável que são de fácil implementação. Essa etapa é denominada busca unidimensional, e, quando a direção d coincide com a direção de um dos eixos coordenados é denominada busca univariada. O algoritmo seguido pelos métodos de otimização sem restrições é apresentado a seguir:

- Encontrar x_o (ponto de partida) e d_o (direção de busca inicial) que reduzam a função-objetivo;
- Encontrar o tamanho do passo t na direção d_o que minimize f (busca unidimensional) e obter $x = x_o + t_o d_o$;

- Verificar a convergência, e, se satisfeita, pare ($x = x^*$);
- Caso contrário, $x_{i+1} = x$, $i = i+1$ (controle do número de iterações) e voltar à etapa inicial.

Detalhes sobre este assunto podem ser encontrados em Friedlander [2].

3. MÉTODOS IMPLEMENTADOS

3.1. MÉTODO UNIVARIANTE

Por ser um método para resolução de problemas de otimização sem restrições, deve-se trabalhar com uma direção de busca \mathbf{d} , que minimize a função-objetivo f , um incremento t (o quanto andar) e um ponto inicial \mathbf{x}_0 .

• **Algoritmo:**

1. Determinar se t é positivo ou negativo, sendo que seu valor deve ser bem pequeno;
2. Partindo de um ponto inicial \mathbf{x}_0 escolhido e conhecendo-se t , encontrar o valor de \mathbf{x}_{k+1} para uma dada direção \mathbf{e}_k na qual se caminha. Verificar se $f(\mathbf{x}_{k+1})$ decresce no sentido positivo ou negativo para este \mathbf{e}_k , calculando-se $f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k \pm t\mathbf{e}_k)$;
3. Se $f(\mathbf{x}_{k+1}) < f(\mathbf{x}_k)$, continuar nesta direção, “avançando” mais um incremento, ou seja, dobrar t e testar novamente, voltando ao passo 2. Enquanto f estiver sendo minimizada, a direção \mathbf{e}_k é mantida. Caso contrário, parar no último valor \mathbf{x}_i bem sucedido na direção \mathbf{e}_k e escolher uma nova direção \mathbf{e}_{k+1} para continuar a “caminhada”, voltando portanto, ao passo 1, com t original;
4. Parar quando o valor da função f ficar constante, ou seja, quando nenhuma direção \mathbf{e}_k melhorar f .

3.2. MÉTODO DO MÁXIMO DECLIVE

Apesar de ser um método semelhante ao método univariante, sua particularidade é o fato de que a “caminhada” em busca do ponto ótimo ocorre sempre na direção do gradiente da função-objetivo, direção de busca \mathbf{d}_k . Além disso, o tamanho do passo com o qual se caminha, t_k , é determinado a cada iteração através de uma busca linear na direção \mathbf{d}_k .

• **Algoritmo:**

1. Determinar \mathbf{x}_0 , ponto a partir do qual se inicia a busca pelo ponto ótimo;
2. Sendo $\nabla f(\mathbf{x}_k)$, o gradiente da função-objetivo $f(\mathbf{x})$ no k -ésimo ponto \mathbf{x}_k , a direção de busca na qual se caminha partindo de \mathbf{x}_k é o versor de um vetor de sentido oposto ao gradiente de $f(\mathbf{x})$, sendo esta dada por:

$$\mathbf{d}_k = - \frac{\nabla f(\mathbf{x}_k)}{|\nabla f(\mathbf{x}_k)|} \quad (2)$$

3. Em cada iteração obtém-se um ponto seguinte \mathbf{x}_{k+1} dado por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_k \quad (3)$$

Sendo t_k determinado por busca linear na direção \mathbf{d}_k e $t_k > 0$;

4. Dessa forma há a geração de sucessivos pontos nos quais o valor da função-objetivo $f(\mathbf{x})$ se torna cada vez menor:

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_k) \quad (4)$$

5. O algoritmo termina quando os valores assumidos pela função-objetivo nos sucessivos pontos gerados forem muito próximos, devido à proximidade destes pontos, \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_{k+1} . Ou seja:

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{x}_k \quad (5)$$

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) \approx f(\mathbf{x}_k) \quad (6)$$

Assim:

$$|\nabla f(\mathbf{x}_k)| \approx 0 \quad (7)$$

3.3. MÉTODO DAS DIREÇÕES CONJUGADAS DE POWELL

Uma maneira de acelerar o método Univariante é utilizar o chamado “movimento padrão” (*pattern move*) e esta foi a metodologia implementada por Powell.

