



SPOLM 2008

ISSN 2175-6295

Rio de Janeiro- Brasil, 05 e 06 de agosto de 2008.

## O PROBLEMA LINEAR DE DISTRIBUIÇÃO E O ALGORITMO DE CHOLESKY

**LUIS ERNESTO TORRES GUARDIA**

Universidade Federal Fluminense  
Departamento de Engenharia de Produção  
Rua Passo da Pátria 156, São Domingos  
24210-240, Niterói, R.J., Brasil  
[tepletg@vm.uff.br](mailto:tepletg@vm.uff.br)

### Resumo

O objetivo de este trabalho é determinar a solução do problema de distribuição usando o algoritmo de pontos interiores primal - dual preditor - corretor . Em cada iteração do algoritmo , aplicamos a técnica de Cholesky para determinar a decomposição da matriz do sistema linear das equações de Karush-Kuhn-Tucker, e depois resolver duas vezes o sistema com diferentes lados direitos, uma no passo preditor e outro no passo corretor. Descrevemos nossa experiência computacional do método primal – dual para determinar a solução do problema de distribuição em redes de diferentes dimensões.

**Palavras-Chaves:** problema de programação linear; método de pontos interiores primal – dual; algoritmo preditor – corretor; fluxo em rede.

### Abstract

The objective of this work is to find the solution of the distribution problem by using the primal – dual predictor – corrector interior point algorithm. In each iteration step of the algorithm, we apply the Cholesky technique to factorize the Karush – Kuhn – Tucker equations, and later solve them twice for predictor and corrector steps. We describe our computational experience in solving the distribution problem for network of different dimensions.

**Keywords:** linear programming problem; primal – dual interior – point method; predictor – corrector algorithm; network flow problem.

## 1. INTRODUÇÃO

Depois que Karmarkar [1984] apresentou seu método de pontos interiores para resolver problemas de programação linear com complexidade polinomial, diferente do tradicional método simplex de solução que possui complexidade exponencial, muitos pesquisadores analisaram varias outras variantes do método de pontos interiores. Dentre eles, o método primal – dual foi que atraiu maior atenção devido a seu desempenho teórico e computacional, principalmente para problemas lineares de grande porte. Para um maior entendimento da teoria de pontos interiores primal – dual, sugere-se consultar o livro de Wright [1997].

Em cada iteração do método de pontos interiores primal –dual, aplicamos algum método, já seja direto ou iterativo, que resolva um sistema linear obtido das equações de Karush – Kuhn – Tucker (KKT). Se um método direto é usado para obter a solução do sistema linear de equações KKT, digamos o método de Cholesky ou qualquer outro método de decomposição da

respectiva matriz, essas decomposições envolvem significativamente um esforço computacional grande.

Para evitar esse esforço computacional, Mehrotra [1992] usa uma nova técnica denominada de preditor – corretor motivado no esquema de solução para equações diferenciais. Esta técnica consiste em re-usar a decomposição de uma matriz realizada no passo preditor para ser utilizada no passo corretor. Posteriormente, Gondzio [1996] usou diversas vezes essa decomposição no passo corretor, reduzindo o número de iterações se comparado com o método tradicional de Mehrotra.

Neste trabalho, apresentamos o método de pontos interiores primal – dual preditor corretor de Mehrotra [1992] para resolver problemas de programação linear. Posteriormente aplicamos esse método na solução do problema linear de distribuição, o qual consiste em determinar o número de unidades de um produto transportadas dos centros de produção aos centros de armazenamentos e de aí, transportar aos centros de distribuição, de tal modo que o custo total de transporte seja mínimo. Este problema de distribuição é formulado como um problema de programação linear de fluxo em rede. Para uma maior compreensão na teoria de fluxo em rede recomenda-se o livro de Ahuja et al. [1993].

Neste trabalho é organizado como segue: Na seção 2, apresentamos uma breve descrição do método de pontos interiores primal – dual preditor – corretor. Na seção 3, consideramos a formulação matemática do problema de distribuição, e apresentamos os resultados numéricos do problema de distribuição para rede de diferentes dimensões dependendo do número de centros de produção, centros de armazenamentos e centros de distribuição. Finalmente, terminamos o trabalho com algumas conclusões na seção 4.

