



SPOLM 2007

ISSN 2175-6295

Rio de Janeiro- Brasil, 08 e 09 novembro de 2007.

MÉTODO PRIMAL-DUAL PARA OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR USANDO ALGORITMOS DE DECOMPOSIÇÃO

Luis Ernesto Torres Guardia

Mestrado de Engenharia de Produção
Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, São Domingos
24210-240, Niterói, R.J., Brasil
tepletg@vm.uff.br

Resumo

Neste trabalho, a solução de um problema de otimização convexa não linear e separável com restrições lineares é determinada. A técnica para obter a solução do problema anterior é o método de pontos interiores primal – dual. Esse algoritmo é bastante utilizado por seu sucesso computacional na solução de problemas de programação linear de grande porte. A solução do sistema linear de equações, que aparece nesse método primal – dual para o problema não linear, é obtida usando já seja o algoritmo de decomposição de Cholesky da matriz, ou o algoritmo de decomposição AINV da inversa da respectiva matriz envolvida no sistema. Como ilustração, o método primal – dual é aplicado ao modelo não linear de fluxo em rede. Alguns experimentos numéricos são apresentados para mostrar a execução do método primal – dual usando os algoritmos de decomposição antes mencionados e mostra a sua eficiência computacional na obtenção da solução do modelo de fluxo em rede.

Palavras-chave: Programação Não Linear; Pontos Interiores Primal - Dual; Fluxo em Rede.

Abstract

In this work, the solution of linearly - constrained nonlinear optimization with separable convex cost is studied. For solving the above problem, we use the primal – dual interior point algorithm. This algorithm made a computational success for solving large-scale linear programming problems. The solution of the corresponding linear system for the nonlinear problem is obtained using some algorithms of decomposition of the respective matrix, say Cholesky, or using the AINV algorithm of decomposition of the inverse matrix. As an illustration, the primal – dual algorithm is applied on nonlinear network flow problems. Numerical experiments are presented and confirm the effectiveness the algorithm in all instances cases, using the above decomposition algorithms.

Keywords: Nonlinear Programming Problem; Primal – Dual Interior Point; Network Flow.

1. INTRODUÇÃO

Devido ao sucesso do método de pontos interiores, iniciado pelo algoritmo de Karmarkar (1984) na área da programação linear, por causa de sua complexidade polinomial de solução, esse método mostrou-se ser de grande sucesso e eficiente técnica de solução, se observado seu impressionante desenvolvimento computacional. Depois esses métodos de pontos interiores foram aplicados também com sucesso para problemas de complementaridade linear, de complementaridade não linear e outras classes de problemas relacionados à otimização. O

método primal – dual foi que atraiu maior atenção entre os diferentes métodos de pontos interiores. Experiências computacionais e desenvolvimentos teóricos mostrarão que eles se desempenham muito melhor que os outros algoritmos de pontos interiores. Por isso, é natural que pesquisadores coloquem suas atenções para aplicar esse método de pontos interiores primal – dual para uma área geralmente mais complexa como da programação não linear com restrições não lineares, cuja solução originalmente era determinada usando o método seqüencial de programação quadrática, onde a função não linear é aproximada por uma função quadrática e as restrições não lineares aproximadas linearmente. Várias experiências numéricas foram realizadas para resolver esse novo problema quadrático com restrições lineares mas, a solução desse problema poderia ser cara computacionalmente, especialmente para problemas de grande porte.

Neste trabalho, apresentamos o problema não linear com restrições linear de fluxo de rede, e cuja solução é determinada usando o método de pontos interiores primal-dual de tal forma a explorar a estrutura da rede devido à matriz envolvida nas restrições lineares ser esparsa. Tais problemas de otimização não linear com restrições de fluxo de rede aparecem em uma ampla variedade de aplicações, por exemplos em planejamento de rede de transporte, consultar o trabalho de Nagurney (1984), em redes de telecomunicações, analisar o trabalho de Ouorou, *et al.* (2000), entre outras aplicações.