• **Algoritmo:**

1. Minimizar a função $f(x)$ com busca linear ao longo das direções \mathbf{g}_k ,

$$\mathbf{g}_k = -\frac{\nabla f(x_k)}{|\nabla f(x_k)|} \quad (8)$$

partindo do ponto inicial \mathbf{x}_{k0} de forma a gerar os pontos $\mathbf{x}_{k1}, \dots, \mathbf{x}_{kn}$;

2. Após encerrar a busca linear, encontrar o índice m , normalmente $m = n$, correspondente à direção em que a função-objetivo apresenta maior decréscimo, indo de \mathbf{x}_{km-1} para \mathbf{x}_{km} ;

3. Calcular a direção “padrão” $\mathbf{d}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-m}$ e determinar o tamanho do passo t_k que minimize $f(\mathbf{x})$, tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{k0} + t_k \mathbf{d}_k \quad (9)$$

Minimizar $f(\mathbf{x})$ com busca linear nesta direção “padrão” \mathbf{d}_k e com o passo t_k ;

4. Descartar uma das direções, substituí-la por \mathbf{d}_k na próxima etapa de minimizações e repetir as etapas (2) e (3).

3.4. MÉTODO DE FLETCHER-REEVES

O método de Fletcher-Reeves é um método do gradiente conjugado para funções não-quadráticas, que não necessita da avaliação da matriz hessiana $H(\mathbf{x})$, sendo esta substituída por uma busca linear (“*Linear Search*”).

• **Algoritmo:**

1. Determinar o ponto inicial \mathbf{x}_0 e calcular a direção de busca \mathbf{d}_k , dada por:

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0 \quad (10)$$

onde,

$$\mathbf{g}_0 = \nabla f(x_0) \quad (11)$$

2. Para $k = 0, 1, \dots, n - 1$ faz-se:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_k \quad (12)$$

onde t_k é o tamanho do passo, sendo este determinado por busca linear;

3. Ao obter-se o ponto \mathbf{x}_{k+1} , calcula-se o gradiente da função-objetivo f no ponto \mathbf{x}_{k+1} , dado por:

$$\mathbf{g}_{k+1} = \nabla f(x_{k+1}) \quad (13)$$

4. Para determinar a nova direção de busca, \mathbf{d}_{k+1} , faz-se:

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\mathbf{g}_{k+1} + \beta_k \mathbf{d}_k \quad (14)$$

onde,

$$\beta_k = \frac{\mathbf{g}_{k+1}^t \mathbf{g}_{k+1}}{\mathbf{g}_k^t \mathbf{g}_k} \quad (15)$$

Enquanto $k \neq n - 1$;

5. Ao obter-se \mathbf{x}_n , substituir \mathbf{x}_0 por \mathbf{x}_n e retornar ao passo 1.

3.5. MÉTODO DE NEWTON RAPHSON PADRÃO

O princípio deste método é minimizar uma função f através de uma aproximação local por uma função quadrática. As aproximações quadráticas ganham importância à medida que se aproximam do ponto ótimo do problema. Esse método trabalha com o passo $t_k = 1$, sem busca linear. Para minimizar a função quadrática $q(x_{k+1})$ devemos ter $\frac{\partial q}{\partial x_{k+1}} = 0$, logo :

$$\nabla_k + H_k(x_{k+1} - x_k) = 0 \quad (16)$$

ou

$$x_{k+1} = x_k - H_k^{-1} \nabla_k \quad (17)$$

Esta equação é a forma pura do método de Newton. O valor de H_k^{-1} é interpretado como uma correção na direção oposta ao gradiente da função, de forma a acelerar o processo iterativo. Concluindo que a direção de busca será:

$$d_k = -H_k^{-1} \nabla_k \quad (18)$$

3.6. MÉTODO DE NEWTON RAPHSON MODIFICADO

Esse método consiste na mesma formulação que o Newton Raphson Padrão, porém evita a atualização da matriz hessiana H_k em cada passo:

$$d_0 = -H_0^{-1} \nabla_k \quad (19)$$

Uma modificação do método de Newton-Raphson é que ele pode ser implementado com busca linear ao invés de utilizar passo $t_k = 1$.

3.7. MÉTODO CORREÇÃO DE POSTO UM (RANK ONE CORRECTION)

Esse método procura usar a informação dos gradientes (∇_k) da função para construir uma aproximação da matriz Hessiana (H_k), de modo a facilitar a obtenção da nova direção de busca:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k S_k \nabla_k \quad (20)$$

Onde S_k seria a aproximação da inversa da Hessiana, a aproximação mais grosseira da inversa da hessiana seria a matriz identidade, onde S_k é tomada igual a matriz identidade.

Logo, primeiramente, examina-se a fórmula de recorrência:

$$S_{k+1} = S_k + a_k Z_k Z_k^T \quad (21)$$

Que preserva simetria. Para $i = k$, a expressão (21) seria:

$$\delta_k = S_{k+1} q_k = S_k q_k + a_k Z_k Z_k^T q_k \delta_k \quad (22)$$

ou

$$Z_k = \frac{\delta_k - S_k q_k}{a_k Z_k^T q_k} \quad (23)$$

Onde, $q_k = \nabla_{k+1} - \nabla_k$ e $\delta_k = x_{k+1} - x_k$.