## 2. MÉTODO DE PONTOS INTERIORES PRIMAL – DUAL PREDITOR – CORRETOR

Apresentamos a seguir o método de pontos interiores primal – dual preditor – corretor para resolver um problema de programação linear, denominado de primal, dado na forma padrão:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar } & c^T x \\ \text{sujeito a: } & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \quad (1)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz de posto completo igual a  $m$ , com  $m < n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de decisão.

O problema dual do problema (P) primal anterior é dado por:

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \text{maximizar } & b^T y \\ \text{sujeito a: } & A^T y + z = c \\ & z \geq 0, \end{array} \quad (2)$$

onde  $y \in \mathbb{R}^m$  é a variável dual e  $z \in \mathbb{R}^n$  é a variável de folga.

Podemos assumir que as soluções do problema primal e dual satisfazem a condição de ponto interior (CPI), isto é, que existe  $(x^0, y^0, z^0)$  tal que:

$$Ax^0 = b, \quad x^0 > 0, \quad A^T y^0 + z^0 = c, \quad z^0 > 0.$$

Determinar as soluções ótimas do problema primal e dual é equivalente ao seguinte sistema, conhecidas também como as condições de Karush – Kuhn – Tucker (KKT):

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (3.1)$$

$$A^T y + z = c, \quad z \geq 0, \quad (3.2)$$

$$XZ e = 0, \quad (3.3)$$

onde  $e \in \mathbb{R}^n$  é um vetor com componentes de 1's,  $X$  é a matriz diagonal dada pelas componentes do vetor  $x$ , ie.  $X = \text{diag}(x)$ ,  $Z$  também é matriz diagonal  $Z = \text{diag}(z)$ .

A idéia básica do método de pontos interiores primal – dual é perturbar a equação (3.3) por uma equação parametrizada  $XZe = \mu e$ . Isto nos leva ao seguinte sistema:

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (4.1)$$

$$A^T y + z = c, \quad z \geq 0, \quad (4.2)$$

$$XZe = \mu e \quad (4.3)$$

onde  $\mu > 0$  é denominado de parâmetro de barreira.

Se a condição (CPI) satisfaz, então para cada  $\mu > 0$ , o sistema (4) possui uma única solução. Agora, o sistema (4) é idêntico ao sistema (3) se  $\mu$  se aproxima a zero.

No método de pontos interiores primal – dual, em cada iteração do algoritmo, resolve-se o seguinte sistema de Newton para determinar a direção de busca  $\Delta w = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$ :

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p \\ r_d \\ r_c \end{pmatrix} \quad (5)$$

onde temos que:

$$\begin{aligned} r_p &= b - Ax, \\ r_d &= c - A^T y - z, \\ r_c &= \mu e - XZe, \end{aligned}$$

sendo que  $r_p$  é denominada de folga primal,  $r_d$  de folga dual e  $r_c$  de complementaridade, respectivamente.

Sob a condição do posto da matriz  $A$  ser  $m$ , isto é,  $\text{posto}(A) = m$ , o sistema de Newton (5) tem uma única solução.

Realizando as operações convenientemente no sistema (5), obtemos o seguinte sistema denominado de equações normais, sendo a matriz associada simétrica e definida positiva:

$$(AZ^{-1}XA^T) \Delta y = r_p + A(Z^{-1}Xr_d + x - \mu Z^{-1} e) \quad (6.1)$$

sendo  $(AZ^{-1}XA^T)$  uma matriz simétrica e definida positiva.

Uma vez determinada  $\Delta y$  usando as equações normais (6.1), as outras direções podem ser determinadas facilmente:

$$\Delta z = r_d - A^T \Delta y \quad (6.2)$$

$$\Delta x = Z^{-1}(r_c - X\Delta z) \quad (6.3)$$

O passo crucial nos métodos de pontos interiores é determinar a direção de busca  $\Delta w$ . Normalmente, esse sistema (6.1) é resolvido usando métodos diretos, mas algumas vezes esses métodos são proibidos de ser usados devido a limitações de tempo de execução ou de armazenamentos de dados na memória do computador. Dentre desses métodos diretos, o mais usado é o algoritmo de decomposição de Cholesky.