O trabalho é organizado como segue. Na seção 2, o método de pontos interiores primal-dual é apresentado para resolver um problema de programação não linear com restrições lineares. Neste caso, a função não linear envolvida é uma função separável, assim a solução do sistema linear, que aparece em todos os métodos de pontos interiores, é obtida em uma forma relativamente simples, e nesse caso podemos usar alguns métodos de decomposição, digamos de Cholesky se a decomposição é da matriz envolvida, ou o método AINV se a decomposição é da inversa da matriz. Em um trabalho posterior, será apresentado o caso da função não linear ser geral. Na seção 3, apresentamos a aplicação do algoritmo primal-dual quando as restrições lineares sejam de conservação de fluxo em uma rede para um único produto, para diferentes funções não lineares separáveis e redes de diferentes portes. Finalmente, algumas conclusões são dadas na seção 4.

2. ALGORITMO PRIMAL - DUAL

Consideremos o seguinte problema de otimização não linear restringido linearmente:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a } \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \quad \quad \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1}$$

Assume-se que a função $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ é convexa e duas vezes diferenciável e contínua. A função $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ é dada pelas restrições lineares do tipo:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$$

sendo \mathbf{A} uma matriz, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m < n$, e de posto completo e $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$.

O caso geral, quando as restrições são não lineares é tratado nos trabalhos de El-Bakry, *et al.* (1996), Yamashita (1998), entre outros trabalhos. O presente artigo segue o trabalho desses autores para o caso particular de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ ser uma função linear.

Seja a função de Lagrange associada com o problema acima (1) definida por:

$$L(\mathbf{w}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^t \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{z}^t \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})^t$ e $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ e $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ são os vetores multiplicadores de Lagrange correspondentes às restrições de igualdades e desigualdades respectivamente.

As condições de Karush – Kuhn – Tucker (**KKT**) de otimalidade do problema (1) são dadas por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, y, z) \\ h(x) \\ XZe \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0}.$$

sendo:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla h(\mathbf{x})^t \mathbf{y} - \mathbf{z} = \nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^t \mathbf{y} - \mathbf{z} \\ \mathbf{X} &= \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathbf{Z} &= \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ \mathbf{e} &= (1, 1, \dots, 1)^t \in \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

Aqui, $\nabla_x \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ é o gradiente de $\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ em relação a variável \mathbf{x} e $\nabla f(\mathbf{x})$ e $\nabla h(\mathbf{x})$ são os gradientes de f e de g respectivamente, e \mathbf{X} e \mathbf{Z} são matrizes diagonais com elementos (x_i) e (z_i) . Eles representam as condições primal, dual e de complementaridade respectivamente.

Para resolver o problema (1) usando o método de pontos interiores primal – dual, muitos pesquisadores aplicam o método de Newton às condições perturbadas de **KKT** (de barreira) e dadas por:

$$\mathbf{F}_\mu(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, y, z) \\ h(x) \\ XZe - \mu \mathbf{e} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\mathbf{x} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} > \mathbf{0},$$

onde $\mu > 0$ é o parâmetro de barreira e $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ significa $x_i > 0$ para todo i .

As condições (3) são denominadas as condições de **KKT** de barreiras e um ponto $\mathbf{w}(\mu) = (\mathbf{x}(\mu), \mathbf{y}(\mu), \mathbf{z}(\mu))$ que satisfaz essas condições é denominado de ponto **KKT** de barreira. O método de pontos interiores usado serve para alcançar um ponto que aproximadamente satisfaça as condições acima (3), e finalmente obter um ponto que satisfaça as condições de **KKT** fazendo que o parâmetro $\mu \rightarrow 0$. Isto significa que forçamos \mathbf{x} e \mathbf{z} sejam estritamente positivos durante as iterações.