O produto interno por q_k^t em (22) fornece:

$$q_k^t \delta_k - q_k^t S_k q_k = \alpha_k (Z_k^t q_k)^2 \quad (24)$$

Substituindo (24) em (21) tem-se:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{(\delta_k - S_k q_k)(\delta_k - S_k q_k)^t}{q_k^t (\delta_k - S_k q_k)} \quad (25)$$

3.8. MÉTODO CORREÇÃO DE POSTO DOIS (RANK TWO CORRECTION)

O algoritmo Correção de posto dois segue as mesmas idéias do algoritmo correção de posto um, mas nele a inversa da Hessiana é atualizada pela soma de duas matrizes simétricas de posto um e é denominada de Posto Dois.

O algoritmo se inicia com uma aproximação de $H^I \rightarrow S_0$ no ponto x_0 . Seguem-se os mesmos passos do *Rank One*, mas a atualização de S_{k+1} é feita desse modo:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{\delta_k \delta_k^t}{\delta_k^t q_k} - \frac{S_k q_k q_k^t S_k}{q_k^t S_k q_k} \quad (26)$$

3.9. MÉTODO BFGS

O método BFGS é conhecido como método de *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (BFGS) para problemas de minimização irrestrita. Esse método possui o algoritmo mais bem sucedido para atualização da inversa. Ele garante as seguintes propriedades que a matriz S_k e S_{k+1} são simétricas e positivas definidas.

A fórmula de recorrência é a seguinte:

$$S_{k+1} = \left[I - \frac{\delta_k q_k^t}{\delta_k^t q_k} \right] S_k \left[I - \frac{q_k \delta_k^t}{\delta_k^t q_k} \right] + \frac{\delta_k \delta_k^t}{\delta_k^t q_k} \quad (27)$$

O método BFGS é denominado muitas vezes na literatura como método DFP complementar. Um processo de busca linear para determinação de α_k e parte integrante do algoritmo.

4. RESOLUÇÃO DE UM ELEMENTO ESTRUTURAL TRELIÇADO

Deseja-se determinar os deslocamentos (u_1 e u_2) da treliça não-linear mostrada na Figura 1 através da formulação da energia potencial mínima, onde L é o comprimento da barra na direção 1, A é a área da seção transversal, E_1 é o módulo de elasticidade na direção 1, E_2 é o módulo de elasticidade na direção 2 e P é a carga aplicada no elemento de treliça, conforme a Figura 1. Os valores das variáveis citadas são dados de entrada no programa implementado e são definidos por:

$$L=400 \text{ cm}; A = 4 \text{ cm}^2; E_1 = 2 \times 10^6 \text{ kN/cm}^2; E_2 = -2.5 \times 10^8 \text{ kN/cm}^2, P = 8000 \text{ kN} \quad (28)$$

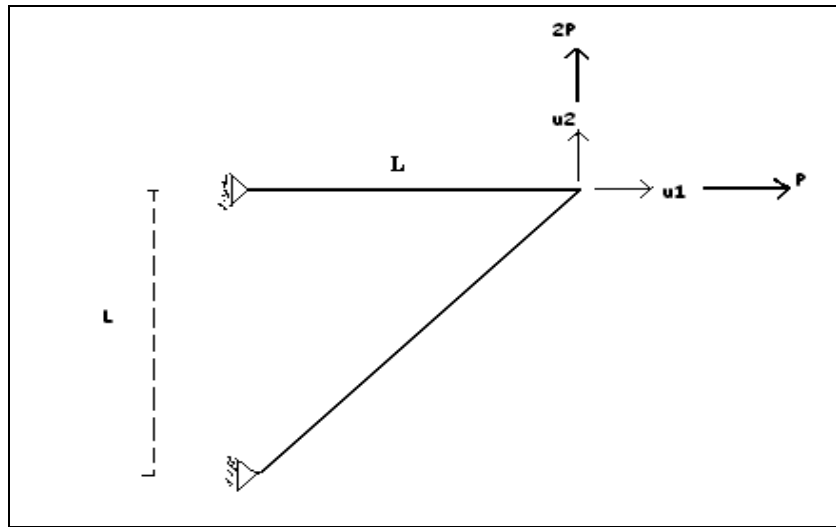


Figura 1 – Treliça Não-Linear.