Outras vezes o sistema (6.1) é resolvido usando métodos iterativos, o mais tradicional é usar o algoritmo do gradiente conjugado, mas que depende da escolha de um pré-condicionador apropriado, já que a matriz com o avanço do algoritmo, pode-se transformar mal-condicionada perto da solução ótima.

Uma outra forma de resolver o sistema (5) é a seguinte. Eliminando a variável  $\Delta z$  do sistema de equações normais (5), obtemos um novo sistema linear indefinido ou aumentado, expresso na forma:

$$\begin{bmatrix} -X^{-1}Z & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_d - X^{-1}r_c \\ r_p \end{pmatrix}.$$

Este tipo de sistema de equações é usado por outros autores, e neste caso a solução é obtida geralmente usando métodos iterativos com pré-condicionadores apropriados.

O de maior sucesso entre os métodos de pontos interiores primal – dual é a estratégia de preditor – corretor de Mehrotra [1992]. A direção de busca é determinada resolvendo dois sistemas lineares, o qual tem a mesma matriz de coeficientes mas diferentes lados direitos. Primeiro, usando um dos lados direito para o passo preditor, determina-se uma direção afim de escalonamento, para depois calcular um passo de centro, e então podemos determinar usando o outro lado direito no passo corretor, uma direção corretor de centro.

Devido a seu desempenho computacional, este método preditor – corretor é usado em diversos pacotes computacionais na solução de problemas lineares, por exemplo o trabalho de Gondzio [1996], que usa diversas vezes a decomposição da matriz no passo corretor de tal modo a diminuir o número de iterações, ou em outros algoritmos, como por exemplo no algoritmo homogêneo e auto – dual de programação linear apresentado por Xu et al. [1996]. A idéia da estratégia preditor – corretor também é usada em formulações matemáticas para resolver problemas de programação linear estocásticas usando diversos cenários. Este tipo de problema linear é de grande porte, por exemplo, observar os trabalhos de Berkelaar et al. [2002] e Sun e Liu [2006].

A seguir, apresentamos o algoritmo de pontos interiores primal – dual preditor – corretor, baseado no trabalho de Mehrotra [1992], também é discutido em Wright [1997] ou no trabalho de Tits et al. [2005].

Dados:  $x \in \mathbb{R}^n, x > 0, y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n, z > 0, \mu = x^T z/n$ .

Parâmetro:  $\beta \in (0, 1)$ .

Passo 1. Determinar a direção afim de escalonamento, isto é, resolver:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^a \\ \Delta y^a \\ \Delta z^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - Ax \\ c - A^T y - z \\ -Xz \end{pmatrix}$$

para determinar  $(\Delta x^a, \Delta y^a, \Delta z^a)$ , e calcular

$$\begin{aligned} t_p^a &= \arg \max \{t \in [0, 1] / x + t\Delta x^a \geq 0\}, \\ t_d^a &= \arg \max \{t \in [0, 1] / z + t\Delta z^a \geq 0\}. \end{aligned}$$

Passo 2. Determinar o parâmetro de centro:

$$\sigma = (\mu^a / \mu)^3,$$

$$\text{onde } \mu^a = (x + t_p^a \Delta x^a)^T (z + t_d^a \Delta z^a) / n.$$

Passo 3. Determinar a direção corretor de centro, isto é, resolver:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^c \\ \Delta y^c \\ \Delta z^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma \mu e - \Delta X \Delta z \end{pmatrix}$$

para determinar  $(\Delta x^c, \Delta y^c, \Delta z^c)$ .