Para determinar um ponto **KKT** de barreira aproximado para um $\mu > 0$ dado, usamos o método perturbado de Newton. Seja a direção de Newton $\Delta \mathbf{w} = (\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}, \Delta \mathbf{z})^t$ definida pela solução do sistema linear de equações:

$$\mathbf{F}'_\mu(\mathbf{w}) \Delta \mathbf{w} = -\mathbf{F}_\mu(\mathbf{w}) \quad (4)$$

onde

$$\mathbf{F}'_\mu(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \nabla_x^2 L(w) & \nabla h(x)^t & -I \\ \nabla h(x) & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & A^t & -I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \quad (5)$$

sendo $\nabla_x^2 L(\mathbf{w})$ representa a matriz Hessiana da função de Lagrange $L(\mathbf{w})$, e neste caso particular temos que $\nabla_x^2 L(\mathbf{w}) = \nabla^2 f(\mathbf{x})$ sendo $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ a matriz Hessiana de $f(\mathbf{x})$. Podemos colocar neste caso que $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{H}$, sendo \mathbf{H} uma matriz diagonal por ser f uma função de custo separável.

Assim, a relação (4) toma a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} H & A^t & -I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, y, z) \\ Ax - b \\ XZe - \mu e \end{pmatrix} \quad (6)$$

Sejam as folgas:

$$\begin{aligned} \xi_c &= \nabla_x L(\mathbf{w}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^t \mathbf{y} - \mathbf{z}, \\ \xi_b &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}, \\ \xi_\mu &= \mathbf{X}\mathbf{Z}\mathbf{e} - \mu \mathbf{e}. \end{aligned}$$

A solução do sistema linear de equações (6) é dada por:

$$\{ \mathbf{A} [\mathbf{H} + \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Z}]^{-1} \mathbf{A}^t \} \Delta \mathbf{y} = - \mathbf{A} [\mathbf{H} + \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Z}]^{-1} (\xi_c + \mathbf{X}^{-1} \xi_\mu) + \xi_b. \quad (7.1)$$

$$\Delta \mathbf{x} = - [\mathbf{H} + \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Z}]^{-1} (\mathbf{A}^t \Delta \mathbf{y} + \xi_c + \mathbf{X}^{-1} \xi_\mu). \quad (7.2)$$

$$\Delta \mathbf{z} = - \mathbf{X}^{-1} (\xi_\mu + \mathbf{Z} \Delta \mathbf{x}). \quad (7.3)$$

Pela sua estrutura, a equação (7.1) é denominada de sistema normal.

Seja $\Delta \mathbf{w}_k = (\Delta \mathbf{x}_k, \Delta \mathbf{y}_k, \Delta \mathbf{z}_k)^t$ a solução do sistema (7), então uma nova iteração é realizada da seguinte forma:

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{w}_k,$$

onde α_k é o tamanho de passo determinado por um procedimento de busca de linha.

No ponto $\mathbf{w}_k = (\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k)$ calculamos o passo máximo, α_{kmax} , permitido à fronteira da região viável e dado por:

$$\alpha_{kmax} = \min \{ \min_i \{ -(x_k)_i / (\Delta x_k)_i \mid (\Delta x_k)_i < 0 \}, \min_i \{ -(z_k)_i / (\Delta z_k)_i \mid (\Delta z_k)_i < 0 \} \}.$$

Para ter robustez do algoritmo primal – dual, um passo na iteração seguinte é dado por:

$$\alpha_k = \alpha'_k \beta^j, \quad \alpha'_k = \min \{ \gamma \alpha_{kmax}, 1 \},$$

onde $\gamma \in (0,1)$ e $\beta \in (0,1)$ são escalares fixos, e $j = j_k$ é o menor inteiro não negativo tal que:

$$\phi(\mathbf{w}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{w}_k, \mu_k) - \phi(\mathbf{w}_k, \mu_k) \leq \tau \alpha_k \nabla \phi(\mathbf{w}_k, \mu_k)^t \Delta \mathbf{w}_k,$$

onde $\tau \in (0,1)$, e sendo $\phi(\mathbf{w}, \mu)$ a função de mérito definida por:

$$\phi(\mathbf{w}, \mu) = \frac{1}{2} \| F_\mu(\mathbf{w}) \|^2.$$

Apresentamos a seguir, um resumo do algoritmo de pontos interiores primal-dual.