A treliça da Figura 1 é não-linear. A não-linearidade no comportamento da estrutura deve-se a uma das duas causas: o material pode ter curva tensão-deformação não-linear (materiais não-lineares), que é o caso mais óbvio, ou a não-linearidade pode ser produzida pela geometria da estrutura flexionada, que ocorre quando as deflexões da estrutura alteram a ação das cargas aplicadas ou das reações (não-linearidade geométrica) (Timoshenko e Gere [5]). A treliça deste problema se enquadra na primeira causa, pois possui uma relação tensão-deformação não-linear, dada:

$$\sigma = E_1 \varepsilon + E_2 \varepsilon^2 \quad (29)$$

A Energia Potencial Total de um sistema (Π) é igual ao somatório das Energias de Deformação menos o somatório das Energias Complementares, logo:

$$\Pi = AL \left(\frac{1}{2} \frac{E_1 u_1^2}{L^2} + \frac{1}{3} \frac{E_2 u_1^3}{L^3} \right) + AL\sqrt{2} \left(\frac{E_1 (u_1 + u_2)^2}{8 L^2} + \frac{E_2 (u_1 + u_2)^3}{24 L^3} \right) - 2Pu_1 - Pu_2 \quad (30)$$

Onde L é o comprimento da barra na direção 1, A é a área da seção transversal, E_1 é o módulo de elasticidade na direção 1, E_2 é o módulo de elasticidade na direção 2 e P é a carga aplicada. Detalhes e dedução da expressão (30) encontram-se no trabalho de Moreira & Buffoni [6] e Sacramento & Buffoni [7].

A Figura 2 apresenta as curvas de nível para a energia potencial da expressão (30) e verifica-se que a energia potencial é mínima próxima aos pontos $u_1 = 0.5$ e $u_2 = 1$.

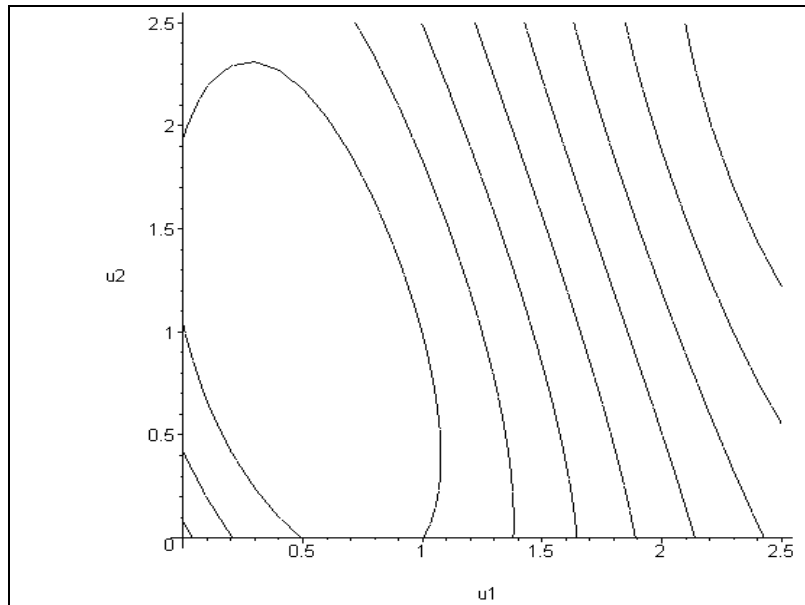


Figura 2 - Curvas de nível da energia potencial expressa em (30)

4.1. ANÁLISE DOS RESULTADOS

O objetivo é verificar a convergência dos métodos estudados para os valores de deslocamentos da treliça nas direções 1 e 2 que tornam a energia potencial mínima, onde os valores exatos apresentam-se na Figura 2. Dessa forma, realizaram-se testes para o ponto de partida é $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, ou seja, $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$.

4.1.1. MÉTODO UNIVARIANTE

4.1.2. MÉTODO DO MÁXIMO DECLIVE

Com um passo $t = 0.000001$, após 20 iterações, o método apresentou os resultados da Tabela 2.

Tabela 2 – Método do Máximo Declive – Ponto de partida (0,0)

Número de Iterações	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)	Tempo de execução
20	0.4686344	0.9995305	-7057.248	55 seg

A Figura 3 mostra o caminho percorrido pelo método do máximo declive:

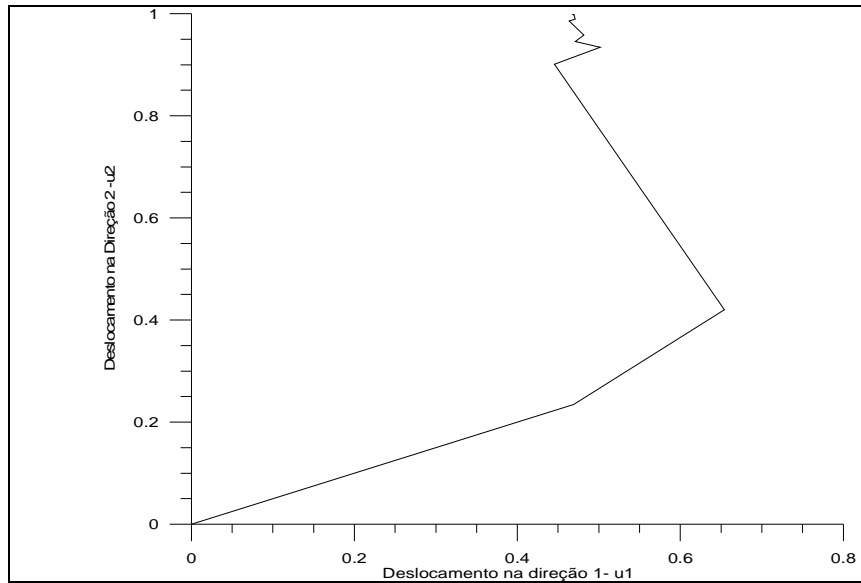


Figura 3 – Convergência do método do Máximo Declive para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0).