Passo 4. Formar a direção de busca total.

$$(\Delta x^m, \Delta y^m, \Delta z^m) = (\Delta x^a, \Delta y^a, \Delta z^a) + (\Delta x^c, \Delta y^c, \Delta z^c),$$

e fazer:

$$\begin{aligned} t_p^m &= \arg \max \{t \in [0, 1] / x + t\Delta x^m \geq 0\}, \\ t_d^m &= \arg \max \{t \in [0, 1] / z + t\Delta z^m \geq 0\}. \end{aligned}$$

Passo 5. Atualizar as variáveis: calcular

$$t_p = \beta t_p^m, \quad t_d = \beta t_d^m,$$

e fazer

$$(x^+, y^+, z^+) = (x, y, z) + (t_p \Delta x^m, t_d \Delta y^m, t_d \Delta z^m),$$

e fazer

$$\mu^+ = (x^+)^T (z^+) / n.$$

O sistema linear no passo 1, para determinar  $(\Delta x^a, \Delta y^a, \Delta z^a)$ , pode ser obtido usando as equações normais dadas por:

$$\begin{aligned} (AZ^{-1}XA^T) \Delta y^a &= A(x + Z^{-1}Xr_d) + r_p, \\ \Delta z^a &= -A^T \Delta y^a + r_d, \\ \Delta x^a &= -x - Z^{-1}X\Delta z^a, \end{aligned} \tag{7.1}$$

onde os vetores  $r_p$  e  $r_d$  foram definidos anteriormente.

O sistema linear no passo 2, para determinar  $(\Delta x^c, \Delta y^c, \Delta z^c)$ , pode ser obtido usando as equações normais dadas por:

$$\begin{aligned} (AZ^{-1}XA^T) \Delta y^c &= -AZ^{-1}(\sigma\mu e - \Delta X^a \Delta z^a), \\ \Delta z^c &= -A^T \Delta y^c, \\ \Delta x^a &= Z^{-1}(\sigma\mu e - \Delta X^a \Delta z^a) - Z^{-1}X \Delta z^c. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Pode-se observar que as equações normais dadas em (7.1) e (8.1) tem a mesma matriz de coeficientes,  $AZ^{-1}XA^T$ , mas diferentes lados direitos. Um algoritmo comum para resolver esse tipo de sistema é usar a decomposição de Cholesky, sugere-se consultar o livro de Nocedal e Wright [1999] e o trabalho de Mészáros [2005]. A decomposição de Cholesky para a matriz simétrica definida positiva  $AZ^{-1}XA^T$  é dada por:

$$AZ^{-1}XA^T = L L^T,$$

onde  $L$  é uma matriz triangular inferior.

Realizando substituições convenientemente, a solução do correspondente sistema de equações normais (7.1) e (8.1) se reduz à solução de sistemas triangulares as quais são facilmente determinadas, isto é, resolvemos o sistema linear:

$$LL^T \Delta y = \Psi$$

onde  $\Psi$  representa o lado direito de (7.1) ou (8.1) e  $\Delta y = \Delta y^a$  ou  $\Delta y = \Delta y^c$ . A solução para  $\Delta y$  é determinada em duas etapas, usando o seguinte esquema:

- i) Resolver  $L g = \Psi$ , para obter  $g$ .
- ii) Resolver  $L^T \Delta y = g$ , para determinar  $\Delta y$ .

A solução em cada sistema linear em (i) ou (ii) é facilmente obtida devido a que são sistemas triangulares.

### 3. MODELO DE DISTRIBUIÇÃO E EXPERIÊNCIA COMPUTACIONAL

Para ilustrar a eficiência do método de pontos interiores primal – dual preditor –corretor e cujo sistema de equações normais é resolvido usando o algoritmo de Cholesky, consideramos o problema de distribuição de um produto transportado de diferentes centros de produção a diferentes centros de armazenamento a um custo associado de transporte, tal vez dependendo da distancia entre desses centros de produção e armazenamento. Esse produto depois é transportado dos centros de armazenamentos aos centros de distribuição ou consumo, também a um custo associado. Neste problema de distribuição, deseja-se determinar quantas unidades devem ser transportadas dos centros de produção aos centros de armazenamento e de ai aos centros de distribuição a um menor custo total.