Considerar um ponto interior inicial $\mathbf{w}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ tal que $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) > 0$, $\tau \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, e $\gamma \in (0,1)$.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$ até a convergência, realizar os seguintes passos:

Passo 1. Fazer $\mu_k = \sigma_k(\mathbf{x}_k^t \mathbf{z}_k)/n$, $\sigma_k \in (0,1)$.

Passo 2. Resolver o sistema linear para determinar $\Delta \mathbf{w}_k$ usando (7.1), (7.2) e (7.3):

$$F'(\mathbf{w}_k) \Delta \mathbf{w}_k = -F\mu_k(\mathbf{w}_k).$$

Passo 3. Calcular α_k usando a função de mérito $\phi(\mathbf{w}, \mu)$.

Passo 4. Fazer $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + \alpha_k \Delta \mathbf{w}_k$.

O maior esforço computacional requerido no anterior método de pontos interiores primal – dual é determinar a solução do sistema linear de equações no **passo (2)**, isto é, principalmente a expressão dada em (7.1), que por simplicidade podemos escrever na forma:

$$(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t) \Delta \mathbf{y} = \Psi \quad (8)$$

onde Ψ representa o lado direito de (7.1) e $\mathbf{D} = [\mathbf{H} + \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Z}]^{-1}$ é uma matriz diagonal devido a que a matriz \mathbf{H} é diagonal por ser a matriz Hessiana de uma função separável, e também \mathbf{X} e \mathbf{Z} são matrizes diagonais.

Entre os métodos diretos que determinam a solução exata do sistema de equações lineares (8) temos o método de decomposição da matriz $(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t)$, digamos a conhecida decomposição de Cholesky, analisar o livro de Nocedal e Wright (1999) ou a decomposição AINV da inversa da matriz $(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t)$, ver Benzi *et al.* (2000). Esses dois métodos de decomposição serão usados para avaliar seu desempenho computacional. Entre os métodos indiretos, que determinam uma solução aproximada do sistema (8), temos os algoritmos de direções conjugadas, em especial o método do gradiente conjugado, também pode ser analisado em Nocedal e Wright (1999), que é fácil de ser implementado já que requer simplesmente o produto de matrizes e vetores.

O método bastante conhecido de decomposição de Cholesky consiste em expressar a matriz $(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t)$ de tal modo que:

$$(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t) = \mathbf{U}^t \mathbf{U}$$

sendo \mathbf{U} uma matriz triangular superior. Assim, a solução do sistema (8), agora expresso na forma:

$$\mathbf{U}^t \mathbf{U} \Delta \mathbf{y} = \Psi$$

é determinada usando o seguinte esquema:

- i) Resolver $\mathbf{U}^t \mathbf{g} = \Psi$, para obter \mathbf{g} .
- ii) Resolver $\mathbf{U} \Delta \mathbf{y} = \mathbf{g}$, para obter $\Delta \mathbf{y}$.

A solução em cada sistema em (i) ou (ii) é facilmente obtida devido a que são sistemas triangulares.

Por outro lado, temos também o algoritmo de decomposição da inversa da matriz $(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t)$ e neste caso usamos o método do Benzi *et al.* [2000], tal que :

$$(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t)^{-1} \cong \mathbf{Z} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Z}^t, \quad (9)$$

sendo \mathbf{Z} uma matriz triangular superior com elementos na diagonal igual a 1's, e \mathbf{P} uma matriz diagonal.