4.1.3. MÉTODO DE POWELL

Com um passo $t = 0.000001$, após 30 iterações, o método de Powell apresentou os resultados mostrados na Tabela 3:

Tabela 3 – Método de Powell – Ponto de partida (0,0)

Número de Iterações	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)	Tempo de execução
30	0.4686304	0.9995436	-7057.248	57 seg

A Figura 4 mostra o caminho descrito pelo método:

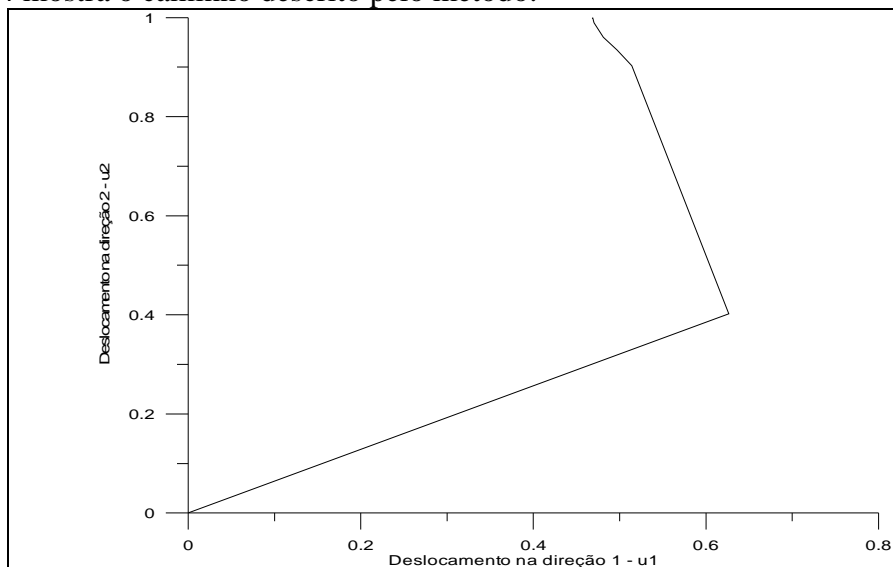


Figura 4 – Convergência do método de Powell para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0).

4.1.4. MÉTODO DE FLETCHER-REEVES

Com um passo $t = 0.000001$, após 33 iterações, o método chegou aos resultados da Tabela 4.

Tabela 4 – Método de Fletcher-Reeves – Ponto de partida (0,0)

Número de Iterações	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)	Tempo de execução
33	0.4686334	0.999532	-7057.248	

A Figura 5 mostra o caminho percorrido pelo método de Fletcher – Reeves.