Seja  $M$  o conjunto dos centros de produção e  $|M| = m$ ; e  $N$  o conjunto dos centros de armazenamentos e  $|N| = n$ . Seja  $P$  o conjunto dos centros de distribuição e  $|P| = p$ . Denomina-se  $x_{ij}$  o número de unidades do produto transportados do centro de produção  $i \in M$  ao centro de armazenamento  $j \in N$  e  $c_{ij}$  o correspondente custo de transporte por unidade. Seja  $y_{jk}$  o número de unidades do produto transportados do centro de armazenamento  $j \in N$  ao centro de distribuição ou consumo  $k \in P$ , e  $d_{jk}$  o correspondente custo de transporte por unidade. O número de unidades disponíveis em cada centro de produção é  $a_i$ ,  $i \in N$ , e o número de unidades solicitadas em cada

centro de distribuição é  $b_k$ ,  $k \in P$ . Suponha-se que o total de unidades produzidas nos centros de produção é igual ao número de unidades solicitadas nos centros de distribuição.

O problema linear de distribuição pode ser formulado na seguinte forma:

$$\text{minimizar } \sum_{i \in I, j \in N} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N, k \in P} d_{jk} y_{jk} \quad (9.1)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{j \in N} x_{ij} = a_i, i \in M \quad (9.2)$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} - \sum_{k \in P} y_{jk} = 0, j \in N \quad (9.3)$$

$$\sum_{j \in N} y_{jk} = b_k, k \in P \quad (9.4)$$

$$x_{ij} \geq 0, y_{jk} \geq 0, i \in M, j \in N, k \in P. \quad (9.5)$$

A função objetiva (9.1) é uma função linear que minimiza o custo total de transporte. A restrição (9.2) representa a capacidade de produção para cada centro de produção. A condição (9.3) é a condição de equilíbrio para cada centro de armazenamento. A restrição (9.4) expressa a capacidade de consumo em cada centro de distribuição. Por último, a restrição (9.5) é a condição de não negatividade de fluxo.

Foi implementado um programa específico, na linguagem FORTRAN, para determinar a dimensão da rede de distribuição, isto é, dados diferentes valores para  $m$ ,  $n$  e  $p$ , pode-se construir a rede que determina o número de arcos e de nós que possui a rede e os dois vetores que indica qual é o nó de origem e o nó de destino. Esses dois vetores definem a matriz  $A$ , de dimensão  $m \times n$ , onde  $m$  é o número de restrições ou nós e  $n$  o número de variáveis ou arcos do problema linear.

Um ponto inicial qualquer é dado para iniciar o método preditor – corretor. Esse ponto não necessariamente é viável, mas Mehrotra [1992] apresenta um processo heurístico para selecionar um ponto inicial viável, e talvez o número de iterações seja menor comparado com qualquer ponto inicial dado. Para determinar o parâmetro  $\beta$  correspondente, em todos os testes computacionais foi usado o valor de  $\beta = 0,99995$ .

Na aplicação do método preditor – corretor, a seqüência do parâmetro de barreira  $\{\mu_k\}$  deve convergir a zero tão rápido como seja possível, como será observado nos experimentos numéricos.

O critério de parada do método primal – dual preditor – corretor é estabelecido em termos da proximidade do valor da função objetiva no ponto atual e no ponto anterior. Também, pede-se que a diferença relativa dos valores das funções objetivas do problema primal e do problema dual seja menor ou igual a  $10^{-8}$ , isto é:

$$\frac{|c^T x - b^T y|}{1 + |b^T y|} < 10^{-8}.$$

O método de pontos interiores primal – dual preditor – corretor foi inteiramente codificado na linguagem FORTRAN com dupla precisão. Todos os experimentos computacionais foram realizados em um microcomputador PC Duron com 512 MB de RAM e 1600 MHZ de frequência e rodando a plataforma Windows XP.

Como foi mencionada anteriormente, a matriz  $(AZ^{-1}XA^t)$  é decomposta usando o algoritmo de Cholesky, isto é:

$$(AZ^{-1}XA^t) = LL^t$$

sendo a matriz L triangular inferior armazenada em um vetor, usando a seqüência  $l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{13}, l_{23}$ , etc. A implementação do algoritmo de Cholesky segue o trabalho de Healy (1985), mas houve necessidade de armazenar a parte simétrica da matriz  $AZ^{-1}XA^t$ , e neste caso, o tamanho do problema de distribuição é limitado a capacidade de armazenamento dos dados no microcomputador.

A seguir, apresentamos os resultados computacionais para redes de distribuição de diferentes dimensões, isto é, para diferentes valores de m, n e ip.