Devido a que o método AINV não é bastante conhecido, apresentamos a seguir esse método de decomposição estudado em Benzi *et al.* [2000], para obter a matriz inversa de $(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t)$ de dimensão n , onde e_i é o i -ésimo vetor unitário base:

- (1) Seja $z_i^{(0)} = e_i$ ($1 \leq i \leq n$)
- (2) Para $i = 1, 2, \dots, n$ fazer
- (3) $v_i = (\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t) z_i^{(i-1)}$
- (4) Para $j = i, i+1, \dots, n$ fazer
- (5) $p_j^{(i-1)} = v_i^T z_j^{(i-1)}$
- (6) final
- (7) se $i = n$ ir a (12)
- (8) Para $j = i+1, \dots, n$ fazer
- (9) $z_j^{(i)} = z_j^{(i-1)} - (p_j^{(i-1)} / p_i^{(i-1)}) z_i^{(i-1)}$
- (10) final
- (11) final
- (12) Seja $z_i = z_i^{(i-1)}$ e $p_i = p_i^{(i-1)}$, para $1 \leq i \leq n$. Retornar

A matriz triangular superior \mathbf{Z} e a matriz diagonal \mathbf{P} são dadas por:

$$\mathbf{Z} = [z_1, z_2, \dots, z_n] \text{ e } \mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n).$$

3. EXPERIÊNCIA NUMÉRICA

Para ilustrar a eficiência do método de pontos interiores primal-dual, consideremos o problema não linear de fluxo em rede para um único produto com custos não lineares nos arcos e separáveis. Este problema é definido por um grafo direcionado $G = (N, A)$ onde N é o conjunto de nós com $\|N\| = n$ e A é o conjunto de arcos com $\|A\| = m$. Para cada nó $i \in N$, um escalar s_i é associado, onde s_i é a oferta/procura nó i , dependendo se seu valor é maior/menor que zero. Para cada arco $(i, j) \in A$, uma função convexa, contínua e diferenciável $f_{ij}; \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada.

A variável x_{ij} representa o número de unidades de fluxo transportado através do arco (i, j) , isto é, do nó i ao nó j , e $(i, j) \in A$.

O problema não linear de fluxo em rede, com custo separável não linear nos arcos, é dado por:

$$\text{minimizar } f(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j) \in A} f_{ij}(x_{ij}) \quad (9.1)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} x_{ji} = s_i, \quad i \in N, \quad (9.2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in A. \quad (9.3)$$

A função objetiva (9.1) é uma função não linear de custo e separável, isto é, a função não linear associada a um arco só depende do fluxo do próprio arco. A equação (9.2) é denominada de restrição de conservação de fluxo de rede, que pelo número de nós e arcos pode-se transformar em um problema de grande porte. A restrição (9.3) é a condição de não negatividade de fluxo.

Na literatura existente para resolver o problema não linear de fluxo de rede (9) podemos mencionar o trabalho de Marín (1995), usa um método de decomposição resolvendo um subproblema linear e um problema mestre; Bertsekas *et al.* (1997), propõem o método ϵ -relaxação que consiste em um método aproximado à solução sob uma certa tolerância pré-definida; Ourou (2000), usa um algoritmo primal – dual para programação monotrópica; Beraldi

et al. (2001), usam igualmente o método ϵ - relaxação; Garcia *et al.* (2003), consideram o esquema de geração de colunas. Outros trabalhos podem ser encontrados nas referências dos trabalhos dos autores anteriormente citados.

Redes de diversas dimensões foram analisadas baseadas na rede básica do trabalho de Nagurney (1984), p. 476. Essa rede consiste de 20 nós e 28 arcos e é usada para determinar a solução do problema de equilíbrio de tráfego em rede de transporte. Essa rede básica foi depois estendida para formar redes de grande porte. Para isso, foi implementado um programa específico, na linguagem FORTRAN, para determinar a dimensão da nova rede, isto é, o número de arcos e de nós e os dois vetores que determinam a origem e o destino que definem cada arco da rede. Por exemplo, em um dos casos estudados, o número total de variáveis ou arcos é de 1970 para uma rede de 1020 nós.