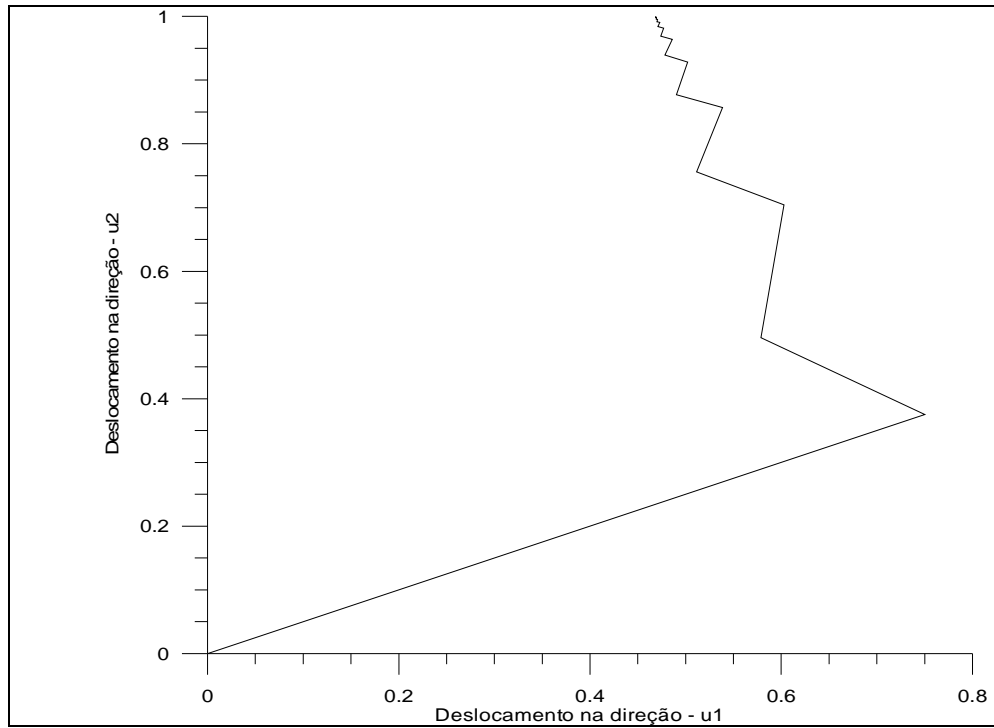


Figura 5 – Convergência do método de Fletcher-Reeves para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0).

MÉTODO DE NEWTON RAPHSON PADRÃO

Com um passo $t = 1$, após 05 iterações, o método apresentou os resultados da Tabela 5:

Tabela 5- Método de Newton Raphson Padrão – Ponto de partida (0,0)

Número de Iterações	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)	Tempo de execução
5	0.4686292	0.9995434	-7057.248	

A Figura 6 mostra o caminho percorrido pelo método de Newton Raphson Padrão.

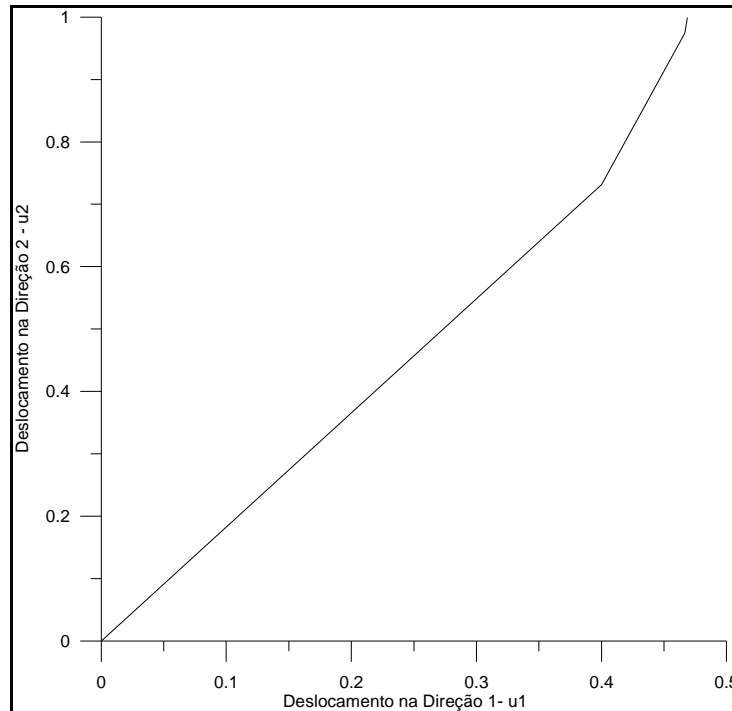


Figura 6 - Convergência do método de Newton Raphson Padrão para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0)

4.1.6. MÉTODO NEWTON RAPHSON MODIFICADO

Com um passo $t = 1$, após 15 iterações, o método apresentou os resultados da Tabela 6.

Tabela 6 - Método de Newton Raphson Modificado – Ponto de partida (0,0)

Número de Iterações	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)	Tempo de execução
15	0.4686291	0.9995324	-7057.248	

A Figura 7 mostra o caminho descrito pelo método:

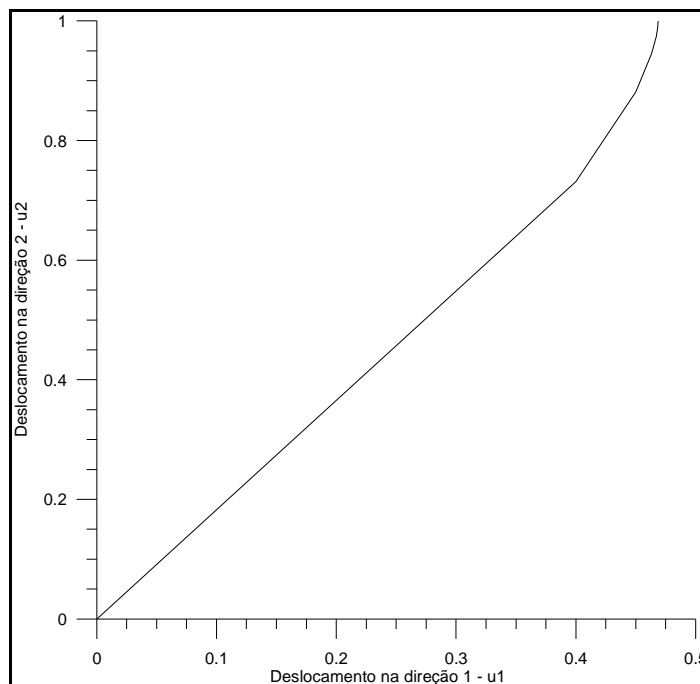


Figura 7 - Convergência do método de Newton Raphson Modificado para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0)