Tabela 1. Resultados Computacionais

m,n,ip	$\mu$	iter	tempo	f.o.	dual
20,25,30	0,00000000016578	4	0,00	6100,00000000	6099,99999979
25,30,50	0,0000000003995	4	0,01	7575,00000000	7574,99999991
30,35,40	0,0000000009572	4	0,02	9112,50000000	9112,49999977
30,35,50	0,0000000004645	4	0,03	9090,00000000	9089,99999987

onde:

m : indica o número de centros de produção.

n : é o número de centros de armazenamento.

p : representa o número de centros de distribuição.

$\mu$  : significa o parâmetro de barreira.

f.o. : é o valor da função objetiva do problema primal.

dual : significa o valor da função objetiva do problema dual.

iter : é o número de iterações realizadas.

tempo : representa o tempo de execução do algoritmo, dada em segundo.

Da tabela acima, podemos observar que o valor de  $\mu$  é bastante pequeno. Também, podemos mencionar que o número de iterações para alcançar à solução ótima (aproximada) é pequeno, o que usualmente ocorre com o método preditor – corretor. Pode-se observar também que o valor da função objetivo do problema primal é praticamente igual ao valor do problema dual.

#### 4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou a aplicação do método de pontos interiores primal – dual preditor – corretor para resolver o problema de distribuição. Este tipo de problema possui uma estrutura de rede a qual foi explorada de tal modo que não foi necessário armazenar a matriz de restrições correspondente. Sendo assim, usamos dois vetores que representa essa matriz, portanto este esquema é apropriado para problemas de distribuição de grande porte.

Ao aplicar o método preditor – corretor, resolvemos dois sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes mas diferentes lados direitos. Neste caso, a matriz correspondente ao sistema linear das equações normais é decomposta usando o algoritmo de Cholesky, mas houve necessidade de armazenar a parte simétrica dessa matriz.



Os resultados computacionais realizadas em algumas redes de distribuição de diferentes dimensões confirmam a eficiência do método de pontos interiores primal – dual preditor – corretor.

#### 4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Ahuja, A., Magnanti, T., Orlin, J., Network Flows: Theory, Algorithms and Applications, USA: Prentice – Hall, Inc. New Jersey, 1993.
- [2] Berkelaar, A., Dert, C., Oldenkamp, B., Zhang, S., “A primal – dual decomposition – based interior point approach to two – stage stochastic linear programming”, Operations Research, v. 50, p. 904 – 915, 2002.
- [3] Gondzio, J., “Multiple centrality corrections in a primal – dual method for linear programming”, Computational Optimization and Applications, v. 6, p. 137 – 156, 1996.
- [4] Healy, M., “Triangular decomposition of a symmetric matrix”, In: Applied Statistics Algorithms [editado por P. Griffiths and J. Hill], Royal Statistical Society / Ellis Horwood Limited, p. 43 –46.
- [5] Karmarkar, N., “A polynomial – time algorithm for linear programming”, Combinatorica, v. 4, p. 373 – 395, 1984.
- [6] Mehrotra, S., “On the implementation of a primal – dual interior point”, SIAM Journal on Optimization, v. 2, p. 575 – 601, 1992.
- [7] Mészáros, C., “The Cholesky factorization in interior point methods”, Computers and Mathematics with Applications, v. 50, p. 1157 – 1166, 2005.
- [8] Nocedal, J. Wright, S., Numerical Optimization, USA: Springer – Verlag, New York, 1999.
- [9] Sun, J., Liu, X., “Scenario formulation of stochastic linear programs and the homogeneous self - dual interior – point method”, INFORMS Journal on Computing, v. 18, n. 4, p. 444 – 454, 2006.
- [10] Tits, A., Absil, P., Woessner, W., “Constraint reduction for linear programs with many constraints”, Optimization Online, 3 May 2005.
- [11] Wright, S., Primal – Dual interior – Point Methods. USA: SIAM, Philadelphia, 1997.
- [12] Xu, X., Hung, P., Ye, Y., “A simplified homogeneous and self – dual linear programming algorithm and its implementation”, Annals of Operations Research, v. 62, p. 151 – 171, 1996.