Um ponto inicial é dado no método primal-dual, o qual não necessariamente é viável. Para determinar o tamanho de passo α , usamos em todos os testes computacionais o valor $\gamma = 0,99995$. Neste caso, aceitamos o primeiro passo α , sem usar qualquer função de mérito nem qualquer filtro, como é usado em problemas gerais da programação não linear.

Na aplicação do método primal-dual, a seqüência do parâmetro de barreira $\{\mu_k\}$ deve convergir a zero tão rápido como seja possível. Várias regras foram estudadas para o decréscimo desse parâmetro μ , ver, por exemplo, os trabalhos de Waltz *et al.* (2005), Wächter *et al.* (2006), Yamashita e Yabe (2005), entre outros. Aqui usamos a estratégia adotada por Luksan *et al.* (2005) que, segundo os autores, desenvolve-se bem na prática. A regra é a seguinte:

$$\mu = \sigma \mathbf{x}^t \mathbf{z} / n$$

onde $\sigma = 0,1 \min \{0,05 (1 - \rho)/\rho, 2\}^3$

e
$$\rho = \frac{\min(x_i, z_i)}{x^t \mathbf{z} / n}$$

sendo n o número de variáveis.

O critério de parada do método de pontos interiores é estabelecido em termos de proximidade do valor da função objetivo no ponto atual e no ponto anterior. Exige-se que a diferença relativa desses valores das funções objetivos seja menor ou igual a 10^{-8} e o valor do parâmetro μ seja próximo a zero.

O algoritmo de pontos interiores primal – dual foi inteiramente codificado em linguagem FORTRAN com dupla precisão. Todos os experimentos foram realizados em um microcomputador PC Duron com 512 MB de RAM e 1600 MHZ de frequência rodando a plataforma Windows XP.

Como foi mencionada anteriormente, a matriz $(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t)$ é decomposta usando o algoritmo de Cholesky, isto é:

$$(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t) = \mathbf{U}^t \mathbf{U}$$

sendo a matriz simétrica $(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t)$ armazenada em um vetor. Da mesma forma, a matriz \mathbf{U} é armazenada em outro vetor, usando a seqüência $u_{11}, u_{12}, u_{22}, u_{13}, u_{23}$, etc. A implementação do algoritmo de Cholesky segue o trabalho de Healy (1985).

Para o caso do algoritmo AINV ser usado, ao realizar o passo 3 de tal algoritmo, isto é, o produto matriz-vetor $(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t) \mathbf{z}$, não é necessário armazenar nem a matriz de restrições de conservação de fluxo (9.2), agora agrupadas na matriz \mathbf{A} , a qual é esparsa, nem armazenar a matriz total $(\mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^t)$, sendo esta observação, talvez uma vantagem em relação ao algoritmo de Cholesky.

No presente trabalho, lidamos com dois tipos de funções não lineares de custo encontrados na literatura:

- i) $f_{ij}(x_{ij}) = x_{ij} \ln(x_{ij})$ para todo $(i,j) \in A$.
- ii) $f_{ij}(x_{ij}) = x_{ij} / (c_{ij} - x_{ij})$, $x_{ij} < c_{ij}$, $c_{ij} > 0$, para todo $(i,j) \in A$.