4.1.7. MÉTODO CORREÇÃO DE POSTO UM (RANK ONE CORRECTION)

A Tabela 7 apresenta os resultados para um passo $t = 0.000001$. A solução foi alcançada após 05 iterações

Tabela 7 - Método Correção de Posto Um – Ponto de partida (0,0)

Número de Iterações	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)	Tempo de execução
5	.5017961	.9101100	-7043.422	

A Figura 8 mostra o caminho percorrido pelo método correção de posto um:

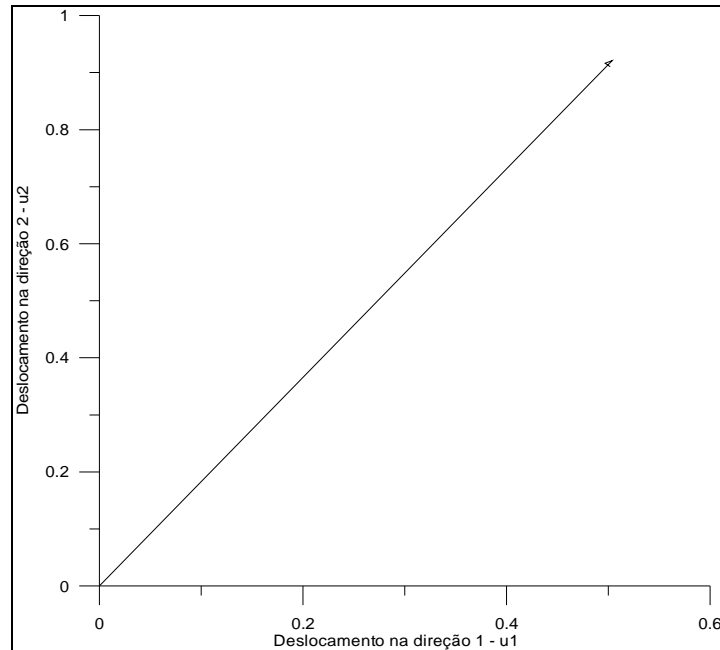


Figura 8 - Convergência do método correção de posto um para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0).

4.1.8. MÉTODO CORREÇÃO DE POSTO DOIS (RANK TWO CORRECTION)

A Tabela 8 apresenta os resultados para um passo $t = 0.000001$. A solução foi alcançada após 04 iterações.

Tabela 8- Método Correção de Posto Dois – Ponto de partida (0,0)

Número de Iterações	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)	Tempo de execução
4	.5859184	.4167470	-6511.552	

A Figura 9 mostra o caminho percorrido pelo método correção de posto dois.

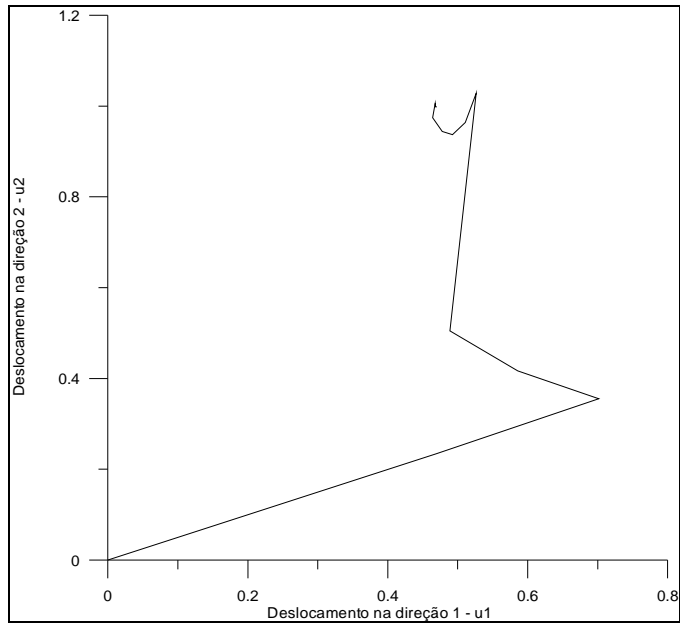


Figura 9 - Convergência do método Correção de Posto Dois para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0)

4.1.9. MÉTODO BFGS

A Tabela 9 apresenta os resultados para um passo $t = 0.000001$. A solução foi alcançada após 26 iterações.

Tabela 9 - Método BFGS – Ponto de partida (0,0)

Número de Iterações	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)	Tempo de execução
26	0.4686349	0.999397	-7057.247	

A Figura 10 mostra o caminho percorrido pelo método BFGS.