A seguir apresentamos os resultados computacionais para a primeira função não linear, usando os dois métodos de decomposição antes mencionados, para a respectiva matriz do sistema linear:

3.1 Função de custo $f_{ij}(x_{ij}) = x_{ij} \ln(x_{ij})$

Método de Cholesky

rede	arcos=105 nós=60	arcos=390 nós=210	arcos=410 nós=220	arcos=800 nós=420	arcos=1970 nós=1020
μ	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}
f.o.	3959,0477869	6761,7448965	6587,1767735	7426,9077262	11455,8519637
Iter.	8	8	8	8	9
tempo	0,02	0,30	0,38	3,14	51,66
dual	3959,0477840	6761,7445403	6587,1765685	7426,9075642	11455,8226856

Método AINV

rede	arcos=105 nós=60	arcos=390 nós=210	arcos=410 nós=220	arcos=800 nós=420	arcos=1970 nós=1020
μ	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}
f.o.	3959,0477869	6761,7448965	6587,1767735	7426,9077262	11455,8519637
Iter.	8	8	8	8	9
tempo	0,03	0,54	0,63	6,14	110,48
dual	3959,0472735	6761,7392737	6587,1711670	7426,8959008	11455,8475145

Depois analisamos os resultados computacionais para a segunda função não linear:

3.2 Função de custo $f_{ij}(x_{ij}) = x_{ij} / (c_{ij} - x_{ij})$,

Método de Cholesky

rede	arcos=105 nós=60	arcos=390 nós=210	arcos=410 nós=220	arcos=800 nós=420	arcos=1970 nós=1020
μ	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}
f.o.	7,8678463	15,6439152	15,6012696	20,6171251	35,9779677
Iter.	13	16	15	14	20
tempo	0,03	0,61	0,70	5,55	115,13
dual	7,8678071	15,6439149	15,601104	20,6171244	35,9779309

Método AINV

rede	arcos=105	arcos=390	arcos=410	arcos=800	arcos=1970
------	-----------	-----------	-----------	-----------	------------

	nós=60	nós=210	nós=220	nós=420	nós=1020
μ	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}
f.o.	7,8678463	15,6439136	15,6012696	20,6171251	35,9779677
Iter.	11	14	13	12	17
tempo	0,03	1,00	1,04	10,23	209,27
dual	7,8678303	15,6439136	15,6012612	20,6170932	35,9779664

Nestes experimentos, o parâmetro adotado é $\gamma = 0,99995$; f.o. é o valor da função objetiva da respectiva função não linear de custo; iter é o número de iterações requeridas; tempo (em segundos) é o tempo usado na obtenção da respectiva solução, e o dual é o valor da função objetiva do respectivo problema dual. Pode-se observar que o parâmetro μ de barreira é de valor muito pequeno.

Pode-se observar também das tabelas anteriores, que o algoritmo de pontos interiores desempenha-se muito bem na obtenção da solução do problema não linear de fluxo de rede. As soluções obtidas, do sistema linear de equações, usando os métodos de decomposição, de Cholesky e de AINV, praticamente coincidem nos casos estudados, mas o primeiro método, de Cholesky, precisa de menor tempo computacional.

4. CONCLUSÕES

Este artigo apresenta o problema não linear de fluxo em redes que pela sua estrutura pode ser um problema de grande porte, mas para esse caso, a matriz de conservação de fluxo é armazenada em dois vetores: um de origem e o outro de destino. Assim, o método de pontos interiores primal – dual é apresentado de tal forma a explorar tal estrutura sem armazenar totalmente as matrizes envolvidas no sistema de equações lineares, que surgem no problema de otimização não linear. Isto é confirmado quando usamos o método exato de decomposição de Cholesky, do tipo U^tU , da matriz $(A D A^t)$, sendo armazenada a parte simétrica de essa matriz, na resolução do sistema linear correspondente, ou quando esse sistema linear é resolvido usando o método AINV, que determina a decomposição da inversa da respectiva matriz, isto é, a inversa da matriz $(A D A^t)$, e neste caso, não é armazenada a matriz mencionada. Deve-se mencionar que um outro algoritmo bastante usado é o algoritmo do gradiente conjugado mas que nesse caso a solução do sistema linear encontrada é aproximada, mas também explora a estrutura da rede. Os resultados numéricos realizados em algumas redes de diferentes dimensões e diferentes custos não lineares, confirmam a eficiência do método de pontos interiores primal – dual usando vários algoritmos de decomposição da matriz envolvida no sistema linear.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Benzi, M., Cullum, J. e Tuma, M., (2000), “Robust Approximate Inverse Preconditioning for the Conjugate Gradient Method”, SIAM Journal on Scientific Computing, v. 22, no. 4, p. 1318-1332.
- [2] Beraldi, P., Guerriero, F. e Musmanno, R., (2001), “Parallel Algorithms for Solving the Convex Minimum Cost Flow Problem”, Computational Optimization and Applications, v. 18, no. 2, p. 175 – 190.
- [3] Bertsekas, D., Polymenakos, L. e Tseng, P., (1997), “An ϵ - Relaxations Method for Convex Network Optimization Problems”, SIAM Journal on Optimization, v. 7, p. 853 – 870.
- [4] El-Bakry, A., Tapia, R. Tsuchiya, T. e Zhang, Y., (1996), “On the Formulation and Theory of the Newton Interior – Point Method for Nonlinear Programming”, Journal of

- Optimization Theory and Applications, v. 89, no. 3, p. 507 – 541.
- [5] García, R., Marín, A. e Patriksson, M., (2003), “Column Generation Algorithms for Nonlinear Optimization, I: Convergence Analysis”, Optimization, v. 52, no. 2, p. 171 – 200.
 - [6] Healy, M. (1985), “Triangular Decomposition of a Symmetric Matrix”, In: Applied Statistics Algorithms [editado por P. Griffiths e I. Hill], Royal Statistical Society / Ellis Horwood Limited, p. 43 - 46.
 - [7] Karmarkar, N. (1984), “A Polynomial – Time Algorithm for Linear Programming”, Combinatorica, v.4, p. 373 – 395.
 - [8] Luksan, L., Matonoba, C. e Vlcek, J. (2005), “Interior Point Methods for Large- Scale Nonlinear Programming”, Optimization Methods and Software, v. 20, no. 4-5, p. 569 – 582.
 - [9] Marín, A., (1995), “Restricted Simplicial Decomposition with Side Constraints”, Networks, v. 26, p. 199 – 215.
 - [10] Nagurney, A. (1984), “Comparative Tests of Multimodal Traffic Equilibrium Methods”, Transportation Research, v. 18B, no. 6, p. 469- 485.
 - [11] Nocedal, J. e Wright, S. (1999), Numerical Optimization, Springer-Verlag, New York.
 - [12] Ouorou, A., (2000), “A Primal – Dual Algorithm for Monotropic Programming and its Application to Network Optimization”, Computational Optimization and Applications, v. 15, p.125 – 143.
 - [13] Ouorou, A., Mahey, P. e Vial, (2000), J., “A Survey of Algorithms for Convex Multicommodity Flow Problems”, Management Science, v. 46, n. 1, p. 126 – 147.
 - [14] Wachter, A. e Biegler, L. (2006), “On the Implementation of an Interior-Point Filter Line-Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming”, Mathematical Programming, Serie A, v. 106, no. 1, p. 25 – 57.
 - [15] Waltz, R. , Morales, J, Nocedal, J. e Orban, D., (2005), “An Interior Algorithm for Nonlinear Optimization that Combines Line Search and Trust Region Steps”, Mathematical Programming, Serie A, v. 107, no. 3 p. 391 – 408.
 - [16] Yamashita, H., (1998), “A Globally Convergence Primal - Dual Interior Point for Constrained Optimization”, Optimization Methods and Software, v. 10, p. 443- 469.
 - [17] Yamashita, H. e Yabe, H., (2005), “Quadratic Convergence of a Primal-Dual Interior Point Method for Degenerate Nonlinear Optimization Problems”, Computational Optimization and Applications, v. 31, p. 123 – 143.