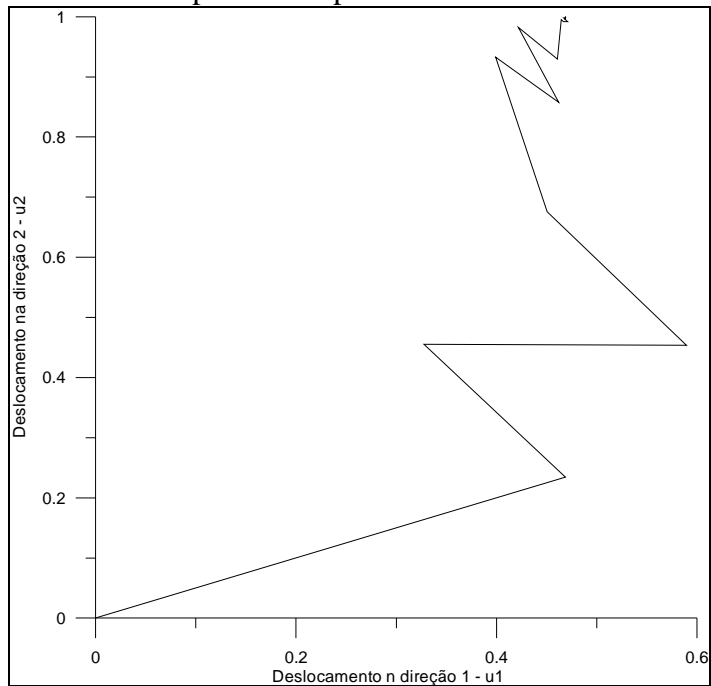


Figura 10 - Convergência do método BFGS para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0)

5. CONCLUSÕES

A Tabela 10 apresenta os resultados para todos os métodos estudados e uma comparação entre os mesmos, com seus respectivos pontos de partida, número de iterações, deslocamentos e o valor da energia potencial mínima correspondente. Através dos resultados obtidos, concluiu-se que os deslocamentos u_1 e u_2 obtidos através dos métodos estudados são compatíveis com a solução exata apresentada. Nota-se também que o método univariante, é um pouco “lento”, sendo necessárias muitas iterações para se chegar a uma solução ótima do problema. Já os métodos de Newton Raphson Padrão e Correção de Posto Um se mostraram mais eficientes do ponto de vista do número de iterações até se chegar à solução do problema.

Tabela 10 – Comparação entre os métodos.

Método	Ponto de Partida	Número de Iterações	Deslocamentos		Energia Potencial Mínima (Π)
			u_1	u_2	
Univariante	(0,0)	110	0.458752	1.00942	-7056.556
Máximo Declive	(0,0)	20	0.4686344	0.9995305	-7057.248
Powell	(0,0)	30	0.4686304	0.9995436	-7057.248
Método de Fletcher – Reeves	(0,0)	33	0.4686334	0.999532	-7057.248
Newton Raphson Padrão	(0,0)	5	0.4686292	0.9995434	-7057,248
Newton Raphson Modificado	(0,0)	15	0.4686291	0.9995324	-7057.248
Rank One Correction	(0,0)	5	0.5017961	0.9101100	-7043.422
Rank Two Correction	(0,0)	17	0.4686338	0.9995854	-7057.247
BFGS	(0,0)	26	0.4686349	0.999397	-7057.247

6. AGRADECIMENTOS

Sinceros agradecimentos à Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro – FAPERJ, pelo apoio financeiro.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FILHO, J. V. C. *Pesquisa Operacional – Técnicas de Otimização Aplicadas a Sistemas Agroindustriais*. 2^a. Edição. Editora Atlas. 2004, São Paulo.
- [2] FRIEDLANDER, A. *Elementos de Programação Não-Linear*. Editora Unicamp. Campinas. 1994. São Paulo.
- [3] GILL, P. E; MURRAY, W.; WRIGHT, M. *Practical optimization*. Academic Press, 1981. Nova York.
- [4] Mahey, P. *Programação Não-Linear – Introdução à Teoria e aos Métodos*. Editora Campus. LNCC/MCT/CNPq. 1987.

[5] TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. *Mecânica dos Sólidos*. LTC Editora, 1994. Rio de Janeiro.

[6] MOREIRA, A.M., BUFFONI, S.S.O. *Implementação Numérica em Programação Não-linear para Cálculo de Deslocamentos em Elementos de Treliça*. Projeto de Iniciação Científica. FAPERJ. 2007.

[7] SACRAMENTO, M.A., BUFFONI, S.S.O. *Implementação Numérica em Programação Não-linear para Cálculo de Deslocamentos em Elementos de Treliça*. Projeto de Iniciação Científica. FAPERJ. 2007.